Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des modifizierten Fourierschen Integrals

Von JOSEF MATUŠŮ (Prag)

1. Einführung

In diesem Aufsatz werden speziell die zwei nachstehend angeführten Integrale betrachtet:

$$D(t) = \int_0^d \frac{f(t+x)+f(t-x)-2B}{x}\,dx, \tag{1.1}$$

$$F(t) = K\int_0^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'\{y(x-t)\}\,dx\Big)\,dy. \tag{1.2}$$

In (1. 1) ist $0<d<+\infty$, $B\in E_1$ und das Integral wird im weiteren als Dinisches Integral der Funktion f (im Punkte $t\in E_1$) bezeichnet. Das Integral in (1. 2) geht für $K=1/\pi$ und $g(t)=\sin t$ in das wohlbekannte Fouriersche Integral der Funktion f (im Punkte $t\in E_1$) über ($g'(t)=dg(t)/dt$). Wir wollen deshalb (1. 2) schlechthin als modifiziertes Fouriersches Integral der Funktion f (im Punkte $t\in E_1$) bezeichnen.

In einer früher erschienenen Arbeit (sieh [1]) wurde das Dinische Integral im Zusammenhang mit der Frage der Konvergenz des Fourierschen Integrals untersucht. Dort wurde gezeigt, dass zu jedem $t\in E_1$ immer unendlich viele Funktionen f existieren, für die jeweils der Fall I oder Fall II zutrifft, wobei folgendes gilt: 1° Das Dinische Integral ist ein konvergentes verallgemeinertes Integral mit der „unangenehmen" Integrationsgrenze Null, aber kein Lebesguesches Integral. 2° Das Fouriersche Integral der Funktion f divergiert im Punkte $t\in E_1$. Zum Schluss des Aufsatzes wird gezeigt, dass ein analoges Resultat auch für einen Fall des modifizierten Fourierschen Integrals abgeleitet werden kann.

2. Zwei Hilfssätze

Unter dem Begriff „Funktion" verstehen wir hier immer eine reelle Funktion mit reeller Variablen. Das Integral wird im Lebesgueschen Sinne aufgefasst. Neben den konvergenten Lebesgueschen Integralen, d. h. den sog. absolut konvergenten Integralen, werden wir auch nicht absolut konvergente Integrale benötigen; ein jedes solches Integral wird im weiteren als ein konvergentes verallgemeinertes Integral bezeichnet. Ohne es immer anzuführen, wollen wir an dieser Stelle vereinbaren, daß mit A eine stetige Variable bezeichnet wird, deren Werte stets endlich und positiv sind.

Wir werden zwei Fälle betrachten (siehe Abs. 1). Fall I: f ist summierbar im Intervall $(-\infty, +\infty)$, d. h. $f \in L(-\infty, +\infty)$. Fall II: $f \in L(-h', h')$ für jedes $h' \in (0, +\infty)$; ferner gilt $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ und es existiert eine endliche und positive Zahl h, so daß f in den beiden Intervallen $(-\infty, -h\rangle$ und $\langle h, +\infty)$ von beschränkter Variation ist.

Abschliessend seien die folgenden Hilfssätze angeführt, die in [2] bewiesen sind:

Hilfssatz 2. 1. *Sei $0 < h < +\infty$, $z \in E_1$. Die Funktion f sei im Intervall $\langle h, +\infty)$ von beschränkter Variation, ferner sei $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Es sei $g \in L(a, b)$ im Bereich $T(|a| < +\infty, a \leqq b < +\infty)$ und es existiere eine endliche Zahl $S > 0$, so daß $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqq S$ in T. Dann konvergiert das verallgemeinerte Integral $\int_h^{+\infty} f(t) g\{A(t-z)\}\,dt$ (sogar gleichmäßig bezüglich $A \geqq A_0 > 0$, wobei A_0 eine beliebig fest gewählte Zahl bedeutet).*

Hilfssatz 2. 2. *Für die Funktion f bestehe einer von den Fällen I, II. Sei $z \in E_1$ und die Funktion g sei in E_1 beschränkt. Es existiere ferner eine endliche Zahl $S > 0$ derart, dass $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqq S$ im Bereich $(|a| < +\infty, a \leqq b < +\infty)$. Dann gilt*

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^b f(t) g\{A(t-z)\}\,dt = 0 \tag{2. 1}$$

im Bereich $U(|a| \leqq +\infty, a \leqq b \leqq +\infty)$ (in den Fällen $-\infty = a < b < +\infty$, $-\infty < a < b = +\infty$, $-\infty = a < b = +\infty$ handelt es sich in (2. 1) eventuell um ein konvergentes verallgemeinertes Integral).

3. Die Integrale $F_A(t)$, $F(t)$

Für die Funktion f möge einer von den Fällen I, II bestehen. Bezüglich der Funktion g wollen wir voraussetzen, daß sie 1° stetig, beschränkt und ungerade in E_1 ist und dass 2° ihre Ableitung g' daselbst existiert, stetig und beschränkt ist. Wir sagen dann, daß für g der Fall P_{12} zutrifft. Existiert ferner 3° eine endliche Zahl $S > 0$ derart, daß $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqq S$ im Bereich $(|a| < +\infty, a \leqq b < +\infty)$, so bringen wir dies zum Ausdruck, daß für g der Fall P_{123} zutrifft.

Es gilt $\lim_{t \to 0} \{g(t)/t\} = \lim_{t \to 0} g'(t) = g'(0)$. Der Punkt $t = 0$ ist somit kein „unangenehmer" Punkt der Funktion $g(t)/t$. Im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ ist $g(t)/t$ beschränkt. Die Funktion g ist beschränkt im Intervall $(1, +\infty)$ und deshalb ist hier umsomehr auch die Funktion $g(t)/t$ beschränkt. Es existiert dann eine endliche Zahl $C > 0$ derart, daß $|g(t)/t| \leqq C$ im Intervall $\langle 0, +\infty)$, d. h. $|g(t)| \leqq C|t|$ (sogar für alle $t \in E_1$).

Die Ungleichung $\left|\int\limits_a^b g(t)\,dt\right| \leqq S$ (im Bereich $(|a| < +\infty,\ a \leqq b < +\infty)$) bewirkt die Konvergenz des verallgemeinerten Integrals $\int\limits_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt$ (sieh [2]); R bezeichne den Wert dieses Integrals.

