Zerlegungen von Inzidenzstrukturen, I

Von VÁCLAV HAVEL (Brno)

Im weiteren soll der Apparat der Zerlegungentheorie (von O. BORŮVKA, P. DUBREIL und O. ORE) auf einige Grundbegriffe der Inzidenzgeometrie verwendet werden; dabei ist dieser erste Teil den allgemeinen Inzidenzstrukturen gewidmet, während wir im zweiten Teile gewisse Translationsstrukturen behandeln wollen.

Unter einer *Inzidenzstruktur* [1]) werden wir für unsere Zwecke ein Quadrupel $\mathcal{I}=(M_1, M_2, f_1, f_2)$ verstehen, wobei folgende Bedingungen gelten sollen:

(i) M_1 und M_2 sind disjunkte, wenigstens zweielementige Mengen;

(ii) f_i ist eine Abbildung von einer Untermenge $\mathcal{D}(M_i) \subseteq \{(x, y) | x, y \in M; x \neq y\}$ auf M_j für $(i, j)=(1, 2), (2, 1)$;

(iii) $f_i(a, b)=f_i(c, d),\ b \neq c \Rightarrow f_i(a, b)=f_i(b, c)$ für $i=1, 2$;

(iv) $f_i(a, b)=f_i(a, c) \Rightarrow f_j(f_i(a, b), f_i(a, c))=a$ für $(i, j)=(1, 2), (2, 1)$.

Für $f_i(a, b)=c$ (wo $i=1$ oder 2) schreiben wir auch aIc und sagen, dass a und c einander *inzidieren*. Die Elemente von M_1 bzw. M_2 sollen *Punkte* bzw. *Geraden* von $\mathcal{I}$ heissen.

Sind $\mathcal{I}=(M_1, M_2, f_1, f_2)$ und $\mathcal{I}^*=(M_1^*, M_2^*, f_1^*, f_2^*)$ zwei Inzidenzstrukturen, so ist eine *Surjektion* zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$ als ein Paar $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$ gemeint, wo σ_i eine Surjektion zwischen M_i und M_i^* $(i=1, 2)$ bedeutet. Eine solche Surjektion σ heißt *inzidenzerhaltend* (oder *Inzidenzsurjektion*), wenn

$$(1) \qquad a_1 I a_2,\ a_1 \in M_1,\ a_2 \in M_2 \Rightarrow \sigma_1 a_1 I^* \sigma_2 a_2.$$

Weiter wollen wir noch folgende *Bedingung* aussprechen:

$$(2_i) \qquad \sigma_j f_i(a, b)=f_j^*(\sigma_i a, \sigma_i b)$$

für jedes $(a, b) \in \mathcal{D}(M_i)$, *für welches* $(\sigma_i a, \sigma_i b) \in \mathcal{D}(M_i^*)$ *gilt. Dabei ist* $(i, j)=(1, 2)$ *oder* $(2, 1)$.

Aus (1) *folgt* (2_i).

BEWEIS. Es gelte (1) und es sei $(a, b) \in \mathcal{D}(M_i)$ gewählt, wo $(\sigma_i a, \sigma_i b) \in \mathcal{D}(M_i^*)$. Dann ist $aIf_i(a, b)$, $\sigma_i a I^* \sigma_j f_i(a, b)$ und ähnlich $\sigma_i b I^* \sigma_j f_i(a, b)$, so dass $f_j^*(\sigma_i a, \sigma_i b)=$

[1]) Hier in etwas schärferer Form als bei G. PICKERT: Projektive Ebenen, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1955, S. 2.

$=\sigma_j f_i(a, b)$. Aus leicht konstruierbaren Gegenbeispielen folgt es, daß die bewiesene Implikation allgemein nicht umkehrbar ist.

Ist $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$ eine Surjektion zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$, für welche (2_i) gilt, und gibt es auf jeder Geraden von $\mathcal{I}$ Punkte x, y, welche die Bedignung $\sigma_1 x \neq \sigma_1 y$ erfüllen, dann folgt (1).

Beweis. Sind $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$ so gewählt, dass $a_1 I a_2$, dann gibt es ein $b_1 \in M_1$, $b_1 I a_2$, $b_1 \neq a_1$, $\sigma_1 b_1 \neq \sigma_1 a_1$ und nach (2_1) ist also $\sigma_2 f_1(a_1, b_1)=f_1^*(\sigma_1 a_1, \sigma_1 b_1)$. Ähnlicherweise für den Index 2.

