Kombinatorische Untersuchungen über gerichtete vollständige Graphen*)

Von TIBOR SZELE † (Debrecen)

Einführung

Betrachten wir den zu den Knotenpunkten $A_1, A_2, \dots, A_n$ gehörenden *vollständigen Graphen* ($n \geqq 2$), d. h. die Menge aller Kanten A_iA_k ($i \neq k$), und geben wir jeder Kante eine bestimmte *Orientierung*. Im so erhaltenen gerichteten vollständigen Graphen G nennen wir eine wiederholungsfreie Variation von Knotenpunkten $B_1, B_2, \dots, B_l$ nach RÉdei [6] *geordnet*, wenn in G die Kanten $\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_2B_3}, \dots, \overrightarrow{B_{l-1}B_l}$ vorkommen, m. a.W.: wenn der aus diesen Kanten bestehende *Kantenzug* von B_1 nach B_l im Sinne der Orientierung des Graphen G durchlaufen wird. Ein derartiger Kantenzug heißt eine *Bahn*. Aus dieser Definition folgt, daß die Anzahl der Kanten einer Bahn stets um eins geringer ist als die Anzahl ihrer Knotenpunkte. Im Falle $l=n$ sprechen wir von einer geordneten Permutation der Knotenpunkte des Graphen bzw. von einer *vollständigen Bahn*. Also: Eine vollständige Bahn in G enthält jeden Knotenpunkt von G. Jede beliebige Bahn ist eine vollständige Bahn des durch ihre Knotenpunkte bestimmten Teilgraphen.

Die Anzahl aller vollständigen Bahnen des Graphen G sei mit (G) bezeichnet. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Größe (G), für die das bisher einzige Resultat der *Satz von* RÉDEI [1]) ist, welcher besagt, daß (G) immer eine ungerade Zahl ist. Die Folgerung aus diesem Satz, daß G immer mindestens eine vollständige Bahn besitzt, kann durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Knotenpunkte leicht bewiesen werden [1]), doch der Beweis des Satzes selbst ist nicht ganz so einfach. Wir beweisen den Rédeischen Satz in § 2 mit einer neuen Methode. Der Satz kann nach drei Richtungen hin verallgemeinert werden:

I. Als naheliegendste Verallgemeinerung der Problemstellung des Rédeischen Satzes ist von TIBOR GALLAI-GRÜNWALD die Frage nach der Parität der Anzahl der l Knotenpunkte (d. h. $l-1$ Kanten) enthaltenden Bahnen des Graphen G auf-

*) Die folgende Arbeit enthält einige der ersten Ergebnisse des Verfassers, und ist bisher nur in ungarischer Sprache erschienen (Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban, Mat. és Fiz. Lapok 50 (1943), 223—256.) Da sich für diese Arbeit vielerorts Interesse gezeigt hat, hat sich das Redaktionskomitee entschlossen, durch Veröffentlichung derselben in deutscher Sprache die Ergebnisse des Verfassers einem weiteren Leserkreis zugänglich zu machen. Die Übersetzung wurde von den Herren A. ÁDÁM (Budapest), M. PETERSDORF und M. SCHÄUBLE (beide Ilmenau) besorgt.

[1]) Siehe D. KÖNIG, [2]; man vergl. auch die Fußnote [3]) in der Arbeit [6] von RÉDEI.

geworfen worden. RÉDEI hat gezeigt [6], daß diese Anzahl von der gleichen Parität wie $\binom{n}{l}$ ist. Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar durch Anwendung des Satzes von Rédei auf die je l Knotenpunkte enthaltenden $\binom{n}{l}$ Teilgraphen aus G gewinnen.

II. Die $n!$ Permutationen der Knotenpunkte des Graphen G seien wie folgt in n Klassen eingeteilt: Ist $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eine beliebige Permutation der Knotenpunkte und k die Anzahl derjenigen Paare aufeinanderfolgender Knotenpunkte B_iB_{i+1}, die in G durch die Kanten [2]) $\overleftarrow{B_iB_{i+1}}$ verbunden sind, so weisen wir die Permutation der k-ten Klasse zu $(0 \leqq k \leqq n-1)$. Danach entsprechen die vollständigen Bahnen von G gerade den Knotenpunktpermutationen 0-ter Klasse. Bezeichnen wir mit $(G)_k$ die Anzahl der Punktpermutationen in der k-ten Klasse, so gilt $(G)_0 = (G)$. Außerdem ist $(G)_k = (G)_{n-1-k}$, weil die Knotenpunktpermutationen der einen Klasse dieselben sind, wie die rückläufig gelesenen Permutationen der anderen Klasse. In § 3 ((8)) wird gezeigt, daß $(G)_k$ die gleiche Parität wie $\binom{n-1}{k}$ hat. Für $k=0$ ergibt sich der Rédeische Satz.