Sei nun $t \in E_1$. Betrachten wir das Integral

$$F_A(t) = K \int\limits_0^A \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) g'\{y(x-t)\}\,dx \Big)\,dy \tag{3. 1}$$

(dasselbe $K \neq 0$ wie im Integral (1. 2)). Für f möge der Fall I und für g der Fall P_{12} bestehen. Das innere Integral in (3. 1) ist offenbar ein konvergentes Lebesguesches Integral, das eine stetige (und endliche) Funktion der Variablen y im Intervall $\langle 0, A\rangle$ darstellt. Dann ist auch das äussere Integral in (3. 1) ein konvergentes Lebesguesches Integral. Ferner gilt

$$\iint\limits_{\substack{y \in \langle 0,\, A\rangle \\ x \in E_1}} |f(x) g'\{y(x-t)\}|\,dx\,dy \leqq mA \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

wobei m die obere Grenze von $|g'|$ in E_1 bedeutet. Man kann deshalb den Satz von Fubini anwenden:

$$F_A(t) = K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_0^A f(x) g'\{y(x-t)\}\,dy \Big)\,dx = K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{g\{A(x-t)\}}{x-t}\,dx =$$
$$= K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t+x) \frac{g(Ax)}{x}\,dx.$$

Für f möge nun der Fall II und für g der Fall P_{12} bestehen. Es gilt $\left|\int\limits_a^b g'(t)\,dt\right| = |g(b) - g(a)| \leqq 2\tilde{m}$ im Bereich $(|a| < +\infty,\ a \leqq b < +\infty)$, wobei $\tilde{m}$ die obere Grenze von $|g|$ in E_1 bedeutet. Dann konvergiert das verallgemeinerte Integral $\int\limits_h^{+\infty} f(x) g'\{y(x-t)\}\,dx$ (sieh Hilfssatz 2. 1); offenbar konvergiert auch das verallgemeinerte Integral $\int\limits_{-\infty}^{-h}$ und ebenfalls das (Lebesguesche) Integral $\int\limits_{-h}^{h}$. Daraus folgt, daß das innere Integral in (3. 1) ein konvergentes verallgemeinertes Integral darstellt.

Für die Funktion f möge jetzt der Fall II und für die Funktion g der Fall P_{123} bestehen. Im Intervall $\langle a, A\rangle$, wobei $0 < a < A$, ist die Funktion $H(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) g'\{y(x-t)\}\,dx$ stetig (und daher beschränkt). Das Integral $F_{A,a}(t) = K \int\limits_a^A H(y)\,dy =$

$=K\int\limits_a^A\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)g'\{y(x-t)\}dx\Big)dy$ ist dann ein konvergentes Lebesguesches Integral. Man kann nun beweisen (sieh [2]), daß $\lim\limits_{a\to 0+}F_{A,a}(t)$ als endlicher Grenzwert existiert. Das bedeutet, daß auch das äussere Integral in (3. 1) eventuell ein konvergentes verallgemeinertes Integral darstellt.

Wenn also für f der Fall I (II) und für g der Fall P_{12} (P_{123}) zutrifft, so ist das Integral (3. 1) immer konvergent (entweder wie ein Lebesguesches oder wie ein verallgemeinertes Integral). Sein Wert ist in beiden Fällen

$$F_A(t)=K\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t+x)\frac{g(Ax)}{x}\,dx \tag{3. 2}$$

(sieh [2]). Auch das Integral in (3. 2) ist eventuell ein konvergentes verallgemeinertes Integral.

Wir können (3. 2) in der Form $F_A(t)=\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{0}^{+\infty}$ schreiben. Aus dem Satz über die Integration durch Substitution für das Lebesguesche bzw. konvergente verallgemeinerte Integral folgt nun $\int\limits_{-\infty}^{0}=\int\limits_{0}^{+\infty}f(t-x)\,\frac{g(Ax)}{x}\,dx$. Es wird dann

$$F_A(t)=K\int\limits_{0}^{+\infty}\{f(t+x)+f(t-x)\}\,\frac{g(Ax)}{x}\,dx. \tag{3. 3}$$

Wir beweisen nun die folgenden zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 3. 1. *Sei $a\in E_1$. Die Funktion g sei endlich, nicht negativ und monoton abnehmend im Intervall $\langle a,+\infty)$. Ferner sei $f\in L(a,b')$ für jedes $b'\in(a,+\infty)$ und das verallgemeinerte Integral $\int\limits_a^{+\infty}f(t)\,dt$ konvergent. Es existiert dann eine Zahl $w\in\langle a,+\infty\rangle$ derart, daß*

$$\int\limits_a^{+\infty}f(t)g(t)\,dt=g(a)\int\limits_a^{w}f(t)\,dt. \tag{3. 4}$$

Beweis. Erstens konvergiert das verallgemeinerte Integral $\int\limits_a^{+\infty}f(t)g(t)\,dt$. Dies folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz in [1] (die dortige Voraussetzung, daß die Funktion g monoton wachsend ist, kann ohneweiters durch die Voraussetzung, daß g monoton abnimmt, ersetzt werden). Für jedes natürliche $n>a$ ist ferner $f\in L(a,n)$, die Funktion g wieder endlich, nicht negativ und monoton abnehmend im Intervall $\langle a,n\rangle$. Auf Grund des Mittelwertsatzes gilt dann

$$\int\limits_a^{n}f(t)g(t)\,dt=g(a)\int\limits_a^{w_n}f(t)\,dt, \tag{3. 5}$$

wobei $a \leqq w_n \leqq n$. Es soll nun $n \to +\infty$ streben. Ist dann w irgendein Häufungspunkt der Folge $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ (eventuell $w = +\infty$), so existiert eine Teilfolge $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ derart, daß $\lim\limits_{k\to+\infty} w_{n_k} = w$, worauf (sieh (3.5))

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,dt = \lim_{k\to+\infty} \int_a^{w_{n_k}} f(t)g(t)\,dt = g(a) \lim_{k\to+\infty} \int_a^{w_{n_k}} f(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Die Funktion $H(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ ist stetig im Punkte w (unter der Stetigkeit im Punkte $w = +\infty$ verstehen wir, daß $\lim\limits_{t\to+\infty} H(t) = H(+\infty) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$). Aus (3. 6) folgt dann unmittelbar die Gültigkeit der Beziehung (3. 4).

Hilfssatz 3. 2. *Für die Funktion f möge einer von den Fällen I,II, und für die Funktion g der Fall P_{123}, bestehen. Sei $0 < d < +\infty$ und*

$$F_A(t, d) = K \int_0^d \{f(t+x) + f(t-x)\} \frac{g(Ax)}{x}\,dx \tag{3.7}$$

(dasselbe $K \neq 0$ wie in (3. 1)). Es gilt dann

$$\lim_{A\to+\infty} (F_A(t) - F_A(t, d)) = 0. \tag{3.8}$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $p_t(x) = f(t+x) - f(t-x)$. Es wird dann

$$F_A(t) - F_A(t, d) = K \int_d^{+\infty} p_t(x) \frac{g(Ax)}{x}\,dx; \tag{3.9}$$

das Integral $\int_d^{+\infty} p_t(x) g(Ax)\,dx$ ist eventuell ein konvergentes verallgemeinertes Integral (sieh die nächstfolgende Bemerkung). Die Funktion $1/x$ ist im Intervall $\langle d, +\infty)$ endlich, nicht negativ und monoton abnehmend. Auf Grund des Hilfssatzes 3. 1 existiert dann eine Zahl $w \in \langle d, +\infty\rangle$ derart, daß (sieh (3. 9))

$$F_A(t) - F_A(t, d) = \frac{K}{d} \int_d^w p_t(x) g(Ax)\,dx. \tag{3.10}$$

Durch Substitution ergibt sich

$$\int_d^w f(t+x) g(Ax)\,dx = \int_{t+d}^{t+w} f(y) g\{A(y-t)\}\,dy, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \int_d^w f(t-x) g(Ax)\,dx &= -\int_{t-d}^{t-w} f(y) g\{A(t-y)\}\,dy = \\ &= \int_{t-d}^{t-w} f(y) g\{A(y-t)\}\,dy. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bei Benützung des Hilfssatzes 2. 2 folgt dann aus (3. 11), (3. 12), daß

$$(3.\,13)\qquad \lim_{A\to+\infty}\int_{d}^{w} f(t+x)g(Ax)\,dx = 0 = \lim_{A\to+\infty}\int_{d}^{w} f(t-x)g(Ax)\,dx.$$

Aus (3. 10), (3. 11), (3. 12) und (3. 13) folgt schließlich die Gültigkeit der Beziehung (3. 8).

