Über eine Quasiordnung in Halbgruppen

Von G. SZÁSZ (Nyíregyháza)

1. Unter einer *Quasiordnung* einer Menge M versteht man eine reflexive und transitive Relation von M. Ist also eine Quasiordnung auch antisymmetrisch, so ist sie eine Ordnungsrelation.

In dieser Arbeit definieren wir bezüglich der Halbgruppen eine Quasiordnung, und geben gewisse notwendige bzw. hinreichende Bedingungen dafür, daß diese Quasiordnung eine Ordnungsrelation sei.

2. Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen und Definitionen. Es bezeichne H eine Halbgruppe und (a) $(a \in H)$ das von a erzeugte Hauptideal in H. Bekanntlich besteht (a) aus allen Elementen von der Form

$$a, \quad ra, \quad as, \quad ras,$$

wo r und s beliebige Elemente aus H bedeuten. Um diese vier Typen der Elemente von (a) einheitlich bezeichnen zu können, werden wir auch Symbole benützen, die entweder gewisse Elemente von H bedeuten, oder aber für leere Symbole angesehen werden sollen; solche Symbole werden durch griechische Buchstaben bezeichnet. (Zum Beispiel wird $a = b\gamma$ bedeuten, daß a entweder dem Element b, oder dem Produkt von b mit einem Element γ gleich ist.) Mit dieser Bezeichnungsweise kann man schreiben, daß (a) aus allen Elementen von der Form $\gamma a \delta$ besteht; ist die Halbgruppe H sogar kommutativ, so besteht (a) aus allen Elementen von der Form γa.

Eine Halbgruppe H heißt *idempotent*, wenn jedes Element von H idempotent ist. Unter einer *Nilhalbgruppe* verstehen wir eine Halbgruppe mit Zeroelement 0, in der man zu jedem Element a eine positive ganze Zahl n finden kann, so daß a^n gleich 0 ist. Ferner sagt man, daß die Halbgruppe H eine *Halbgruppe mit Kommutatoren* ist, wenn es zu jedem Paar a, b von Elementen aus H Symbole γ und δ gibt, so daß $ab = \gamma ba$ bzw. $ba = \delta ab$ ist. Das Attribut „regulär" gebrauchen wir im Neumannschen Sinne.

Wir nennen, wie üblich, ein Element a einer Halbgruppe H *zerlegbar*, wenn es Elemente b, c in H gibt, die von a verschieden sind, und deren Produkt gleich a ist. Die nicht zerlegbaren Elemente nennt man *unzerlegbar*.

3. Jetzt definieren wir in der Halbgruppe H eine binäre Relation $\dashv$ durch die folgende Regel: es sei

(1) $\qquad a \dashv b \quad (a, b \in H)$ genau dann, wenn $a \in (b)$

ist. Offenbar ist diese Relation eine Quasiordnung in H.

Nach dem oben über (a) gesagten können wir die Definition (1) folgenderweise umformen:

(2) $$a \dashv b \quad (a, b \in H) \text{ genau dann, wenn } a = \gamma b \delta$$

mit irgendwelchen γ, δ gilt. Ist H sogar kommutativ, so gilt

(3) $$a \dashv b \quad (a, b \in H) \text{ genau dann, wenn } a = \gamma b$$

für irgendein γ. Im folgenden werden wir statt (1) überall (2) bzw. (3) gebrauchen.

Bevor wir die Antisymetrie der Relation $\dashv$ zu untersuchen beginnen, bemerken wir noch, daß *diese Relation in kommutativen Halbgruppen immer monoton ist.* Gilt nämlich $a \dashv b$ für die Elemente a, b einer kommutativen Halbgruppe, so kann man a nach (3) in der Form $a = \gamma b$ darstellen, woraus sich für jedes Element x der Halbgruppe $ax = (\gamma b)x = \gamma(bx)$ und folglich $ax \dashv bx$ ergibt.

4. In diesem Absatz untersuchen wir die Eigenschaften solcher Halbgruppen, in denen die Relation $\dashv$ antisymmetrisch ist; solche Halbgruppen werden wir der Kürze halber *idealgeordnet* nennen.

Satz 1. *Hat eine idealgeordnete Halbgruppe ein Einselement, so ist es unzerlegbar.*

Beweis. Man betrachte eine Halbgruppe H, die ein zerlegbares Einselement e hat, und zwar sei

$$e = uv \quad (u \neq e,\ v \neq e).$$

Nach (2) gilt dann $e \dashv v$. Andererseits ist $v = ev$, so daß auch $v \dashv e$ gilt, obwohl e und v verschiedene Elemente von H sind. Das bedeutet, daß in H die Relation $\dashv$ nicht antisymmetrisch ist.

