Über eine Charakterisierung der Hurwitzschen Zetafunktion

Von HANS-JÜRGEN GLAESKE (Jena)

In Verallgemeinerung der Betrachtungen von MAIER ([2]) wurde für die *Hurwitzsche Zetafunktion* in [1] eine *Integrofunktionalgleichung* hergeleitet. Mit Hilfe einer Funktion des ebenen Halbgitters erhielt man

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\left(\frac{s}{2}\right)}\Bigg\{a^{-u}b^{u-s}\varphi(u,\alpha)\varphi(s-u,\alpha)-$$

$$(a+b)^{-u}\left[a^{u-s}\varphi\left(u,\frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right)\varphi\left(s-u,\frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right)\right.$$

$$\left.\left.+b^{u-s}\varphi\left(u,\frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right)\varphi\left(s-u,\frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right)\right]\right\}du=\frac{\varphi(s,\alpha)}{(a+b)^s}$$

$$\operatorname{Re}s=\sigma>2,\qquad \left|\operatorname{arc}\frac{b}{a}\right|<\pi,\qquad 0<\operatorname{Re}\alpha$$

wobei immer $\varphi(s,\alpha)=\Gamma(s)\zeta(s,\alpha)$ bedeute. Wir wollen (1) unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen lösen. Es sei noch bemerkt, daß (1) für $\alpha=1$ in die bekannte (s. [2]) *Integralgleichung der Riemannschen Zetafunktion*

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\left(\frac{s}{2}\right)}du\,\varphi(u)\varphi(s-u)[a^{-u}b^{u-s}-(a+b)^{-u}(a^{u-s}+b^{u-s})]=\frac{\varphi(s)}{(a+b)^s}$$

$$\sigma>2,\qquad \left|\operatorname{arc}\frac{b}{a}\right|<\pi$$

übergeht und das nur für diese Wahl von α eine Integralgleichung entsteht. Wir werden, wie es die Bauart von (1. 2) nahelegt, nur Lösungen suchen, die sich als Mellin-Transformierte einer Funktion $p(z,\alpha)$ schreiben lassen:

$$(3)\qquad p(z,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1+\varepsilon)}\varphi(u,\alpha)z^{-u}\,du,\qquad \varepsilon>0$$

Umgekehrt ist

$$(3') \qquad \varphi(u, \alpha) = \int_0^\infty p(z, \alpha) z^{u-1}\, du, \qquad \operatorname{Re} u > 1.$$

In (1) führen wir den Weg $(1+\eta)$ ein $(0<\eta<\sigma-2)$ und wenden den Operator $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2+\eta+\varepsilon)} ds$ an. Mit (3) entsteht aus (1) die Funktionalgleichung

$$(4) \qquad \begin{aligned} &p(a, \alpha)p(b, \alpha) - p\left(a+b, \frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right) p\left(a, \frac{a(\alpha+1)+\alpha b}{2a+b}\right) \\ &- p\left(a+b, \frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right) p\left(b, \frac{b(\alpha+1)+\alpha a}{2b+a}\right) - p(a+b, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Als Problem bleibt die Lösung von (4). Als identisch konstante Lösungen erhält man $p\equiv 0$ und $p\equiv -1$. Erstere führt zu $\varphi=0$, letztere liefert kein φ.

Wir betrachten 2 Fälle:

FALL 1. $p(z, \alpha)$ sei eine ganze Funktion in z und in α. In (4) setzen wir $a=b$ und lassen diesen Wert gegen Null streben. Wegen der Stetigkeit von p erhält man mit $p(0, \alpha) = \mathrm{h}(\alpha)$

$$(5) \qquad h^2(\alpha) - 2h^2\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right) - h(\alpha) = 0$$