Bemerkung. Für f bestehe der Fall II, für g mögen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. 1 erfüllt sein. In den Intervallen $\langle h, +\infty)$ und $(-\infty, -h\rangle$ ist f von beschränkter Variation ($0<h<+\infty$). Sei $t\in E_1$. Die Funktion $f(t+x)$ der Variablen x ist dann im Intervall $\langle h-t, +\infty)$ von beschränkter Variation, die Funktion $f(t-x)$ derselben Variablen ist von beschränkter Variation im Intervall $\langle h+t, +\infty)$. Ist nun das endliche $\tilde{h}\geqq \operatorname{Max}(|h-t|, |h+t|)$(d. h. $0<\tilde{h}<+\infty$), so wird $p_t(x)= =f(t+x)+f(t-x)$ zu einer Funktion, die im Intervall $\langle \tilde{h}, +\infty)$ von beschränkter Variation ist. Ferner gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} p_t(x)=0$. Das Integral $\int_{\tilde{h}}^{+\infty} p_t(x)g(Ax)\,dx$ ist dann ein konvergentes verallgemeinertes Integral (sieh den Hilfssatz 2. 1 für $z=0$). Sei $0<d<+\infty$. Offenbar konvergiert auch das verallgemeinerte Integral $\int_{d}^{+\infty} p_t(x)g(Ax)\,dx$.

Wieder sei $t\in E_1$. Zum Schluß dieses Absatzes muß noch die Frage der Konvergenz des modifizierten Fourierschen Integrals (sieh (1. 2)) geklärt werden:

$$(3.\,14)\qquad F(t) = K\int_{0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'\{y(x-t)\}\,dx\Big)\,dy.$$

Wir werden voraussetzen, daß für f der Fall I (II) und für g der Fall P_{12} (P_{123}) zutrifft. Das Integral (3. 14) konvergiert (wie ein Lebesguesches oder wie ein verallgemeinertes Integral) dann und nur dann, wenn $\lim\limits_{A\to+\infty} F_A(t)$ als endlicher Grenzwert existiert, worauf dann

$$(3.\,15)\qquad F(t) = \lim_{A\to+\infty} F_A(t).$$

4. Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des Fourierschen Integrals

Wir beginnen mit folgendem

Hilfssatz 4. 1. *Für die Funktion f möge einer von den Fällen I, II, und für die Funktion g der Fall P_{123} ($R\neq 0$), bestehen. Konvergiert dann das Dinische Integral* (1. 1) *im Punkte $t\in E_1$ wie ein Lebesguesches, so konvergiert in diesem Punkte auch das modifizierte Fouriersche Integral* (1. 2) *für $K=1/2R$ und sein Wert ist gleich B.*

Beweis. Es gilt (sieh (3. 7) für $K=1/2R$)

$$F_A(t, d)-B\frac{1}{R}\int_0^d \frac{g(Ax)}{x}\,dx=$$

$$(4.\ 1)\qquad =\frac{1}{2R}\int_0^d \{f(t+x)+f(t-x)\}\frac{g(Ax)}{x}\,dx-B\frac{1}{R}\int_0^d \frac{g(Ax)}{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2R}\int_0^d \frac{f(t+x)+f(t-x)-2B}{x}\,g(Ax)\,dx.$$

Aus (4. 1) ergibt sich (man kann den Hilfssatz 2. 2 zweckmässig anwenden), daß

$$(4.\ 2)\qquad \lim_{A\to+\infty}\left(F_A(t, d)-B\frac{1}{R}\int_0^d \frac{g(Ax)}{x}\,dx\right)=0.$$

Bei Benützung von (3. 8) folgt dann aus (4. 2) (sieh noch (3. 15)), daß

$$\lim_{A\to+\infty} F_A(t)=B\frac{1}{R}\lim_{A\to+\infty}\int_0^d \frac{g(Ax)}{x}\,dx=B=F(t),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Im nächstfolgenden befassen wir uns mit einem Spezialfall des Integrals $F(t)$: $K=1/\pi$, $g(t)=\sin t$, d. h. mit dem klassischen Fourierschen Integral. In diesem Zusammenhang sieh speziell den Abs. 2 in [1].

Nach dem Riemann—Lebesgueschen Hilfssatz gilt bekanntlich

$$(4.\ 3)\qquad \lim_{A\to+\infty}\int_0^b f(t)\sin At\,dt=0$$

immer dann, wenn $f\in L(0, b)$, b z. B. positiv. Wir wollen nun annehmen, daß $f\notin L(0, b)$, aber das Integral $\int_0^b f(t)\,dt$ (mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze) soll wie ein verallgemeinertes Integral konvergieren. Es fragt sich, ob auch in einem solchen Fall die Gleichung (4. 3) gilt.

Zu diesem Zweck konstruieren wir nun ein Beispiel, das uns das Gegenteil zeigen wird. Die Konstruktion dieses Beispiels verläuft zwar ähnlich wie in [1], trotzdem aber sind hier einige Abweichungen zu verzeichnen. Aus diesem Grund führen wir die Konstruktion zur Gänze durch.

Es sei bemerkt, daß schon früher von Titchmarsh (sieh [4], S. 19—20) ein sehr einfaches Beispiel dieser Art konstruiert wurde. Wenn hier jetzt ein anderes Beispiel angeführt wird, so geschieht dies deswegen, weil sich die Endresultate dieser Beispiele qualitativ unterscheiden.

Beispiel. Sei s eine natürliche Zahl. Es wird eine Funktion $f \notin L(0, 4\pi es)$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert: 1° Das verallgemeinerte Integral $\int_0^{4\pi es} f(t)\,dt$ mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze Null konvergiert. 2° Die Gleichung (4. 3) ist ungültig (für $b = 4\pi es$).

KONSTRUKTION. Es sei $d_n = 4\pi s/(n-1)!$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ferner sei $s_n = 4\pi es - \sum_{i=1}^{n} d_i = 4\pi es - r_n$ $(n = 0, 1, \ldots$, d. h. $s_0 = 4\pi es$, $r_0 = 0)$. Im Intervall $\langle s_n, s_{n-1}\rangle$ sei $f(t) = (n-1)! \sin\{n!(4\pi es - t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Es ist $f(s_n) = (n-1)! \sin\{n! r_n\} = (n-1)! \sin\{n![4m\pi s/(n-1)!]\} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots, m$ ganzzahlig). Da auch $f(s_0) = f(4\pi es) = 0$, so ist $f(s_n) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Die Funktion f ist also stetig im Intervall $(0, 4\pi es\rangle$ (es ist nämlich $\lim_{n \to +\infty} s_n = 4\pi es - r_\infty = 4\pi es - 4\pi s(1 + 1/1! + 1/2! + \ldots) = 4\pi es - 4\pi es = 0$).