Unter einer *Zerlegung* auf $\mathcal{I}$ verstehen wir ein Paar $\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$, wo $\mathcal{Z}_i$ eine Zerlegung [2]) auf M_i $(i=1, 2)$ ist. Eine solche Zerlegung $\mathcal{Z}$ heißt *erzeugend* bzw. *streng erzeugend*, wenn für je zwei verschiedene $\mathcal{Z}_i$-Blöcke X, Y, für welche $X \times Y \,\delta\, \mathcal{D}(M_i)$ gilt, ein $Z \in \mathcal{Z}_j$ existiert, so daß $f_i(X, Y) \subseteq Z$ bzw. $f_i(X, Y)=Z$ für $(i, j)=(1, 2), (2, 1)$. Zu jeder Surjektion $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$ zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$ *gehört* die Zerlegung $\mathcal{Z}^\sigma=(\mathcal{Z}_1^\sigma, \mathcal{Z}_2^\sigma)$ auf $\mathcal{I}$, bei welcher alle $\mathcal{Z}_i^\sigma$-Blöcke als vollständige Urbilder der Elemente aus M_i^* $(i=1, 2)$ definiert sind.

Zu jeder Inzidenzsurjektion $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$ zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}^*$ gehört eine erzeugende Zerlegung.

Beweis. Es seien X, Y verschiedene $\mathcal{Z}_i^\sigma$-Blöcke, wobei $X=\sigma_i^{-1}x^*$ und $Y=\sigma_i^{-1}y^*$ für gewisse $x^*, y^* \in M_i^*$. Gilt $X \times Y \delta \mathcal{D}(M_i)$, so folgt $\sigma_j f_i(x, y)=f_i(x^*, y^*)$ für jedes $f_i(x, y)$ mit $x \in X$ und $y \in Y$. Das bedeutet also, daß $f_i(x, y) \in \sigma_j^{-1} f_i^*(x^*, y^*)$. — Wie üblich, war es $(i, j)=(1, 2), (2, 1)$.

Ist eine Inzidenzstruktur gegeben, so nennen wir eine *Punktreihe* jede Menge von sämtlichen mit derselben Geraden inzidierenden Punkten; dual definiert man ein *Geradenbüschel*.

Nun sprechen wir eine Folgerung des vorangehenden Satzes aus:

$\mathcal{Z}^\sigma$ ist dann und nur dann sogar streng erzeugend, wenn σ_1 bzw. σ_2 jedes Geradenbüschel aus $\mathfrak{I}$ auf eine Punktreihe bzw. auf ein Geradenbüschel abbildet.

Beweis. Gilt die ausgesprochene Bedingung, so wählen wir zu jeder Geraden $z^* \in M_2^*$ eine Gerade $z_0 \in \sigma_2^{-1} z^*$. Für den veränderlichen Punkt $x^* I z^*$ schöpfen die $\mathcal{Z}_1^\sigma$-Blöcke $\sigma_1^{-1} x^*$ alle Punkte von z_0 aus. Man kann aber auf eine ersichtliche Weise mittels solchen $\mathcal{Z}_1^\sigma$-Blöcken alle Geraden aus $\sigma_2^{-1} z^*$ konstruieren. Ähnlich schliesst man im Falle der Geradenbüschel, so dass $\mathcal{Z}^\sigma$ streng erzeugend ist. — Es sei $\mathcal{Z}^\sigma$ eine streng erzeugende Zerlegung auf $\mathcal{I}$. Es sei $z^* \in M_2^*$ gegeben. Für jede Wahl von verschiedenen Punkten $a^*, b^* I z^*$ ist $f_1(\sigma_1^{-1} a^*, \sigma_1^{-1} b^*)$ gleich dem $\mathcal{Z}_2^\sigma$-Block $\sigma_2^{-1} z^*$. Daraus folgt es, dass jede Gerade aus $\sigma_2^{-1} z^*$ mit sämtlichen $\mathcal{Z}_1^\sigma$-Blöcken $\sigma_1^{-1} x^*$, $x^* I^* z^*$ inzidieren muss und die verlangte Bedingung für die Punktreihen folgt schon. Ähnlich wird der Fall der Geradenbüschel untersucht. Zusammen ist also damit der übrige Teil unserer Folgerung bewiesen.