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung empfiehlt sich die Taylorentwicklung von h bei $\alpha=1$. Mit $\alpha=1$ folgt

$$h(1) = \begin{cases} 0 & (+) \\ -1 & (++) \end{cases}$$

Differentiation von (5) nach α liefert (" ' " bedeutet Ableitung nach dem Argument)

$$2hh'(\alpha) - \frac{8}{3}\, hh'\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right) - h'(\alpha) = 0.$$

Für $\alpha=1$ ergibt sich in beiden Fällen $h'(1)=0$. Durch fortgesetzte Differentiation (Induktion!) zeigt man, daß $h^{(n)}(1)=0$ für alle $n>0$ gilt. Damit wird

$$(6) \qquad p(0, \alpha) = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Aus (4) liest man ab, daß $(a=-b)$ im ersten Falle $p(z, \alpha)=0$ gilt. Im zweiten Falle setze man in (4) $b=0$ und es wird

$$(7) \qquad p^2\left(a, \frac{\alpha+1}{2}\right) + p(a, \alpha) = 0$$

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung bietet sich wieder die Entwicklung bei $\alpha = 1$ an. Wir berechnen also $\left.\dfrac{\partial^n p(a, \alpha)}{\partial \alpha^n}\right|_{\alpha=1}$. Aus (6) ersieht man für $\alpha = 1$

$$p(a, 1) = \begin{cases} 0 & (+) \\ -1 & (++) \end{cases}$$

Differentiation von (7) nach α:

$$p p_\alpha\left(a, \frac{\alpha+1}{2}\right) + p_\alpha(a, \alpha) = 0.$$

Der Fall $(+)$ führt, wie man durch fortgesetzte Differentiation sieht, unmittelbar zu dem schon erledigten Fall $p \equiv 0$. Im Falle $(++)$, der jetzt nur noch betrachtet werden soll, ergibt sich nichts über $p(a, 1)$; wir setzen

$$p_\alpha(a, 1) = q(a), \quad q(a) \quad \text{ganz.}$$

Durch n-malige Differentiation von (7) ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^k p\left(a, \frac{\alpha+1}{2}\right)}{\partial\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^k} \, \frac{\partial^{n-k} p\left(a, \frac{\alpha+1}{2}\right)}{\partial\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{n-k}} + 2^n \frac{\partial^n p(a, \alpha)}{\partial \alpha^n} = 0$$

Diese Formel erlaubt für $\alpha = 1$ den Induktionsbeweis für

$$\left.\frac{\partial^n p(a, \alpha)}{\partial \alpha^n}\right|_{\alpha=1} = (-1)^{n-1} q^n(a)$$

Die nichttrivialen Lösungen von (7) *haben also die Gestalt*

(8) $$p(z, \alpha) = -e^{(1-\alpha) q(z)}, \quad q(z) \neq 0, \quad \text{ganz, beliebig}$$

$q(z) \equiv 0$ ergibt die triviale Lösung $p \equiv -1$.

Zu untersuchen bleibt die Frage, ob (8) auch eine Lösung von (4) liefert. Das wird zu Einschränkungen der Funktion q führen. Da (4) identisch in α gilt, darf man $\alpha = 0$ wählen:

$$p(a, 0) p(b, 0) - p\left(a+b, \frac{a}{2a+b}\right) p\left(a, \frac{a}{2a+b}\right) - p\left(a+b, \frac{b}{2b+a}\right) \cdot$$
$$\cdot p\left(b, \frac{b}{2b+a}\right) - p(a+b, 0) = 0.$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck unter Verwendung von (8) nach Potenzen von b:

$$e^{q(a)} \left\{\frac{1}{2} q'(a) - \frac{1}{2a} q(a) + e^{q(0)} \left[\frac{1}{a} q(a) + \frac{1}{a} q(0) - q'(a)\right]\right\} \cdot b + O(b^2) = 0$$

Nun kommt nach (6. 8) nur $q(0)=0$ in Frage. Also gilt

$$e^{q(a)}\left[\frac{q(a)}{a}-q'(a)\right]b+O(b^2) = 0$$

Also muß gelten:

$$aq'(a)-q(a) = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$q(a)=ca, \qquad c \text{ beliebig komplex.}$$

Man verifiziert sofort, daß (8) mit dieser Funktion q die Funktionalgleichung (4) erfüllt.