Wir setzen $G(t) = \int_t^{4\pi es} f(x)\,dx$, $0 < t \leqq 4\pi es$. Für ein gewisses $n = 1, 2, \ldots$ sei $s_n < t \leqq s_{n-1}$ (bei fest gewähltem t). Es ist dann für $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{s_k}^{s_{k-1}} f(t)\,dt = \int_{s_k}^{s_{k-1}} (k-1)! \sin\{k!(4\pi es - t)\}\,dt = \int_{4\pi es - s_{k-1}}^{4\pi es - s_k} (k-1)! \sin(k!\,x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{k}\cos(k!\,x)\right]_{r_{k-1}}^{r_k} = \frac{1}{k}\{\cos(k!\,r_{k-1}) - \cos(k!\,r_k)\} =$$

$$= \frac{2}{k}\sin\left\{\frac{k!}{2}(r_k + r_{k-1})\right\} \cdot \sin\left\{\frac{k!}{2}(r_k - r_{k-1})\right\} =$$

$$= \frac{2}{k}\sin\left\{\frac{k!}{2}(r_k + r_{k-1})\right\} \cdot \sin\left(\frac{k!}{2} d_k\right) = 0,$$

so dass

$$G(t) = \int_t^{4\pi es} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k-1}} + \int_t^{s_{n-1}} = \int_t^{s_{n-1}} f(x)\,dx =$$

$$= \int_t^{s_{n-1}} (n-1)! \sin n!(4\pi es - x)\,dx = \int_{4\pi es - s_{n-1}}^{4\pi es - t} (n-1)! \sin(n!\,y)\,dy =$$

$$= \left[-\frac{1}{n}\cos(n!\,y)\right]_{r_{n-1}}^{4\pi es - t} = \frac{1}{n}\{\cos(n!\,r_{n-1}) - \cos[n!(4\pi es - t)]\},$$

d. h.

$$|G(t)| \leqq \frac{2}{n}. \tag{4. 4}$$

Aus (4. 4) folgt dann

$$\lim_{t\to 0+} G(t) = 0. \tag{4. 5}$$

Das verallgemeinerte Integral $\int_0^{4\pi es} f(x)dx$ ist also konvergent und sein Wert ist gleich Null. Weiter unten wird gezeigt werden, daß dieses Integral kein Lebesguesches ist.

Für $n > 3$ folgt auf Grund der bekannten Restabschätzung der Reihe für die Zahl e, daß

$$r_\infty - r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{4\pi s}{i!} = \tag{4. 6}$$

$$= 4\pi s\left[e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\right)\right] \leqq \frac{4\pi s}{(n-1)(n-1)!}.$$

Wir betrachten weiter das Integral $\int_0^{s_n} f(t) \sin(qwVn!t)\,dt$, $n \geqq 0$, $w > 0$, wobei $q \geqq s$ eine natürliche Zahl bedeutet und V entweder gleich $1/sw$ oder $1/2sw$ ist. Sei $c \in (0, s_n\rangle$. Im Intervall $\langle c, s_n\rangle$ kann die partielle Integration angewendet werden:

$$\int_c^{s_n} f(t) \sin(qw\,Vn!\,t)\,dt = (u = \sin(qw\,Vn!\,t), \quad v' = f(t);$$

$$u' = qw\,Vn! \cos(qw\,Vn!\,t), \tag{4. 7}$$

$$v = -\int_t^{4\pi es} f(x)\,dx = -G(t)) = [-G(t)\sin(qw\,Vn!\,t)]_c^{s_n} +$$

$$+ \int_c^{s_n} G(t)qw\,Vn! \cos(qw\,Vn!\,t)\,dt.$$

Wir haben bewiesen (sieh den Hilfssatz in [1] und den darauf folgenden Text), daß das verallgemeinerte Integral $\int_0^{s_n} f(t) \sin(qwVn!t)\,dt$ konvergiert. Es existiert dann der endliche Grenzwert $\lim_{c\to 0+} \int_c^{s_n} f(t) \sin(qwVn!t)\,dt = \int_0^{s_n} f(t) \sin(qwVn!t)\,dt$. Da aber auch der Grenzwert $\lim_{c\to 0+} [-G(t)\sin(qwVn!t)]_c^{s_n} = -G(s_n)\sin(qwVn!s_n)$ (sieh (4. 5)) endlich ist, so folgt aus (4. 7), daß auch $\int_0^{s_n} G(t)qwVn! \cos(qwVn!t)\,dt$

ein konvergentes verallgemeinertes Integral ist und daß die Beziehung

(4. 8)
$$\int_0^{s_n} f(t) \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt = -G(s_n) \sin (qw\, Vn!\, s_n) + \int_0^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos (qw\, Vn!\, t)\, dt$$

gilt. Wir setzen

$$I_n = -G(s_n) \sin (qw Vn! s_n), \tag{4. 9}$$

$$J_n = \int_0^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos (qw\, Vn!\, t)\, dt. \tag{4. 10}$$

Es ist $|I_n| \leqq |G(s_n)|$; da noch $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 0+$, so folgt aus dieser Ungleichung und aus (4. 5), daß

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0. \tag{4. 11}$$

Ist $c \in (0, s_n\rangle$, so ist $\int\limits_c^{s_n} G(t) qw Vn! \cos (qw Vn! t) dt$ ein konvergentes Lebesguesches Integral. Aus (4. 4) folgt $|G(t)| \leqq 2/(n+1)$ für $t \in (s_{n+1}, s_n\rangle$. Diese Ungleichung bleibt offensichtlich auch für alle $t \in \langle c, s_n\rangle$ erhalten. Es wird dann

$$\left| \int_c^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos (qw\, Vn!\, t)\, dt \right| \leqq \frac{2qw\, Vn!}{n+1} (s_n - c). \tag{4. 12}$$

Für $n > 3$ folgt dann durch Grenzübergang aus (4. 12) (bei Benützung von (4. 6))

$$|J_n| = \left| \lim_{c \to 0^+} \int_c^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos (qw\, Vn!\, t)\, dt \right| \leqq \frac{2qw\, Vn!}{n+1} s_n =$$

$$= \frac{2qw\, Vn!}{n+1} (4\pi es - r_n) = \frac{2qw\, Vn!}{n+1} (r_\infty - r_n) \leqq \tag{4. 13}$$

$$\leqq \frac{2qw\, Vn!}{n+1} \frac{4\pi s}{(n-1)(n-1)!} \leqq \frac{2qw\, Vn!}{n} \frac{4\pi s}{(n-1)(n-1)!} = \frac{8qw\, V\pi s}{n-1}.$$

Aus (4. 13) folgt dann

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = 0. \tag{4. 14}$$

Weiter sei

$$L_n = \int_{s_{n-1}}^{4\pi es} f(t) \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt. \tag{4. 15}$$

Für $n > 2$ ist dann

$$L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k-1}} (k-1)! \sin \{k!(4\pi es - t)\} \cdot \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt =$$

$$(4.16) \qquad = \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)! \sin (k!\, 4\pi es) \int_{s_k}^{s_{k-1}} \cos (k!\, t) \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)! \cos (k!\, 4\pi es) \int_{s_k}^{s_{k-1}} \sin (k!\, t) \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt.$$