III. Jeder Teilgraph von G, der entweder aus einer einzigen Bahn oder aus mehreren Bahnen ohne gemeinsame Knotenpunkte besteht, soll *Bahnensumme* heißen. [3]) Diese Teilgraphen spielen im folgenden eine wichtige Rolle. Betrachten wir eine Bahnensumme, die aus k Kanten und s Bahnen besteht. Da jede Bahn einen Knotenpunkt mehr enthält als Kanten, gehören zur Bahnensumme $k+s$ Knotenpunkte. Deshalb gilt $k+s \leqq n$, d. h. $1 \leqq s \leqq n-k$. Daraus folgt, daß eine Bahnensumme nicht aus mehr als $n-1$ Kanten bestehen kann; ferner, weil im Falle $k=n-1$ notwendig $s=1$ ist, *ist jede Bahnensumme von G mit $n-1$ Kanten eine vollständige Bahn in G*. Die Anzahl der Bahnensummen mit k Kanten von G wirg mit $[G]_k$, bezeichnet [4]) — es ist $[G]_{n-1} = (G)$. Wir zeigen in § 4, daß $[G]_k$ von derselben Parität ist wie $\binom{r}{k}$, wo $r = \left[\frac{n+k-1}{2}\right]$ $\left(\text{größte ganze Zahl} \leqq \frac{n+k-1}{2}\right)$. Im Falle $k=n-1$ liefert auch diese Aussage nichts anderes als den Satz von Rédei. Gleichfalls in § 4 werden wir sehen, daß im Falle des „transitiv gerichteten Graphen" die $[G]_k$ mit den Stirlingschen Zahlen zweiter Art übereinstimmen, die sowohl in der Kombinatorik, als auch in der Differenzenrechnung eine große Bedeutung haben.

Mit dem Spezialfall des transitiv gerichteten Graphen beschäftigt sich, gewissermaßen als Vorbereitung der späteren Betrachtungen, der § 1.

In § 5 wird dem Graphen G ein Polynom zugeordnet, mit dessen Hilfe gewisse Beziehungen zwischen den Zahlen $[G]_k$ gewonnen werden.

Es ergibt sich, daß im Falle eines transitiv gerichteten Graphen $G_n (G_n) = 1$, d. h. nach dem Rédeischen Satz „minimal" ist. In § 6 beschäftigen wir uns

---

[2]) Eine derartige Kante soll für die Knotenpunktpermutation „negatív" gerichtet, im entgegengesetzten Falle $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ „positiv" gerichtet, heißen. In diesem Sinne werden wir davon sprechen, daß eine Punktpermutation gewisse Kanten mit positiver Orientierung, andere Kanten mit negativer Orientierung enthält.

[3]) Die Bezeichnungsweise stammt von D. KÖNIG — die Bahnensummen sind ein Spezialfall, der von ihm definierten „Summe von Graphen".

[4]) Wo es notwendig erscheint, die Anzahl der Knotenpunkte des jeweils betrachteten Graphen anzugeben, schreiben wir G_n statt G, $(G_n)_k$ statt $(G)_k$, $[G_n]_k$ statt $[G]_k$.

mit dem viel schwereren umgekehrten Problem, nämlich der Frage nach dem Maximum von (G_n) (bei festem n). Es gelang dem Autor nicht, auf diese Frage eine erschöpfende Antwort zu finden, aber es wird eine recht gute Abschätzung für das Maximum gegeben.

Abschließend sei bemerkt, daß das in § 3 gewonnene Ergebnis für die Zahlen $(G)_k$ eine interessante Anwendung in dem Permutationen betreffenden, von SCHRUTKA in [7] aufgeworfenen und gelösten Problem findet.

