Eine Bemerkung zu den Einbettungssätzen von Sobolew

Von HANS TRIEBEL (Jena)

In der vorliegenden kurzen Notiz soll gezeigt werden, wie man einen für die Anwendung auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtigen Spezialfall der Sobolewschen Einbettungssätze ([9]) fast ohne jede Rechnung erhalten kann. Es handelt sich um folgenden bekannten

Satz. *Gehört der Rand S eines beschränkten Gebietes Ω des n-dimensionalen euklidischen Raumes zur Klasse C^1, so ist die Einbettung des Raumes $W_2^m(\Omega)$ in den Raum $W_2^l(\Omega)$, $0 \leqq l < m$, vollstetig.*

Beweis. Die Betrachtung der Funktionen $\prod_{j=1}^{n} \sin k_j x_j$, $1 \leqq k_j < \infty$, zeigt, daß der in dem Gebiet Q, $0 \leqq x_j \leqq \pi$ $(j=1, \ldots, n)$, auf den zweimal stetig differenzierbaren und am Rande des genannten Gebietes verschwindenden Funktionen erklärte Operator $-\Delta$ positiv definit und wesentlich selbstadjungiert ist. ($-\Delta$ wird als Operator im Raum $L_2(Q)$ betrachtet.) Ferner sieht man, daß sein Spektrum ein reines Punktspektrum ist. Aus dem Gesagten folgt bekanntlich nach einem Satz von Rellich ([6]), daß die Einbettung des durch Vervollständigung in der „energetischen Metrik" $(-\Delta u, u)$ [Skalarprodukt in $L_2(Q)$] gewonnenen Raumes $\mathring{W}_2^1(Q)$ in den Raum $L_2(Q)$ vollstetig ist. [Nach Friedrichs ([5], [8]) ist $\mathring{W}_2^1 \subset L_2$ erreichbar.] Eine einfache Überlegung zeigt ferner, daß die unendlich oft differenzierbaren und in Q finiten Funktionen dicht in $\mathring{W}_2^1(Q)$ liegen. Diese Betrachtungen lassen sich selbstverständlich auf beliebige „quaderförmige" Gebiete übertragen. Nach den beiden letzten Bemerkungen folgt aus dem Variationsprinzip von Courant, daß die Einbettung des Raumes $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, gewonnen durch Vervollständigung der Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ in der „energetischen Metrik" $(-\Delta u, u)$, in den Raum $L_2(\Omega)$ vollstetig ist.

Auf den Funktionen $C^1(\Omega)$ wird die quadratische Form

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{0 \leqq |\varrho| \leqq 1} \cdot \int_\Omega |D^\varrho u|^2 dx \; ^{1)}$$

betrachtet. $u \in C^1(\Omega)$ kann man so über den Rand S von Ω fortsetzen, daß die fortgesetzte Funktion $\tilde{u}$ eine in einem fest vorgegebenem Gebiet ω, $\bar{\Omega} \subset \omega$,

[1]) Eine Definition des Symbols D^ϱ findet man z. B. in [3j.

finite Funktion ist, die zu $C_0^1(\omega)$ gehört und der Unglechung $\|\tilde{u}\|_{1,\omega} \leqq K\|u\|_{1,\Omega}$ genügt. (K ist von u unabhängig). Dazu braucht man lediglich das z. B. bei FICHTENHOLZ ([1]) beschriebene konstruktive Fortsetzungsverfahren zu kombinieren mit dem Prinzip der „Zerlegung der Einheit" ([3]). Nach dem schon Bewiesenen folgt nun, daß die Normen $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ und $\|\cdot\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)} = \|\cdot\|_{0,\Omega}$ koordiniert sind.[2]) Aus der angegebenen Ungleichung folgt sofort die Vollstetigkeit der Einbettung des Raumes $W_2^1(\Omega)$, der durch Vervollständigung von $C^1(\Omega)$ in der Metrik $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ entsteht, in den Raum $L_2(\Omega)$.

Die Definition der Räume W_2^l und der Beweis des Satzes erfolgen induktiv.

$$u \in W_2^l \sim u \in W_2^{l-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_2^{l-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (l \geqq 2).$$

$$\|u\|_{l,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{l-1,\Omega}^2 \;{}^{3}).$$

Es folgt $\|u\|_{l,\Omega} \geqq \|u\|_{l-1,\Omega}$. Daraus ergibt sich durch Induktion, daß die so definierten Hilberträume vollständig sind und daß die Einbettung von W_2^m in W_2^l, $l < m$, vollstetig ist.

Auf anderen Überlegungen beruhende Beweise der Sobolewschen Einbettungssätze (bzw. von Verallgemeinerungen dieser Sätze) findet man z. B. in [3], [4], [7], [9], [10].

Literatur

[1] G. M. FICHTENHOLZ, Differential- und Integralrechnung I, *Berlin*, 1964.
[2] I. M. GELFAND—G. E. SCHILOW, Verallgemeinerte Funktionen II. *Berlin*, 1962.
[3] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators. *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1963.
[4] В. П. Ильин, Свойства некоторых классов дифференцируемых фукнций многих переменных, заданных в н-мерной области, *Труды матем. института им. В. А. Стеклова*, т. LXVI, *Москва-Ленинград*, 1962.
[5] С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала. *Москва*, 1952.
[6] M. A. NEUMARK, Lineare Differentialoperatoren. *Berlin*, 1960.
[7] L. NIRENBERG, On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser.* 3, **13** (1959).
[8] F. RIESZ—B. SZ. NAGY, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin*, 1956.
[9] S. L. SOBOLEW, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathem. Physik. *Berlin*, 1964.
[10] Краевые задачи матем. физики I. *Труды матем. института им. В. А. Стеклова*, т. LXX, *Москва-Ленинград*, 1964.

(Eingegangen am 19. März 1965.)

[2]) Eine Definition des Begriffes „koordinierte Normen" findet man z. B. in [2].

[3]) Diese Definition stimmt mit der üblichen Definition überein.