Ist $\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ eine erzeugende Zerlegung auf $\mathcal{I}$, so bezeichnen wir mit $f_i/\mathcal{Z}$ die Abbildung der Menge von sämtlichen mit $\mathcal{D}(M_i)$ inzidenten Paaren $(X, Y) \in \mathcal{Z}_i \times \mathcal{Z}_i$ [3]) in $\mathcal{Z}_j$, wobei $f_i/\mathcal{Z}(X, Y)$ densolchen $\mathcal{Z}_j$-Block bedeutet, in welchem $f_i(X, Y)$ enthalten ist; $(i, j)=(1, 2), (2, 1)$.

---

[2]) Für die Terminologie der Zerlegungentheorie siehe O. Borůvka: Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, *Berlin* 1960. — Für die Inzidenz (also nichtleeres Durchschneiden) von Mengen gebrauchen wir das Symbol δ. Also $A \delta B$ soll bedeuten, dass $A \cap B \neq \varnothing$.

[3]) Soweit diese Menge nicht leer ist.

Ist $\mathscr{Z}=(\mathscr{Z}_1, \mathscr{Z}_2)$ eine streng erzeugende Zerlegung auf $\mathscr{I}$, wobei $\mathscr{Z}_i$ mindestenst zweiblöckig ist, und existiert die Abbildung $f_i/\mathscr{Z}$ auf $\mathscr{Z}_j$ $((i,j)=(1,2),(2,1))$ dann ist $(\mathscr{Z}_1, \mathscr{Z}_2, f_1/\mathscr{Z}, f_2/\mathscr{Z})$ eine Inzidenzstruktur.

BEWEIS. Die Bedingungen (i) und (ii) sind erfüllt und es bleibt nur übrig (iii) und (iv) abzuleiten. Es gelte für $i=1,2$ $f_i/\mathscr{Z}(A,B)=f_i/\mathscr{Z}(C,D)$, $B\neq C$. Ist $a\in A$ und $b\in B$, so folgt $f_i(a,b)\in f_i/\mathscr{Z}(A,B)=f_i/\mathscr{Z}(C,D)$, so dass $c\in C$ und $d\in D$ existieren, für welche $f_i(a,b)=f_i(c,d)$ gilt. Also folgt auch $f_i/\mathscr{Z}(A,B)=f_i/\mathscr{Z}(C,D)$. Ähnlich schliesst man bei $f_i/\mathscr{Z}(A,B)\neq f_i/\mathscr{Z}(A,C)\Rightarrow f_j/\mathscr{Z}(f_i/\mathscr{Z}(A,B), f_i/\mathscr{Z}(A,C))=$ $=A$ für $(i,j)=(1,2),(2,1)$.

Die Mengen- und Verbandsoperationen sollen im weiteren durch $\cap$, $\cup$ und $\frown$, $\smile$ bezeichnet werden. Wir nennen zwei Zerlegungen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ auf derselben Menge *assoziabel* [4]), wenn $A\in\mathscr{A}$ und $B\in\mathscr{B}$ aus demselben $\mathscr{A}\smile\mathscr{B}$-Block stets einander inzidieren. Zwei Zerlegungen $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$, $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ auf $\mathscr{I}$ heissen *assoziabel*, wenn $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{B}_2$ assoziable Zerlegungen sind.

Sind $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$ und $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ erzeugende Zerlegungen auf $\mathscr{I}$ und gilt $A, A'\in\mathscr{A}_i$; $B, B'\in\mathscr{B}_i$; $A\delta B$; $A'\delta B'$; $A\times A'\delta\mathscr{D}(M_i)$; $B\times B'\delta\mathscr{D}(M_i)\Rightarrow(A\cap B)\times$ $\times(A'\cap B')\delta\mathscr{D}(M_i)$ für $i=1,2$, so nennen wir das Paar $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ *durchschnittsfähig*.

Es seien $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$, $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ assoziable durchschnittsfähige erzeugende Zerlegungen. Dann ist auch $\mathscr{A}\smile\mathscr{B}=(\mathscr{A}_1\smile\mathscr{B}_1, \mathscr{A}_2\smile\mathscr{B}_2)$ erzeugend.