Um spätere Betrachtungen nicht unterbrechen zu müssen, sei der folgende *logische Satz* (von Netto „Prinzip des Ein- und Ausschließens" genannt), welcher in den Beweisen mehrfach eine Rolle spielen wird, vorausgeschickt. [5]) Unter N Elementen, von denen irgendeines die Eigenschaften $a_1, a_2, a_3, \ldots$ haben kann, sei die Anzahl derjenigen Elemente, welche die Eigenschaft a_i haben gleich N_{a_i}, die Anzahl der Elemente, die die Eigenschaften a_i und a_k gleichzeitig aufweisen, gleich $N_{a_i a_k}$, usw. Dann ist die *Anzahl der Elemente, welche keine der in Betracht gezogenen Eigenschaften haben*, gleich

$$N_0 = N - \sum N_{a_1} + \sum N_{a_1 a_2} - \sum N_{a_1 a_2 a_3} + \ldots, \tag{1}$$

wobei die l-te Summe über die sämtlichen l-gliedrigen wiederholungsfreien Kombinationen, die aus den Eigenschaften gebildet werden können, zu erstrecken ist.

Wir fügen dem Satz die folgende leicht einzusehende Verallgemeinerung hinzu, von der in § 3 gleichfalls Gebrauch gemacht wird: *Die Anzahl der Elemente, die genau k der Eigenschaften haben, ist gleich*

$$N_k = \sum N_{a_1 a_2 \ldots a_k} - \binom{k+1}{1} N_{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} + \binom{k+2}{2} N_{a_1 a_2 \ldots a_{k+2}} - \ldots. \tag{2}$$

Auf der rechten Seite von (2) sind nämlich die Elemente, die weniger als k der Eigenschaften $a_1, a_2, \ldots$ aufweisen, nicht vertreten. Diejenigen Elemente, die genau k der Eigenschaften haben, beeinflussen nur die erste Summe. Für $l > k$ trägt jedes Element, das genau l der Eigenschaften hat, zum Wert des Ausdrucks (2) gerade

$$\binom{l}{k} - \binom{k+1}{1}\binom{l}{k+1} + \binom{k+2}{2}\binom{l}{k+2} - \ldots =$$

$$= \binom{l}{k} - \binom{l}{1}\binom{l-1}{k} + \binom{l}{2}\binom{l-2}{k} - \ldots = 0$$

bei. Die letzte kombinatorische Beziehung läßt sich auf Grund von (1) folgendermaßen einsehen: Betrachtet man die k-gliedrigen wiederholungsfreien Kombinationen aus den Zahlen $1, 2, \ldots, l$ als Elemente und sagt man, ein derartiges Element habe die Eigenschaft a_i, wenn die Zahl i in ihm nicht vorkommt. Der obige Ausdruck gibt dann laut (1) die Anzahl der Kombinationen an, die keine der in Betracht kommenden Eigenschaften haben, mithin ist sein Wert in der Tat gleich 0, weil eine solche k-gliedrige Kombination jede der Zahlen $1, 2, \ldots, l$ enthalten sollte, obwohl $l > k$ vorausgesetzt war.

[5]) Siehe PÓLYA—SZEGŐ, [5], Abschnitt VIII, Kapitel 1, § 21, s. 119. Ferner: Skolem: Gruppierungen, kombinatorische Reziprozitäten, Paarsysteme, Nachtrag (Kap. 15) zu Netto, „Lehrbuch der Kombinatorik", 2. Auflage (Leipzig & Berlin, 1927), S. 282. Dieses Buch wird i. w. als „Netto" zitiert.

§ 1

Mit G^* sei der transitiv-gerichtete vollständige Graph bezeichnet, der in mehrfacher Hinsicht eine einfache Struktur aufweist. *G^* heißt transitiv gerichtet, wenn der Graph mit den Kanten $\overrightarrow{A_iA_k}$ und $\overrightarrow{A_kA_l}$ auch die Kante $\overrightarrow{A_iA_l}$ enthält.* [6]) [7]) In G^* gibt es offenbar keine zwei Knotenpunkte, von denen je gleich viele (nach außen) gerichtete Kanten ausgehen. Sind nämlich C und D zwei beliebige Knotenpunkte, die durch die Kante $\overrightarrow{CD}$ verbunden sind, so geht zu allen Knotenpunkten $X(X \neq D)$, die mit D durch die Kante $\overrightarrow{DX}$ verbunden sind, auch die Kante $\overrightarrow{CX}$. Demnach entspringt in C mindestens eine (nach außen gerichtete) Kante mehr als in D.