Wir setzen

$$(4.17) \qquad M_k = \int_{s_k}^{s_{k-1}} \cos (k!\, t) \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt, \quad N_k = \int_{s_k}^{s_{k-1}} \sin (k!\, t) \sin (qw\, Vn!\, t)\, dt.$$

Es wird dann $(j = \sqrt{-1})$

$$M_k + jN_k = \int_{s_k}^{s_{k-1}} \sin (qw\, Vn!\, t) e^{jk!t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\int_{s_k}^{s_{k-1}} e^{j(qw\, Vn! + k!)t}\, dt - \int_{s_k}^{s_{k-1}} e^{-j(qw\, Vn! - k!)t}\, dt \right) =$$

$$(4.18) \qquad = \frac{1}{2(qw\, Vn! + k!)} [e^{j(qw\, Vn! + k!)s_k} - e^{j(qw\, Vn! + k!)s_{k-1}}] +$$

$$+ \frac{1}{2(qw\, Vn! - k!)} [e^{-j(qw\, Vn! - k!)s_k} - e^{-j(qw\, Vn! - k!)s_{k-1}}].$$

Mit $s_{k-1} - s_k = d_k = 4\pi s/(n-1)!$ geht (4. 18) in

$$M_k + jN_k = \frac{1}{2(qw\, Vn! + k!)} e^{j(qw\, Vn! + k!)s_k} (1 - e^{j(qw\, Vn! + k!)d_k}) +$$

$$(4.19) \qquad + \frac{1}{2(qw\, Vn! - k!)} e^{-j(qw\, Vn! - k!)s_k} (1 - e^{-j(qw\, Vn! - k!)d_k})$$

über. Wird noch

$$(qw\, Vn! \pm k!) d_k = \frac{qw\, Vn! \pm k!}{(n-1)!} 4\pi s = \begin{cases} 4p\pi & \text{für} \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ 2r\pi & \text{für} \quad V = \dfrac{1}{2sw} \end{cases}$$

berücksichtigt (p, r ganzzahlig), so folgt aus (4. 19), daß $M_k + jN_k = 0$, d. h. $M_k = N_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Aus (4. 18), (4. 19) folgt dann $(n > 2)$

$$(4.20) \qquad L_n = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n \to +\infty} L_n = 0.$$

Schließlich ist für $n \geqq 1$

$$K_n = \int_{s_n}^{s_{n-1}} f(t) \sin (qw Vn!\, t)\, dt =$$

$$= \int_{s_n}^{s_{n-1}} (n-1)! \sin \{n!(4\pi es - t)\} \cdot \sin (qw Vn!\, t)\, dt =$$

(4. 21)

$$= (n-1)! \sin (n!\, 4\pi es) \int_{s_n}^{s_{n-1}} \cos (n!\, t) \sin (qw Vn!\, t)\, dt -$$

$$-(n-1)! \cos (n!\, 4\pi es) \int_{s_n}^{s_{n-1}} \sin (n!\, t) \sin (qw Vn!\, t)\, dt.$$

Durch einfache Rechnung, bei der mit Vorteil der Vorgang zur Berechnung der Integrale (4. 17) angewendet werden kann, wird bestätigt, daß

$$\tag{4. 22} K_n = \begin{cases} -2\pi s \cos (n!\, 4\pi es) & \text{für} \quad q = s, \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ 0 & \text{für} \quad q > s, \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ 0 & \text{für} \quad q \geqq s, \quad V = \dfrac{1}{2sw}. \end{cases}$$

Aus (4. 8), (4. 9), (4. 10), (4. 15), (4. 21) und (4. 22) folgt dann für $n > 2$

$$\int_0^{4\pi es} f(t) \sin (qw Vn!\, t)\, dt = \int_0^{s_n} + \int_{s_n}^{s_{n-1}} + \int_{s_{n-1}}^{4\pi es} =$$

(4. 23)

$$= I_n + J_n + K_n + L_n = \begin{cases} I_n + J_n + L_n - 2\pi s \cos (n!\, 4\pi es) & \text{für} \quad q = s, \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ I_n + J_n + L_n & \text{für} \quad q > s, \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ I_n + J_n + L_n & \text{für} \quad q \geqq s, \quad V = \dfrac{1}{2sw}. \end{cases}$$

Betrachten wir den Fall $q = s$, $V = 1/sw$ näher. Es ist $e = \sum_{i=0}^{n} 1/i! + \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/i!$ und deshalb $n! 4\pi es = 4\pi sn! \sum_{i=0}^{\infty} 1/i! + 4\pi sn! \sum_{i=n+1}^{n} 1/i! = 4\pi s A_n + 4\pi s B_n$, $A_n = n! \sum_{i=0}^{n} 1/i!$ ganzzahlig, $0 < B_n = n! \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/i! \leqq n!/n \cdot n! = 1/n$ (hier wurde wieder die Restabschätzung der Reihe für die Zahl e benützt). Dann wird $\lim_{n \to +\infty} B_n = 0$ und aus $\cos (4\pi s A_n + 4\pi s B_n) = \cos (4\pi s A_n) \cdot \cos (4\pi s B_n) - \sin (4\pi s A_n) \cdot \sin (4\pi s B_n) = \cos (4\pi s B_n)$ folgt durch

Grenzübergang $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n!4\pi es)=1$. Aus (4. 11), (4. 14), (4. 20) und (4. 23) folgt schließlich

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{4\pi es} f(t)\sin(qwVn!\,t)\,dt=\begin{cases}-2\pi s & \text{für}\quad q=s,\quad V=\dfrac{1}{sw},\\[2mm] 0 & \text{für}\quad q>s,\quad V=\dfrac{1}{sw},\\[2mm] 0 & \text{für}\quad q\geqq s,\quad V=\dfrac{1}{2sw}.\end{cases}\tag{4. 24}$$

Mit (4. 24) haben wir bewiesen, daß es weder einen endlichen noch einen unendlichen Grenzwert der Funktion $\int\limits_0^{4\pi es} f(t)\sin At\,dt$ für $A\to+\infty$ gibt. Zugleich ist damit bewiesen, daß in diesem Fall die Gleichung (4. 3) nicht gilt. Jetzt ist auch klar, warum $\int\limits_0^{4\pi es} f(t)\,dt$ kein konvergentes Lebesguesches Integral ist.

