Über Primideale von Halbgruppen

Von G. SZÁSZ (Nyíregyháza)

1. Ein Ideal einer Halbgruppe H heißt bekanntlich ein *Primideal* von H, wenn aus $xy \in P$ $(x, y \in H)$ immer folgt, daß entweder x oder y in P liegt. Sind P ein Primideal und I, J beliebige Ideale von H, so daß $IJ \subseteqq P$, so besteht entweder[1]) $I \subseteqq P$ oder $J \subseteqq P$.

Eine nichtleere Menge $\mathfrak{M}$ der Ideale von H nennt man eine *Kette*, wenn für jedes Paar I, J aus $\mathfrak{M}$ entweder $I \subseteqq J$ oder $I \supseteqq J$ gilt.

2. Es ist nicht schwer den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Ist in einer Halbgruppe H jedes Ideal prim, so bilden alle Ideale von H eine Kette.*

BEWEIS[2]). Es sei H eine Halbgruppe, in der jedes Ideal prim ist. Man betrachte zwei Ideale I, J von H und deren Produkt $IJ = K$. Dann ist auch K ein Ideal von H, für das die Beziehungen

$$K \subseteqq I \quad \text{und} \quad K \subseteqq J \tag{1}$$

gelten. Das Ideal K ist aber, nach der Voraussetzung, ein Primideal, so daß aus $IJ = K$ entweder

$$I \subseteqq K \tag{2a}$$

oder

$$J \subseteqq K \tag{2b}$$

folgt. Aus (1) und (2a), bzw. aus (1) und (2b) ergibt sich nun

$$I \subseteqq K \subseteqq J \quad \text{bzw.} \quad J \subseteqq K \subseteqq I,$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Man kann die entsprechende Behauptung auch für Hauptideale beweisen:

Satz 2. *Ist in einer Halbgruppe H jedes Hauptideal prim, so bilden alle Hauptideale von H eine Kette.*

Dem Beweis dieses Satzes wollen wir vorausschicken, daß sich der Gedankengang des vorhergehenden Beweises ohne weiteres nicht anwenden läßt, da das Produkt von zwei Hauptidealen im allgemeinen kein Haupideal ist. Ferner verabreden wir

---

[1]) Ist nämlich, z. B., $I \nsubseteq P$, so gibt es ein Element i_0 in I, so daß $i_0 \notin P$; da aber $i_0 j \in P$ für jedes $j \in J$ nach der Voraussetzung, so gilt auch $j \in P$ für jedes j aus J, also $J \subseteqq P$.

[2]) Dieser Beweis stammt von Herrn O. STEINFELD; mein ursprünglicher Beweis war etwas komplizierter.

die folgende Bezeichnung: ist x ein beliebiges Element der betrachteten Halbgruppe, so wird (x) das durch x erzeugte Hauptideal bedeuten.

BEWEIS von Satz 2. Es sei H eine Halbgruppe, in der jedes Hauptideal prim ist. Man betrachte zwei beliebige Hauptideale (a) und (b) von H. Offenbar ist

$$(ab) \subseteqq (a) \quad \text{und} \quad (ab) \subseteqq (b). \tag{3}$$

Da aber nach unserer Voraussetzung das Hauptideal (ab) prim ist, so folgt aus der trivialen Beziehung $ab \in (ab)$, daß entweder a oder b in (ab) liegt. Dementsprechend gilt entweder

$$(a) \subseteqq (ab) \tag{4a}$$

oder

$$(b) \subseteqq (ab). \tag{4b}$$

Aus (3) und (4a), bzw. aus (3) und (4b) ergibt sich

$$(a) = (ab) \subseteqq (b) \quad \text{bzw.} \quad (b) = (ab) \subseteqq (a),$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Man sagt, daß die Ideale einer Halbgruppe H der *Maximalbedingung* genügen, wenn jede Kette von Idealen der Form

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$$

endlich ist. Bekanntlich[3]) bilden alle Ideale einer der Maximalbedingung genügenden Halbgruppe eine einzige Kette genau dann, wenn jedes Ideal dieser Halbgruppe ein Hauptideal ist. Aus diesem und dem obigen Satz ergibt sich das folgende

Korollar. *Es sei H eine Halbgruppe, die der Maximalbedingung genügt. Ist jedes Ideal von H prim, so hat H nur Hauptideale.*

3. Wir beschäftigen uns noch mit der Umkehrung des Satzes 1. Für Halbverbände (d. h. für kommutative Halbgruppen, in denen alle Elemente idempotent sind) gilt die Umkehrung fast trivialerweise: Es ist nämlich auf indirektem Wege nicht schwer zu zeigen, daß *jeder Halbverband, dessen Ideale eine einzige Kette bilden, nach der in den Halbverbänden üblichen Ordnungsrelation*[4]) *total geordnet ist*, und in einem total geordnetem Halbverband ist jedes Ideal prim.

Satzt 1 läßt sich aber im allgemeinen nicht umkehren. Man betrachte z. B. die dreielementige Halbgruppe $H_3 = \{a, b, z\}$ mit der Multiplikationstafel

	a	b	z
a	z	z	z
b	z	a	z
z	z	z	z

(das Element z ist also das Zeroelement von H_3). In H_3 sind

$$(z) = \{z\}, \quad (a) = \{z, a\}, \quad (b) = \{z, a, b\} = H_3;$$

es gilt also $(z) \subset (a) \subset (b)$ und weder (z), noch (a) ist ein Primideal.

[3]) Siehe [1], Seite 226.
[4]) Siehe z. B. [2], Seite 47.

Die Halbgruppe H_3 gehört zu der Klasse der sogenannten Nilhalbgruppen. Eine Halbgruppe mit Zeroelement z wird eine *Nilhalbgruppe* genannt, wenn es zu jedem Element a dieser Halbgruppe eine positive ganze Zahl n gibt, so daß a^n gleich z ist.

Offenbar ist das Hauptideal (z) in keiner Nilhalbgruppe prim. Wir haben aber auch den allgemeineren

Satz 3. *Ist a ein zerlegbares*[5]) *Element einer Nilhalbgruppe H, so ist das Hauptideal (a) nicht prim.*

Beweis. Für $a=z$ ist unsere Behauptung trivial. Es sei also $a \neq z$, und — im Gegensatz zu unserer Behauptung — nehmen wir an, daß a in der Form

$$a=bc \qquad (b \neq a,\, c \neq a)$$

dargestellt weden kann. Das bedeutet, daß bc im Ideal (a) liegt. Wäre nun (a) ein Primideal, so würde es entweder b, oder c enthalten; untersuchen wir die erste Möglichkeit. Dann wäre $b=\sigma a \tau$, wobei σ und τ entweder Elemente aus H, oder leere Symbole sind. Daraus würde aber

$$a=bc=\sigma a \tau c=\sigma(bc)\tau c=\sigma\big((\sigma a \tau)c\big)\tau c=\sigma^2 a(\tau c)^2=\ldots=\sigma^n a(\tau c)^n$$

für jede positive ganze Zahl n folgen. Da aber für ein gewisses n das Element $(\tau c)^n$ gleich z ist, ergibt sich $a=z$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Literatur

[1] E. S. Liapin, (Е. С. Ляпин), Полугруппы, Гос. Изд. Физико-Математической литературы, *Moskau* (1960).
[2] G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie, *Budapest—Leipzig*, 1962.

(Eingegangen am 5. September 1964.)

[5]) Ein Element a einer Halbgruppe H heißt *zeglerbar*, wenn es in H solche, von a verschiedene Elemente gibt, deren Produkt gleich a ist.