BEWEIS. Weiter setzen wir stets $(i,j)=(1,2),(2,1)$. Es seien X und X' verschiedene $\mathscr{A}_i\smile\mathscr{B}_i$-Blöcke, wobei $X\times X'\delta\mathscr{D}(M_i)$. Es seien P und P' $\mathscr{A}_i$-Blöcke, für welche $P\subseteqq X$, $P'\subseteqq X'$, $P\times P'\delta\mathscr{D}(M_i)$ gilt. Dann gibt es einen $\mathscr{A}_j$-Block $Q\supseteqq f_i(P,P')$ und einen $\mathscr{A}_j\smile\mathscr{B}_j$-Block $R\supseteqq Q$. Für jedes $x\in X$ bzw. $x'\in X'$ existiert ein $B\in\mathscr{B}_i$ bzw. $B'\in\mathscr{B}_i$, so daß $x\in B$ bzw. $x'\in B'$. Aus der vorausgesetzten Assoziabilität folgt also $P\delta B$ und $P'\delta B'$. Wegen $B\times B'\delta\mathscr{D}(M_i)$ gibt es einen $\mathscr{B}_j$-Block $C\supseteqq f_i(B,B')$. Es handelt sich aber um ein durchschnittsfähiges Paar $(\mathscr{A},\mathscr{B})$, so daß $(P\cap B)\times$ $\times(P'\cap B')\delta\mathscr{D}(M_i)$, $f_i(P\cap B, P'\cap B')\subseteqq Q\cap C$ folgt. Daraus ergibt sich die verlangte Beziehung $C\subseteqq R$. — Sind insbesondere $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ streng erzeugend und sind $\mathscr{A}_1\smile\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{A}_2\smile\mathscr{B}_2$ mindestens zweiblöckig, so ist auch streng erzeugend.

Sind $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$, $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ zwei Zerlegungen auf $\mathscr{I}$ und existieren für jedes $y\in M_j$ unter den mit $\{x|xIy\}$ inzidenten $\mathscr{A}_i\frown\mathscr{B}_i$-Blöcken zwei ausgezeichnete, die mit einem jedem solchen Block nicht im gemeinsamen $\mathscr{A}_i$-oder $\mathscr{B}_j$-Block liegen $((i,j)=(1,2),(2,1))$ so sagen wir, dass $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ ein *ordentliches* Paar ist.

Sind $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$, $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ streng erzeugende Zerlegungen auf $\mathscr{I}$, die ein ordentliches Paar bilden, dann ist auch $\mathscr{A}\frown\mathscr{B}=(\mathscr{A}_1\frown\mathscr{B}_1, \mathscr{A}_2\frown\mathscr{B}_2)$ streng erzeugend.

BEWEIS. Es sei wieder $(i,j)=(1,2),(2,1)$. Sind X, Y verschiedene $\mathscr{A}_i\frown\mathscr{B}_i$-Blöcke, wo $X\times Y\delta\mathscr{D}(M_i)$, dann ist $X=A\cap B$, $Y=A'\cap B'$ für passende $A, A'\in\mathscr{A}_i$ und $B, B'\in\mathscr{B}_i$. Für $A\neq A'$, $B\neq B'$ folgt $f_i(A,A')=P$, $f_i(B,B')=Q$ für gewisse $P\in\mathscr{A}_j$, $Q\in B_j$ und daraus ergibt sich schließlich $f_i(A\cap B, A'\cap B')=P\cap Q\in\mathscr{A}_j\frown B_j$. Ist o.B.d.A. $A=A'$, $B\neq B'$, dann übergehen wir von $A\cap B$, $A\cap B'$ zu weiteren $\mathscr{A}_i\frown\mathscr{B}_i$-Blöcken $C\cap D$, $C'\cap D'$, wo $C, C'\in\mathscr{A}_i$; $D, D'\in\mathscr{B}_i$; $C\neq C'$; $D\neq D'$;

[4]) Vgl. P. DUBREIL, Algèbre, *Paris* 1954, S. 64. Im zitierten Buche von O. BORŮVKA ist die Bezeichnung komplementäre Zerlegungen gebraucht.

$f(A \cap B, A \cap B') = f(C \cap D, C' \cap D')$, was nach Voraussetzung möglich ist. Das Ende des Beweises folgt schon.