Bei Benützung des oben konstruierten Beispiels kann ähnlich wie in [1] gezeigt werden (hier sind die Abweichungen von dem in [1] durchgeführten Beweis leicht zu übersehen), daß folgendes gilt:

Folgerung. *Sei f die Funktion, deren Existenz durch das oben konstruierte Beispiel bewiesen wurde. Wird $f_1\equiv f$ gesetzt, dann ist das Integral $\int\limits_0^{4\pi es} xf_1(x)\,dx$ ein konvergentes Lebesguesches Integral.*

Im Hilfssatz 4. 1 wurde das Dinische Integral wie ein konvergentes Lebesguesches Integral aufgefaßt. Darüber hinaus wollen wir nun voraussetzen, daß es kein Lebesguesches Integral ist, sondern ein konvergentes verallgemeinertes Integral mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze Null. Durch dieselbe Konstruktion wie im Abs. 3 aus [1], wo nur überall die Zahl $4\pi e$ durch die Zahl $4\pi\, es$ zu ersetzen ist, folgt dann auf Grund des Beispiels, der Folgerung in Abs. 4 und der Hilfssätze 4. 1 und 3. 2, in welchen $d=4\pi es$, $B=f(t)$ und $g(t)=\sin t$, $K=1/\pi$ (d. h. $R=\pi/2$) gesetzt wird, der folgende

Satz I. *Zu jedem $t\in E_1$ existieren immer unendlich viele Funktionen f, für die jeweils der Fall I oder Fall II zutrifft, wobei folgendes gilt:* 1° *Das Dinische Integral* (1. 1) (*z. B. für $d\in(0, 4\pi es\rangle$, $B=f(t)$*) *ist ein konvergentes verallgemeinertes Integral mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze Null, aber kein Lebesguesches Integral.* 2° *Das Fouriersche Integral der Funktion f divergiert im Punkte $t\in E_1$.*

5. Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des modifizierten Fourierschen Integrals

Für die Funktion g möge der Fall P_{123} ($R\neq 0$) bestehen. Ferner sei g periodisch mit der primitiven Periode $T>0$. Die Fourier-Reihe

$$g(t)=\sum_{q=1}^{\infty} b_q \sin qwt \tag{5. 1}$$

der Funktion $g(w=2\pi/T)$, die nach Voraussetzung eine ungerade Funktion ist, konvergiert dann gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall der t-Achse. Sei $g_m(t)$ ($m \geqq 1$ ganzzahlig) die m-te Teilsumme der Reihe (5. 1), ferner sei f die Funktion aus dem Beispiel im Abs. 4. Für jedes $c \in (0, 4es\rangle$ gilt dann

$$\int_c^{4\pi es} f(t) g_m(t)\,dt = \int_c^{4\pi es} \Big(\sum_{q=1}^{m} b_q \sin(qw\,At)\Big)\,dt = $$
$$= \sum_{q=1}^{m} b_q \int_c^{4\pi es} f(t) \sin(qw\,At)\,dt,$$

$$(5.\,2)\quad \int_c^{4\pi es} f(t) g(At)\,dt = \lim_{m\to+\infty} \int_c^{4\pi es} f(t) g_m(At)\,dt = \sum_{q=1}^{\infty} b_q \int_c^{4\pi es} f(t) \sin(qw\,At)\,dt.$$

Offenbar ist $\int\limits_0^{4\pi es} f(t) g(At)\,dt$ ein konvergentes verallgemeinertes Integral. Da nämlich die Funktion $g(At)$ im Intervall $\langle 0, 4\pi es\rangle \supset (0, 4\pi es)$ von beschränkter Variation ist, kann $g(At)$ im Intervall $(0, 4\pi es)$ als Differenz zweier beschränkter und monoton wachsender Funktionen dargestellt werden. Es ist einleuchtend, daß diese Funktionen sogar als nicht negativ im Intervall $(0, 4\pi es)$ gewählt werden können. Auf Grund des Hilfssatzes in [1] folgt dann unmittelbar die Konvergenz des betrachteten verallgemeinerten Integrals. Durch den Grenzübergang $c \to 0+$ folgt dann aus (5. 2)

$$(5.\,3)\qquad \int_0^{4\pi es} f(t) g(At)\;dt \;=\; \lim_{c\to 0+} \Big\{\sum_{q=1}^{\infty} b_q \int_c^{4\pi es} f(t) \sin(qw\,At)\,dt\Big\}.$$

Auch alle Integrale $\int\limits_0^{4\pi es} f(t) \sin(qwAt)\,dt$ $(q=1, 2, \ldots)$ sind konvergente verallgemeinerte Integrale (sieh den Text, welcher dem Hilfssatz in [1] unmittelbar nachfolgt). Es existieren dann die endlichen Grenzwerte $\lim\limits_{c\to 0+} \int\limits_c^{4\pi es} f(t) \sin(qwAt)\,dt = \int\limits_0^{4\pi es}$ $(q=1, 2, \ldots)$. Wir wollen annehmen, daß für $A = Vn!$ (die Zahl V hat dieselbe Bedeutung wie auf Seite 55) der Grenzübergang rechts in (5. 3) unter dem Summenzeichen durchgeführt werden kann:

$$(5.\,4)\qquad \int_0^{4\pi es} f(t) g(Vn!\,t)\,dt = \sum_{q=1}^{\infty} b_q \int_0^{4\pi es} f(t) \sin(qw\,Vn!\,t)\,dt.$$

In der Summe (5. 1) können auch nullwertige Fourier-Koeffizienten b_q auftreten. Nehmen wir an, daß der erste von Null verschiedene Koeffizient mit dem

Index $q=s$ behaftet ist. Es wird dann (sieh (5. 4))

$$\int_0^{4\pi es} f(t)g(Vn!\,t)\,dt = \sum_{q=s}^{\infty} b_q \int_0^{4\pi es} f(t)\sin(qw\,Vn!\,t)\,dt. \tag{5. 5}$$

Aus (5. 5) und aus (4. 23) folgt dann:

$$\int_0^{4\pi es} f(t)g(Vn!\,t)\,dt = \tag{5. 6}$$

$$= \begin{cases} -2\pi s b_s \cos(n!\,4\pi es) + (I_n + J_n + L_n)\,W & \text{für} \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ (I_n + J_n + L_n)\,W & \text{für} \quad V = \dfrac{1}{2sw}, \end{cases}$$

wobei W die Summe der konvergenten Reihe $\sum_{q=s}^{\infty} b_q$ der Fourier-Koeffizienten b_q bedeutet. Aus der Beziehung (5. 6), den Beziehungen (4. 11), (4. 14), (4. 20), ferner auf Grund von $\lim_{n\to+\infty} \cos(n!4\pi es) = 1$ (sieh Seite 59), folgt dann

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{4\pi es} f(t)g(Vn!\,t)\,dt = \begin{cases} -2\pi s b_s & \text{für} \quad V = \dfrac{1}{sw}, \\ 0 & \text{für} \quad V = \dfrac{1}{2sw}. \end{cases} \tag{5. 7}$$

Mit (5. 7) ist bewiesen, daß es weder einen endlichen noch einen unendlichen Grenzwert der Funktion $\int_0^{4\pi es} f(t)g(At)dt$ für $A \to +\infty$ gibt. Dieses Ergebnis ist für die weitere Konstruktion fundamental.