Durch die Forderung der transitiven Orientierung ist also die Struktur des Graphen G^* eindeutig bestimmt. [8]) Da in G^* je zwei Knotenpunkte eine verschiedene Anzahl auslaufender Kanten besitzen, so kann man die Knotenpunkte von G^* so numerieren, daß $n-1 \geqq a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n \geqq 0$ gilt, wenn a_k die Anzahl der von A_k auslaufenden Kanten bedeutet. D. h. a_k muß der Bedingung $a_k = n-k$ genügen. Das bedeutet für die mit A_1 indizierenden Kanten, daß sie alle nach außen orientiert sind, für die mit A_2 indizierenden Kanten, daß sie mit Ausnahme von $\overrightarrow{A_1A_2}$ nach außen gerichtet sind, usw. Wir können also die Knotenpunkte von G^* immer so numerieren, daß von jedem Knotenpunkt aus zu den Punkten mit höherem Index — und nur zu diesen — Kanten führen. Die Knotenpunkte von G^* seien von nun an immer in dieser Weise numeriert.

G^* besitzt genau eine vollständige Bahn, nämlich die Bahn $\overrightarrow{A_1, A_2 \dots A_n}$, denn jede andere Permutation der Indizes $1, 2, \dots, n$ enthält ein in Inversion stehendes benachbartes Paar von Knotenpunkten, so daß die mit diesen Knotenpunkten indizierende Kante in dem entsprechenden Kantenzug in der zur vorgeschriebenen engegengesetzten Orientierung auftritt.

Die Eigenschaft von G^*, nur eine vollständige Bahn zu besitzen, ist kennzeichnend für den transitiv gerichteten Graphen. Es gilt nämlich auch die Umkehrung: *Besitzt der Graph G genau eine vollständige Bahn, so ist G transitiv gerivhtet.*

Beweis. Wir numerieren die Knotenpunkte von G so, daß $\overrightarrow{A_1A_2\dots A_n}$ diese einzige vollständige Bahn darstellt. Es ist zu zeigen, daß von jedem Knotenpunkt aus zu den Punkten mit größerem Index — und nur zu diesen — Kangten führen. Angenommen, der Graph enthält eine Kante mit „Ausnahme-Orientierung", d.h. eine Kante, die von einem Punkte mit größerem Index zu einem Punkte mit kleinerem Index führt. Wir betrachten den Knotenpunkt A_i mit kleinstem Index, zu dem eine Kante mit Ausnahme-Orientierung führt, und es sei j der größte Index, für den die Kante $\overrightarrow{A_jA_i}$ Ausnahme-Orientierung hat $(j > i)$, so daß die Kanten $\overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}}$

[6]) Im entgegengesetzten Falle bilden die Kanten A_iA_k, A_kA_l, A_lA_i ein zyklisches Dreieck.

[7]) Aus der Definition folgt, daß ein transitiv gerichteter Graph keinen Zyklus enthält. Umgekehrt ist auch jeder Graph ohne Zyklen transitiv orientiert.

Der Begriff des „transitiv gerichteten Graphen" stammt von D. König [2], p. 93. Für den transitiv gerichteten vollständigen Graphen benutzt König die Bezeichnung „Ordnungsgraph", [2], p. 108—109.

[8]) Man versteht darunter, daß zwei transitiv gerichtete vollständige Graphen mit gleich vielen Knotenpunkten richtungsisomorph aufeinander abgebildet werden können.

und $\overrightarrow{A_i A_{j+1}}$ mit der angegebenen Orientierung auftreten. Dann wäre aber

$$\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_j A_i A_{j+1} \dots A_n}$$

eine zweite vollständige Bahn des betrachteten Graphen, im Widerspruch zur Annahme.[9]) Infolgedessen hat der Graph G keine Kante mit Ausnahme-Orientierung, q. e. d.

§ 2

Ein beliebig gerichteter vollständiger Graph G läßt sich also aus dem Graphen G^* (mit gleich vielen Knotenpunkten) durch Umkehrung der Orientierung gewisser Kanten gewinnen. Und da G^* genau eine vollständige Bahn besitzt, ist der Satz von Rédei mit folgender Aussage gleichwertig: *Wird die Orientierung einer beliebiegen Kante des Graphen G umgekehrt, dann ändert sich (G) um eine gerade Zahl.*