Damit haben wir

Satz 1. *Die nichtverschwindenden bezüglich z und α ganzen Lösungen von (4) haben die Gestalt*

$$p(z, \alpha) = -e^{c(1-\alpha)z}.$$

Durch Bestimmung der Mellintransformierten (3′) ergibt sich

Satz 1′. *Die einzigen nichtverschwindenden Lösungen $\varphi(u, \alpha)$ von (1), die Mellintransformierte (3′) einer bezüglich z und α ganzen Funktion $p(z, \alpha)$ sind, haben die Gestalt*

$$\varphi(u, \alpha) = -\Gamma(u)[(\alpha-1)c]^{-u}, \ \operatorname{Re}[c(\alpha-1)]>0.$$

Fall 2. $p(z, \alpha)$ ganz bezüglich α, meromorph bezüglich z. Wir berechnen vorerst $p(z, 1)=p(z)$. Nach (4) gilt mit $\alpha=1$:

$$p(a+b)[p(a)+p(b)+1]-p(a)p(b)=0. \tag{9}$$

Es interessieren nur die nichtkonstanten Lösungen. Für diese gilt $p(z)\neq 0, -1$, wie man aus (9) sofort abliest. Deshalb kann man (9) nach $p(a+b)$ auflösen und erhält durch Anwendung des Operators $\frac{\partial}{\partial a}-\frac{\partial}{\partial b}$ die Differentialgleichung

$$p'(a)+\lambda p(a)\big(1+p(a)\big)=0, \qquad \lambda\neq 0.$$

Die Integration ergibt

$$p(z) = \frac{1}{Ae^{\lambda z}-1}.$$

Durch Einsetzen in (9) erhält man $A=1$.

Es sei bemerkt, daß (9) das Analogon von (4) für die Integralgleichung (3) der Riemannschen Zetafunktion ist. Man hat also

Satz 2. *Die nichtkonstanten meromorphen Lösungen von (9) haben die Gestalt*

$$p(z) = \frac{1}{e^{\lambda z}-1}, \qquad \lambda\neq 0. \tag{10}$$

Durch Aufsuchen der Mellintransformierten erhält man

Satz 2'. *Die Lösungen $\varphi(u)$ von* (2), *die Mellintransformierte* (3) (*mit* $\alpha=1$) *einer meromorphen Funktion $p(z)$ sind, haben die Gestalt*

$$\varphi(u)=\Gamma(u)\zeta(u)\lambda^{-u}, \quad \operatorname{Re}\lambda>0.$$

Zur Lösung im allgemeinen Fall spezialisieren wir (4) mit $a=b$ und erhalten wieder eine notwendige Bedingung für das Bestehen von (4):

$$p^2(a,\alpha)-2p\left(2a,\frac{2\alpha+1}{3}\right)p\left(a,\frac{2\alpha+1}{3}\right)-p(2a,\alpha)=0$$

Wegen der Gleichheit der zweiten Argumente für $\alpha=1$ empfiehlt sich wieder eine Potenzreihenentwicklung um $\alpha=1$, die wir wegen (10) in der Form

$$p(a,\alpha)=\frac{1}{e^{\lambda a}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(a)}{n!}(1-\alpha)^n$$

ansetzen. Es bleibt die Bestimmung der meromorphen Funktionen $h_n(a)$. Setzt man die Reihe in die Funktionalgleichung ein, so ergibt sich nach Cauchyscher Produktbildung:

$$(*)\ \sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{h_{n-k}(a)}{k!(n-k)!}\left[(e^{\lambda a}+1)h_k(a)-2\left(\frac{2}{3}\right)^n h_k(2a)\right]-(e^{\lambda a}-1)\frac{h_n(2a)}{n!}\right\}=0$$