Wir wiederholen nun die Ausführungen aus dem Abs. 3 in [1]. Sei $t \in E_1$. Auf Grund des Satzes I existieren immer unendlich viele Funktionen f, für die jeweils der Fall I oder Fall II zutrifft, und zwar derart, daß das Dinische Integral (1. 1) für $d = 4\pi es$ und $B = f(t)$, d. h.

$$\int_0^{4\pi es} \frac{f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)}{x}\,dx = \int_0^{4\pi es} f_1(x)\,dx, \tag{5. 8}$$

ein konvergentes verallgemeinertes Integral darstellt, das aber kein Lebesguesches Integral ist; in (5. 8) bedeutet f_1 die Funktion aus dem Beispiel im Abs. 4. Es wurde gezeigt (sieh (5. 7) für $f \equiv f_1$), daß es weder einen endlichen noch einen unendlichen Grenzwert der Funktion $\int_0^{4\pi es} f_1(x)g(Ax)dx$ für $A \to +\infty$ gibt. Aus (5. 8) folgt dann, daß weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Funktion

$$\int_0^{4\pi es} \frac{f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)}{x}\,g(Ax)\,dx \tag{5. 9}$$

für $A\to+\infty$ existiert. Im Hilfssatz 4. 1 sei $d=4\pi es$, $B=f(t)$, weiter verfolgen wir die dort aufgestellte Beweisführung. Es folgt dann aus (5. 9), daß weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Differenz (4. 1) für $A\to+\infty$ existieren wird. Wegen $\lim\limits_{A\to+\infty}(1/R)\int\limits_0^{4\pi es}\frac{g(Ax)}{x}dx=1$ erhalten wir noch, daß es weder einen endlichen noch einen unendlichen Grenzwert der Funktion $F_A(t, 4\pi es)$ für $A\to+\infty$ geben wird. Nach (3. 8) gilt $\lim\limits_{A\to+\infty}\big(F_A(t, 4\pi es)-F_A(t)\big)=0$. Daraus folgt dann, daß weder ein endlicher noch ein unendlicher Grenzwert der Funktion $F_A(t)$ für $A\to+\infty$ existieren wird, d. h. das modifizierte Fouriersche Integral (1. 2) (für $K=1/2R$) der betrachteten Funktion f ist im Punkte $t\in E_1$ divergent. Wir können also zusammenfassen: Gilt die Beziehung (5. 4), dann gilt auch der folgende

Satz II. *Für die Funktion g bestehe der Fall P_{123} $(R\neq 0)$, ferner sei g periodisch mit der primitiven Periode $T>0$. Zu jedem $t\in E_1$ existieren immer unendlich viele Funktionen f, für die jeweils der Fall I oder Fall II zutrifft, wobei folgendes gilt: 1° Das Dinische Integral (1. 1) $\big($z. B. für $d\in(0, 4\pi es\rangle$, $B=f(t)\big)$ ist ein konvergentes verallgemeinertes Integral mit der „unangenehmen" unteren Integrationsgrenze Null, aber kein Lebesguesches Integral. 2° Das modifizierte Fouriersche Integral (1. 2) der Funktion f ist für $K=1/2R$ im Punkte $t\in E_1$ divergent.*

Auch die abschließende Bemerkung im Abs. 3 in [1] kann leicht auf den Fall des modifizierten Fourierschen Integrals übertragen werden, d. h., daß im Falle der Perronschen Integration die Existenz des Dinischen Integrals einer gegebenen Funktion f (im Punkte $t\in E_1$) die Existenz des zugehörigen modifizierten Fourierschen Integrals nicht implizieren muß.

Bemerkung 1. Für eine sog. antiperiodische Funktion von der primitiven periode $T>0$ $\big($d. h., daß $g(t+T)=-g(t)$ für alle diejenigen Punkte, in denen beide Seiten der Gleichung sinnvoll sind; jede solche Funktion ist periodisch mit der primitiven Periode $2T\big)$, für die der Fall P_{12} zutrifft, besteht auch der Fall P_{123}. Es ist zu beweisen, daß eine endliche Zahl $S>0$ derart existiert, daß $\left|\int\limits_a^b g(t)\,dt\right|\leqq S$ im Bereich $(|a|<+\infty,\ a\leqq b<+\infty)$.

Sei $c=kT+d$, k ganzzahlig, $0\leqq d<T$. Durch einfache Rechnung wird bestätigt, daß

$$\int\limits_0^c g(t)\,dt=\frac{1-(-1)^k}{2}\int\limits_0^{T\operatorname{sgn}k} g(t)\,dt+(-1)^k\int\limits_0^d g(t)\,dt. \tag{5. 10}$$

Setzen wir $S=4\int\limits_0^T |g(t)|\,dt$, so folgt aus (5. 10)

$$\left|\int\limits_0^c g(t)\,dt\right|\leqq\frac{S}{2}. \tag{5. 11}$$

Es wird dann (sieh (5. 11) für $c=a$ oder $c=b$)

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqq \left|\int_0^b\right| + \left|\int_0^a\right| \leqq \frac{S}{2}+\frac{S}{2} = S$$

im Bereich ($|a|<+\infty$, $a\leqq b<+\infty$).

Bemerkung 2. Sei g eine antiperiodische Funktion mit der Periode $T>0$, für die der Fall P_{12} zutrifft (sieh Bemerkung 1). Bezüglich g setzen wir weiter voraus, daß diese Funktion z. B. nur positive Werte im Intervall $(0, T)$ annimmt. Wir zeigen, daß dann das Integral $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ auch einen positiven Wert R besitzt.

Es gilt $g(t+kT) = (-1)^k g(t)$ $(k=0, 1, \ldots)$. Dann wird

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{g(t)}{t}\,dt = (t = kT+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \frac{g(kT+y)}{kT+y}\,dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^T \frac{g(t)}{kT+t}\,dt = \tag{5. 12}$$

$$= \left(\int_0^T \frac{g(t)}{t}\,dt - \int_0^T \frac{g(t)}{T+t}\,dt\right) + \left(\int_0^T \frac{g(t)}{2T+t}\,dt - \int_0^T \frac{g(t)}{3T+t}\,dt\right) + \ldots$$

Betrachten wir das erste Glied der Summe (5. 12). Auf Grund des Mittelwertsatzes gilt

$$\int_0^T g(t)\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{T+t}\right\}dt = g(w)\left\{\frac{1}{w}-\frac{1}{T+w}\right\}T, \tag{5. 13}$$

$0<w<T$, worauf dann das Integral in (5. 13) einen positiven Wert besitzt. Da auch die restlichen Glieder in (5. 12) stets positiv sind, ist damit bewiesen, daß $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = R>0$.

6. Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung (5. 4)

Wir kehren nun zurück zu der Beziehung (5. 3) und setzen dort $A = Vn!$ (die Zahl V hat dieselbe Bedeutung wie auf Seite 55). Sei $c\in(0, s_n\rangle$, $n>3$ (sieh die Konstruktion des Beispiels im Abs. 4). Für $q>s$ gilt

$$\int_c^{4\pi es} f(t)\sin(qw\,Vn!\,t)\,dt = \int_c^{s_n} + \int_{s_n}^{s_{n-1}} + \int_{s_{n-1}}^{4\pi es} = \tag{6. 1}$$

$$= \int_c^{s_n} f(t)\sin(qw\,Vn!\,t)\,dt$$

(sieh (4. 15), (4. 20), (4. 21), (4. 22)). Es wurde bewiesen (sieh (4. 7)), daß

$$\int_c^{s_n} f(t)\sin(qw\, Vn!\, t)\, dt = G(c)\sin(qw\, Vn!\, c) - G(s_n)\sin(qw\, Vn!\, s_n) + $$
$$+\int_c^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos(qw\, Vn!\, t)\, dt,$$

d. h.