Bezeichnen wir den Graphen, der durch die Umkehrung der Orientierung der Kante $\vec{e}$ entsteht, mit G', und die Anzahl derjenigen vollständigen Bahnen, die in G die Kante $\vec{e}$ bzw. in G' die Kante $\overleftarrow{e}$ enthalten, mit $(G)_{\vec{e}}$ bzw. $(G')_{\overleftarrow{e}}$. Weil die übrigen vollständigen Bahnen in den beiden Graphen übereinstimmen, haben wir zu zeigen:

$$(G')-(G) = (G')_{\overleftarrow{e}} - (G)_{\vec{e}} \equiv (G')_{\overleftarrow{e}} + (G)_{\vec{e}} \equiv 0 \pmod 2 \tag{3}$$

In folgendem wollen wir zulassen, daß in einem endlichen vollständigen Graphen nur einige Kanten gerichtet sind. Unter einer *vollständiger Bahn* eines solchen Graphen verstehen wir jede derartige Knotenpunktpermutation, in der keine Kante von „negativer Orientierung" vorkommt. [10]) Dann ist die Summe $(G')_{\overleftarrow{e}} + (G)_{\vec{e}}$ gleich der Anzahl der die nicht-gerichtete Kante e enthaltenden vollständigen Bahnen desjenigen Graphen G'', den man aus G enthält, indem man die gerichtete Kante $\vec{e}$ durch die nichtgerichtete Kante e ersetzt. Infolgedessen ergibt sich die Richtigkeit von (3) aus der Aussage:

Werden nur einige (aber nicht alle) Kanten des vollständigen Graphen mit n Knotenpunkten gerichtet, so ist die Anzahl derjenigen vollständigen Bahnen des Graphen, die mindestens eine nichtgerichtete Kante enthalten, gerade.

In diesem Paragraphen bezeichnen wir *diesen* (teilweise gerichteten) Graphen mit G und den aus den gerichteten Kanten von G bestehenden Teilgraphen mit $\vec{G}$. Die Anzahl der vollständigen Bahnen, auf welche sich unsere Aussage bezieht, ist gleich $(G)-(\vec{G})$, wenn $(\vec{G})$ die Anzahl derjenigen vollständigen Bahnen von G bezeichnet, die *nur* gerichtete Kanten enthalten. Unsere Aussage bedeutet also, daß

$$(G) \equiv (\vec{G}) \pmod 2 \tag{4}$$

ist. Dies wird im folgenden gezeigt.

---

[9]) Auch die Fälle $i=1$ und $j=n$ bilden keine Ausnahmen.

[10]) In einer solchen Permutation können also auch Knotenpunkte aufeinanderfolgen, die durch eine nicht-gerichtete Kante verbunden sind (und zwar in beliebiger Reihenfolge).

Die Knotenpunktpermutation $B_1B_2...B_n$ bestimmt offenbar dann und nur dann eine vollständige Bahn, wenn die in bezug auf die letztgenannte Permutation umgekehrte Permutation $B_nB_{n-1}...B_1$ keine positiv gerichtete Kante enthält. (s. Fußnote [2])). Infolgedessen ist (G) gleich der Anzahl derjenigen Knotenpunktpermutationen von G, die keine positiv gerichtete Kante enthalten. Diese Anzahl soll hier mittels Formel (1) bestimmt werden. Zu diesem Zweck seien die sämtlichen $N=n!$ Knotenpunktpermutationen von G „Elemente" genannt. Die Kanten von $\vec{G}$ seien beliebig numeriert, und die Eigenschaft a_i denjenigen Punktpermutationen (und nur diesen) zugeschrieben, die die i-te Kante von $\vec{G}$ mit *positiver Orientierung* enthalten. Damit ist die Anzahl der Knotenpunktpermutationen, die keine dieser Eigenschaften enthalten, gemäß der obigen Überlegung gleich (G). Es soll nun der Wert der k-ten Summe auf der rechten Seite von (1) für den vorliegenden Fall bestimmt werden. Diese Summe besteht aus so vielen Summanden, wie es Möglichkeiten gibt, k Kanten aus dem Teilgraphen $\vec{G}$ so auszuwählen, daß eine Punktpermutation mit nur positiver Kantenorientierung auftritt. Die ausgewählten Kanten bilden dann notwendig eine Bahnensumme[11]) (nach Abschnitt III der Einleitung ist also in jedem Falle $k \leqq n-1$). Ferner zeigen wir, daß jede Kante einer beliebigen der $[\vec{G}]_k$ Bahnensummen, die aus dem Teilgraphen $\vec{G}$ ausgewählt werden können und k Kanten enthalten, in *genau* $(n-k)!$ *Knotenpunktpermutationen* mit positiver Orientierung aftritt, so daß der Wert der k-ten Summe auf der rechten Seite von (1) gleich $(n-k)!\,[\vec{G}]_k$ ist.