Für $n=0$ erhalten wir

$$[h_0(a)(e^{\lambda a}+1)-2h_0(2a)]h_0(a)-(e^{\lambda a}-1)h_0(2a)=0.$$

Der Ansatz $h_0(a)=\sum_{m=-k}^{\infty}a_m a^m$ liefert als Koeffizient der Potenz a^{-2k}

$$a_{-k}^2(1-2^{-k})=0$$

Damit wird $a_{-k}=0$ und, da k beliebig war, $a_{-m}=0$ $(m=1,2,\dots,k)$; d. h. $h_0(a)$ ist regulär bei $a=0$. Die weiteren Koeffizienten ergeben sich aus der Bemerkung, daß $\dfrac{h_0(a)}{e^{\lambda a}-1}=p(a,1)$ gilt und (10). Damit wird

$$h_0(a)=1$$

Für $n=1$ erhält man die Funktionalgleichung

$$h_1(2a)=2h_1(a).$$

Ein Potenzreihenansatz wie im Falle $n=0$ liefert sofort

$$h_1(a)=\mu a, \qquad \mu\neq 0 \text{ beliebig komplex.}$$

Für $n=2$ erhält man aus $(*)$

$$h_2(a)\left[\frac{5}{9}+e^{\lambda a}\right]+h_2(2a)\left[\frac{1}{18}-\frac{e^{\lambda a}}{2}\right]+a^2\mu^2\left[e^{\lambda a}-\frac{7}{9}\right]=0$$

Hier liefert ein entsprechender Ansatz

$$h_2(a) = \mu^2 a^2.$$

Das legt die Vermutung nahe:

$$h_m(a) = \mu^m a^m \qquad m = 0, 1, 2, , \dots .$$

Den Beweis führt man durch vollständige Induktion. Damit haben wir

$$p(z, \alpha) = \frac{e^{(1-\alpha)\mu z}}{e^{\lambda z} - 1}, \qquad \lambda, \mu \neq 0 \tag{11}$$

Man verifiziert sofort, daß diese Lösungen auch (4) erfüllen. Das liefert den

Satz 3. *Die bezüglich z meromorphen und bezüglich α ganzen Lösungen von* (4) *sind von der Form* (11).

Durch Mellinsche Integralumkehr ergibt sich

Satz 3′. *Die Lösungen* $\varphi(u, \alpha)$ *von* (1), *die Mellintransformierte* (3′) *einer bezüglich α ganzen und bezüglich z meromorphen Funktion* $p(z, \alpha)$ *sind, haben die Gestalt*

$$\varphi(u, \alpha) = \Gamma(u)\zeta\left(u, 1 - \frac{(1-\alpha)\mu}{\lambda}\right)\lambda^{-u}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad \operatorname{Re}\frac{1-\alpha}{\lambda}\mu > 0.$$

In diesem Sinne kann die Integrofunktionalgleichung (1) zur *Charakterisierung von* $\zeta(u, \alpha)$ Verwendung finden. Die Lösung $\varphi(u, \alpha) = \Gamma(u)\zeta(u, \alpha)$ erhält man etwa durch Vorschreiben der Residuen bei $u = 0$ und $u = 1$; d. h. durch die Forderungen

$$\varphi(u, \alpha) = \frac{1}{u-1} + O(1) \quad \text{für} \quad u \to 1$$

$$\varphi(u, \alpha) = \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{u} + O(1) \quad \text{für} \quad u \to 0.$$

Dann werden $\lambda = \mu = 1$.

Literatur

[1] H. J. Glaeske, Über Funktionalgleichungen von Gitterfunktionen, *Math. Nachr.* **32** (1966) 95—105.

[2] W. Maier, Gitterfunktionen der Zahlebene, *Math. Ann.* **113** (1936), 363—379.

(Eingegangen am 9. Juli 1965.)