$$\left|\int_c^{s_n} f(t)\sin(qw\, Vn!\, t)\, dt\right| \leqq \tag{6. 2}$$
$$\leqq |G(c)| + |G(s_n)| + \left|\int_c^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos(qw\, Vn!\, t)\, dt\right|.$$

Nun gilt

$$|G(t)| \leqq \frac{2}{n+1} \tag{6. 3}$$

sogar für alle $t\in(0, s_n\rangle$ (sieh Seite 54). Ferner gilt unabhängig von $c\in(0, s_n\rangle$ (sieh (4. 12), (4. 13))

$$\left|\int_c^{s_n} G(t)\, qw\, Vn! \cos(qw\, Vn!\, t)\, dt\right| \leqq \frac{8qw\, V\pi s}{n-1}. \tag{6. 4}$$

Aus den Beziehungen (6. 1), (6.2), (6. 3) und (6. 4) folgt dann

$$\left|\int_c^{4\pi es} f(t)\sin(qw\, Vn!\, t)\, dt\right| \leqq \frac{4}{n+1} + \frac{8qw\, V\pi s}{n-1} \leqq 1 + \frac{8}{3} q\pi \leqq \tag{6. 5}$$
$$\leqq (1 + 8\cdot 1{,}0471\ldots)q \leqq 10q,$$

und zwar unabhängig von $c\in(0, s_n\rangle$.

Wir werden nun voraussetzen, daß auch die Summe $\sum_{q=1}^{\infty} qb_q$ (der q-vielfachen der Fourier-Koeffizienten b_q der Funktion g) eine absolut konvergente Reihe darstellt. Wegen (sieh (6. 5))

$$\left|b_q \int_c^{4\pi es} f(t)\sin(qw\, Vn!\, t)\, dt\right| \leqq 10\,|qb_q|$$

für alle $q > s$, und zwar unabhängig von $c\in(0, s_n\rangle$, ist dann die Summe

$$\sum_{q=1}^{\infty} b_q \int_c^{4\pi es} f(t)\sin(qw\, Vn!\, t)\, dt$$

eine bezüglich $c \in (0, s_n\rangle$ gleichmäßig konvergente Reihe. Daraus folgt dann, daß der Grenzübergang rechts in der Gleichung (5. 3) (für $A = Vn!$) unter dem Summenzeichen durchgeführt werden kann, d. h. mit anderen Worten, daß dann die fundamentale Beziehung (5. 4) auch wirklich gilt (offenbar für alle natürlichen Zahlen $n > 3$). Folglich können wir zusammenfassen:

Satz III. *Für die Funktion g bestehe der Fall P_{123} ($R \neq 0$), ferner sei g periodisch mit der primitiven Periode $T > 0$ und die Summe $\sum_{q=1}^{\infty} qb_q$ (der q-vielfachen der Fourier-Koeffizienten b_q von g) sei eine absolut konvergente Reihe. Es gilt dann die Behauptung des Satzes II.*

Beispiel. Sei $\{b_q\}_{q=1,3,5,\dots}$ eine Folge mit lauter positiven Gliedern, die monoton gegen Null abnehmen. Die Folge kann derart gewählt werden, daß die Summe

$$\sum_{q=1,3,5,\dots} qb_q \tag{6. 6}$$

eine (absolut) konvergente Reihe darstellt. Wegen der Ungleichung $b_q/q \leqq qb_q$ für alle $q = 1, 3, 5, \dots$ folgt dann, daß auch die Summe $\sum_{q=1,3,5\dots} b_q/q$ eine konvergente Reihe darstellt. Die Summe

$$\sum_{q=1,3,5,\dots} b_q \sin qt \tag{6. 7}$$

stellt dann die Fourier-Reihe einer gewissen Funktion g dar (sieh Satz 47 in [3]), die offenbar antiperiodisch ist und die primitive Periode $T = \pi$ besitzt. Da die Folge $\{qb_q\}_{q=1,3,5\dots}$ gegen Null strebt (dies folgt unmittelbar aus der Konvergenz der Reihe (6. 6)), d. h. konvergiert, haben wir es mit einer beschränkten Folge zu tun. Die Funktion g ist dann in E_1 stetig und beschränkt (sieh Satz 48 in [3]). Die formale gliedweise Differentiation von (6. 7) gibt $\sum_{q=1,3,5,\dots} qb_q \cos qt$. Da nun $|qb_q \cos qt| \leqq qb_q$ für alle $q = 1, 3, 5, \dots$ und jedes $t \in E_1$, ist g in E_1 differenzierbar, wobei die Ableitung g' in E_1 offenbar stetig und beschränkt ist. Für die Funktion g besteht somit der Fall P_{12}. Da aber g antiperiodisch ist, besteht für g sogar der Fall P_{123} (sieh Bemerkung 1 im Abs. 5).

Nun gilt ($t \neq 0$)

$$\frac{g(t)}{t} = \sum_{q=1,3,5,\dots} b_q \frac{\sin qt}{t}. \tag{6. 8}$$

Wegen der Ungleichung $|b_q (\sin qt/t)| \leqq qb_q$, die für alle $q = 1, 3, 5, \dots$ und jedes $t \in E_1$ erfüllt ist, kann (6. 8) gliedweise von 0 bis $d \in (0, +\infty)$ integriert werden:

$$\int_0^d \frac{g(t)}{t}\, dt = \sum_{q=1,3,5,\dots} b_q \int_0^d \frac{\sin qt}{t}\, dt. \tag{6. 9}$$

Nun gilt $\left| \int_0^d \{\sin qt/t\} dt \right| \leqq m$ für jedes $d \in (0, +\infty)$ und alle $q = 1, 3, 5, \dots$, wobei

m eine bestimmte endliche Konstante ist. Die Summe (6. 9) stellt dann eine bezüglich $d \in (0, +\infty)$ gleichmäßig konvergente Reihe dar, und zwar deshalb, weil (6. 9) unabhängig von $d \in (0, +\infty)$ mittels der konvergenten Reihe $m \sum_{q=1,3,5,\ldots} b_q$ majorisiert werden kann. In (6. 9) kann dann rechts der Grenzübergang $d \to +\infty$ unter dem Summenzeichen durchgeführt werden, worauf

$$R = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\, dt = \sum_{q=1,3,5,\ldots} b_q \int_0^{+\infty} \frac{\sin qt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \sum_{q=1,3,5,\ldots} b_q > 0. \tag{6. 10}$$

Für die auf diese Art konstruierte Funktion g gilt dann die Behauptung des Satzes II (sieh (6. 6), (6. 10) und den Satz III).

Literatur

[1] J. Matušů, Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des Fourierschen Integrals, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 203—214.
[2] J. Matušů, O jednom typu integrálu, u něhož se projevuje tzv. „Gibbsův zjev" (russische und deutsche Zusammenfassung), *Aplikace matematiky* (Praha), **6** (1961), 4; **9** (1964), 4.
[3] G. H. Hardy, W. W. Rogosinski, Fourier series, *Cambridge*, 1956.
[4] A. Zygmund, Trigonometrical series, *Warszawa—Lwów*, 1935.

(Eingegangen am 7. Oktober 1964.)