Satz 2. *Jede idealgeordnete Halbgruppe mit Kommutatoren ist kommutativ.*

Beweis. Es sei H eine Halbgruppe mit den gesagten Eigenschaften und a, b ein beliebiges Elementenpaar aus H. Dann können die Produkte ab und ba in der Form

$$ab = \gamma ba \quad \text{bzw.} \quad ba = \delta ab$$

dargestellt werden, woraus nach (2)

$$ab \dashv ba \quad \text{bzw.} \quad ba \dashv ab$$

folgt. Da die Relation $\dashv$ in H antisymmetrisch ist, ergibt sich daraus, daß $ab = ba$ ist.

Satz 3. *Jede idealgeordnete reguläre Halbgruppe ist idempotent.*

Beweis. Es sei H eine reguläre Halbgruppe und a ein beliebiges Element von H. Dann gibt es ein Element x in H, so daß

$$a = axa = (ax)a$$

gilt; daraus folgt nach (3), daß $a \dashv ax$ ist. Andererseits ist $ax \dashv a$. Ist jetzt H idealgeordnet, so ergibt sich die Gleichung $ax = a$ und folglich ist

$$a = axa = aa = a^2,$$

was zu beweisen war.

5. Endlich geben wir einige hinreichende Bedingungen für die Antisymmetrie der Relation $\dashv$.

Satz 4. *Es sei H eine kommutative Halbgruppe, für die eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(A) *H ist idempotent (d. h. ein Halbverband);*
(B) *In H ist die Kürzungsregel gültig, und das Einselement von H — wenn ein solches existiert — ist unzerlegbar.*

Dann ist die Relation $\dashv$ in H antisymmetrisch.

Beweis. Nehmen wir an, daß für die Elemente a und b von H einerseits $a \dashv b$, andererseits $b \dashv a$ gilt. Nach (3) können dann diese Elemente in der Form

$$a = \gamma b \quad \text{bzw.} \quad b = \delta a \tag{4}$$

dargestellt werden; folglich ist

$$a = \gamma(\delta a) = (\gamma\delta)a. \tag{5}$$

Im Fall (A) können wir weiter rechnen, wie folgt:

$$a = (\gamma\delta^2)a = (\gamma\delta)(\delta a) = (\gamma\delta)b = (\delta\gamma)b = \delta(\gamma b) = \delta a = b.$$

Im Fall (B) aber betrachten wir noch ein beliebiges Element c von H, und gewinnen aus (5), daß

$$ca = c(\gamma\delta)a$$

ist; daraus folgt

$$c = c(\gamma\delta)$$

wegen der Kürzungsregel. Ist also $\gamma\delta$ kein leeres Symbol, so ist es das Einselement von H und deshalb ist es unzerlegbar; folglich ist mindestens eines der Symbole γ und δ das Einselement. Das bedeutet aber nach (4), daß auch in diesem Fall $a = b$ ist.

Zusammenfassend haben wir das Resultat erhalten, daß aus $a \dashv b$ und $b \dashv a$ in beiden Fällen $a = b$ folgt. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *In jeder Nilhalbgruppe ist die Relation $\dashv$ antisymmetrisch.*

Beweis. Nehmen wir an, daß für die Elemente a, b einer Nilhalbgruppe $a \dashv b$ und $b \dashv a$ gleichzeitig gelten. Nach (2) kann man dann

$$a = \sigma b \tau \quad \text{und} \quad b = \xi a \eta \tag{6}$$

schreiben, woraus sich sofort

$$a = (\sigma\xi)a(\eta\tau) \quad \text{und} \quad b = (\xi\sigma)b(\tau\eta)$$

ergeben. Es ist nicht schwer durch vollständige Induktion zu zeigen, daß dann auch die allgemeinere Formeln

$$a = (\sigma\xi)^n a(\eta\tau)^n \quad \text{und} \quad b = (\xi\sigma)^n b(\tau\eta)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{7}$$

gültig sind. Sind jetzt $\sigma\xi$ und $\eta\tau$ beide leere Symbole, so ergibt sich $a=b$ aus (6). Ist aber mindestens eines von $\sigma\xi$ und $\eta\tau$ ein Element von H, so kann man n so groß wählen, daß die n-te Potenz dieses Elementes schon gleich 0 ist; dann ergibt sich $a=0$ und auf dem gleichem Weg wegen $(\xi\sigma)^{n+1}=\xi(\sigma\xi)^n\sigma$ auch $b=0$ aus (7), so daß auch in diesem Fall $a=b$ sein muß. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Dem Beweis kann man die folgende allgemeinere, aber komplizierte Bedingung entnehmen: Gibt es in einer Halbgruppe H kein Element $a(\neq 0)$, für das das unendliche Gleichungssystem

$$a=\sigma^n a\tau^n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

so gelöst werden kann, daß mindestens eines der Symbole σ, τ ein Element von H ist, dann ist die Relation $\dashv$ in H antisymmetrisch.

(Eingegangen am 5. September 1964.)