Zum Beweis betrachten wir eine derartige Bahnensumme mit k Kanten, die aus s Bahnen bestehen möge und demnach $k+s$ Knotenpunkte enthält. Nun können die Punktpermutationen, in denen die Kanten der ausgewählten Bahnensumme (mit positiver Orientierung) auftreten, offenbar so gewonnen werden, daß wir die s Bahnen der Summe und die durch sie nicht verwendeten $n-(k+s)$ Punkte permutieren. Weil auf diese Art insgesamt $(n-k)$ Elemente permutiert werden, ist die Anzahl aller Möglichkeiten tatsächlich $(n-k)!$

Damit folgt aus (1) für die Anzahl der vollständigen Bahnen von G:

$$(G) = n! - (n-1)!\,[\vec{G}]_1 + (n-2)!\,[\vec{G}]_2 - \dots + \\ + (-1)^{n-2}\,2!\,[\vec{G}]_{n-2} + (-1)^{n-1}\,[\vec{G}]_{n-1}. \tag{5}$$

Infolgedessen ist

$$(G) \equiv [\vec{G}]_{n-1} \qquad (\text{mod } 2).$$

Unter Beachtung von $[\vec{G}]_{n-1} = (\vec{G})$ [12]) erhalten wir die zu bewiesende Relation (4).

[11]) Die positiv gerichteten Kanten einer beliebigen Punktpermutation dürfen nämlich als eine (eventuell nicht echte) Teilmenge der Kanten einer vollständigen Bahn aufgefaßt werden. Sie bilden daher offenbar eine Bahnensumme.

[12]) Die kann wie die Beziehung $[G]_{n-1} = (G)$ für den gerichteten vollständigen Graphen (Abschnitt III der Einführung) eingesehen werden.

§ 3

Im folgenden bezeichne G wieder einen vollständigen Graphen mit n Knotenpunkten, in dem jede Kante gerichtet ist. Der Teilgraph $\vec{G}$ ist jetzt mit G identisch, und es kann die Gleichung (5) für die Anzahl der vollständigen Bahnen, d. h. der Punktpermutationen 0-ter Klasse im Sinne der Definition von Abschnitt II der Einführung) als

$$(G) = (G)_0 = n! - (n-1)![G]_1 + (n-2)![G]_2 - \ldots + (-1)^{n-1}[G]_{n-1} \tag{6}$$

geschrieben werden. Für die Anzahl der Knotenpunktpermutationen k-ter Klasse, in die wir diejenigen Permutationen eingeteilt hatten, in denen genau k negativ orientierte Kanten auftraten, kann man einen ähnlichen Zusammenhang herleiten. Die Inversen dieser Permutationen enthalten genau k *positiv* gerichtete Kanten, so daß also $(G)_k$ auch als Anzahl der Knotenpunktpermutationen mit k positiv gerichteten Kanten bestimmt werden kann. Wir bezeichnen wieder die Punktpermutationen des Graphen G als „Elemente" und verstehen unter den „Eigenschaften" weiterhin, daß irgendeine Permutation eine Kante mit positiver Orientierung enthält. Unserer vorangestellten Bemerkung gemäß ist die in (2) vorkommende Größe N_k nun gleich $(G)_k$. Die Summen auf der rechten Seite von (2) sind die gleichen wie die in (1) auftretenden. Letztere sind aber durch (6) gegeben. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}(G)_k = (n-k)!\,[G]_k - \binom{k+1}{1}(n-k-1)!\,[G]_{k+1} + \\ + \binom{k+2}{2}(n-k-2)!\,[G]_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-1-k}\binom{n-1}{n-1-k}[G]_{n-1}\end{aligned} \tag{7}$$

d. h.

$$(G)_k \equiv \binom{n-1}{n-1-k}[G]_{n-1} = \binom{n-1}{k}[G]_{n-1} \qquad (\mathrm{mod}\ 2).$$

Aus dieser Kongruenz ergibt sich mit Rücksicht auf den Rédeischen Satz

$$-[G]_{n-1} = (G) \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

die in Abschnitt II der Einführung angekündigte Verallgemeinerung des Satzes

$$(G)_k \equiv \binom{n-1}{k} \qquad (\mathrm{mod}\ 2) \tag{8}$$

(7) und die Gleichungen $(G)_k = (G)_{n-1-k}$ $\left(k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)$ liefern gewisse Aussagen über die Zahlen $[G]_k$ — in § 5 werden wir jedoch statt dieser Gleichungen ein mit ihnen äquivalentes, aber übersichtlicheres Gleichungssystem erhalten. [13])

[13]) Dies kann durch eine etwas langwierige, aber durchaus elementare Rechnung nachgewiesen werden.