Eine Inzidenzstruktur $\mathscr{I} = (M_1, M_2, f_1, f_2)$, für welche $\mathscr{D}(M_i) = M_i \times M_i \setminus \{(x, x) | x \in M_i\}$; $i = 1, 2$ gilt, soll jetzt *gesättigt* heissen. Eine gesättigte Inzidenzstruktur, in welcher vier Punkte *allgemeiner Lage* (d. h. von denen keine drei mit derselben Geraden inzidieren) existieren, heisst bekanntlich *projektive Ebene*.

Es seien $\mathscr{A} = (\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$, $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ erzeugende Zerlegungen auf einer gesättigten Inzidenzstruktur $\mathscr{I}$. Dann ist auch $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = (\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{B}_1, \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{B}_2)$ erzeugend.

Beweis. Im weiteren ist, wie üblich, $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$. Es seien X, X' verschiedene $\mathscr{A}_i \cup \mathscr{B}_i$-Blöcke und P, P' zwei $\mathscr{A}_i$-Blöcke, für welche $P \subseteqq X$, $P' \subseteqq X'$ gilt. Dann gibt es einen $\mathscr{A}_j$-Block $Q \supseteqq f_i(P, P')$ und einen $\mathscr{A}_j \cup \mathscr{B}_j$-Block $C \supseteqq Q$. Jedes $x \in X$ bzw. $x' \in X'$ liegt im geeigneten $Y \in \mathscr{A}_i$ bzw. $Y' \in \mathfrak{A}_i$, wobei $f_i(x, x') \in f_i(Y, Y')$, wo $f_i(Y, Y')$ im passenden $\mathscr{A}_j$-Block liegt. Es genügt also zu beweisen, daß für sämtliche $\mathscr{A}_i$-Blöcke A, A', für welche $A \subseteqq X$ und $A' \subseteqq X'$ gilt, der entsprechende $\mathscr{A}_j$-Block $S \supseteqq f(A, A')$ in R enthalten werden muss: In der Tat, sind A, A' solche $\mathscr{A}_i$-Blöcke, so gibt es die Bindungen [5]) von $\mathscr{A}_i$-Blöcken

$$P = F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}, F_r = A; \tag{3}$$

$$P' = F_1', F_2', \ldots, F_{r-1}', F_r' = A' \tag{3'}$$

in Bezug auf $\mathscr{B}_i$, mit gleicher Länge r (was o.B.d.A. ist), wobei $F_\alpha = F_\alpha'$; $\alpha = 1, \ldots, r$. Dann gibt es eine endliche Folge von $\mathscr{A}_j$-Blöcken

$$H_1, H_2, \ldots, H_{r-1}, H_r \tag{4}$$

dass $f(F_\alpha, F_\alpha') \subseteqq H_\alpha$; $\alpha = 1, \ldots, r$, wobei $H_1 = Q$ und $H_r = S$. Wir wollen zeigen, daß (4) eine Bindung von $\mathscr{A}_j$-Blöcken bezüglich $\mathscr{B}_j$ ist. Tatsächlich, weil (3) und (3') Bindungen bezüglich $\mathscr{B}_i$ sind, gibt es verbindende $\mathscr{B}_i$-Blöcke $G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}$ bzw. $G_1', G_2', \ldots, G_{r-1}'$, für welche $G_\beta \neq G_\beta'$; $\beta = 1, \ldots, r-1$ gilt, woraus sich die Existenz von $\mathscr{B}_j$-Blöcken $K_1, K_2, \ldots, K_{r-1}$ ergibt, so daß $f(G_\beta, G_\beta') \subseteqq K_\beta$; $\beta = 1, \ldots, r-1$. Aus $F_\beta \,\delta\, G_\beta$ und $F_\beta' \,\delta\, G_\beta'$ folgt also $f(F_\beta, F_\beta') \,\delta\, f(G_\beta, G_\beta')$ und weiter $H_\beta \,\delta\, K_\beta$; $\beta = 1, \ldots, r-1$. Ähnlich bekommt man $K_\beta \,\delta\, H_{\beta+1}$ für jedes $\beta = 1, \ldots, r-1$. Daraus folgt es, daß (4) die gewünschte Bindung ist.

(Eingegangen am 13. April 1965.)

[5]) Der Begriff der Bindung ist im zitierten Buch von O. Borůvka, S. 12. eingeführt.