Wenden wir (7) auf den Fall des transitiv gerichteten Graphen G^* an, dessen Knotenpunkte so numeriert sein sollen, daß aus jedem Knotenpunkt in die Punkte mit größerem Index je eine Kante hineinführt!

Die Knotenpunktpermutationen k-ter Klasse des Graphen G^* können durch diejenigen Permutationen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ angegeben werden, in denen genau k benachbarte Paare von Elementen Inversionen bilden.

$(G^*)_k$, die Anzahl dieser Permutationen, [14]) kann mittels (7) berechnet werden, wenn man für die $[G^*]_i$ ihren Wert, nämlich

$$[G^*]_i = \frac{1}{(n-i)!} \sum_{l=0}^{n-i-1} (-1)^l \binom{n-i}{l} (n-i-l)^n$$

einsetzt (Die formel für den Wert der $[G^*]_i$ wird in § 4 hergeleitet werden; s. (10)).

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}(G^*)_k = {} & \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \binom{n-k}{l} (n-k-l)^n - \\ & -\binom{k+1}{1} \sum_{l=0}^{n-k-2} (-1)^l \binom{n-k-1}{l} (n-k-1-l)^n + \\ & +\binom{k+2}{2} \sum_{l=0}^{n-k-3} (-1)^l \binom{n-k-2}{l} (n-k-2-l)^n - \ldots + (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} = \\ & = \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \left\{ \binom{n-k}{l} + \binom{k+1}{1}\binom{n-k-1}{l-1} + \right. \\ & \left. + \binom{k+2}{2}\binom{n-k-2}{l-2} + \ldots + \binom{k+l}{l} \right\} (n-k-l)^n = \\ & = \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \binom{n+1}{l} (n-k-l)^n;\end{aligned} \tag{9}$$

Beim Übergang von der vorletzten zur letzten Gleichheit wurde die Identität

$$\binom{k}{0}\binom{n-k}{l} + \binom{k+1}{1}\binom{n-k-1}{l-1} + \ldots + \binom{k+l}{l}\binom{n-k-l}{0} = \binom{n+1}{l}$$

benutzt. Dieser bekannte kombinatorische Zusammenhang kann folgendermaßen leicht eingesehen werden [15]): Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, l Kugeln aus $k+1$ roten und $n-k-l+1$ grünen (insgesamt $n-l+2$) Kugeln herauszugreifen, wenn die herausgegriffenen Kugeln vor jeder neuen Ziehung jeweils zurückgelegt werden und die Reihenfolge der Kugeln keine Rolle

[14]) Siehe [7], p. 246. Das Ergebnis von. L. Schrutka ergibt sich aus dem obigen unter Beachtung von $(G^*)_k = (G^*)_{n-1-k}$.

[15]) Siehe [4], p. 251, (26).

spielt. Die Anzahl ist offenbar gleich der Anzahl der l-gliedrigen Kombinationen mit Wiederholungen aus $n-l+2$ Elementen, also gleich $\binom{n+1}{l}$. Auf der linken Seite der benutzten Identität sind nun gerade die Anzahlen derjenigen Ziehungsmöglichkeiten summiert, die den Fällen entsprechen, in denen sämtliche Kugeln rot bzw. grün, die anderen grün bzw. rot sind, unw.

§ 4

Zu der in Abschnitt III der Einführung angedeuteten Verallgemeinerung des Rédeischen Satzes gelangen wir in den folgenden drei Schritten: Wir berechnen die Zahlen $[G^*]_k$, sodann zeigen wir, daß im Falle eines beliebig gerichteten vollständigen Graphen G die Zahl $[G]_k$ die gleiche Parität hat wie $[G^*]_k$ und stellen schließlich die Parität von $[G^*]_k$ fest.

I. Betrachten wir eine Bahnensumme des Graphen G^*, die aus k Kanten besteht; wie früher mitgeteilt enthält eine solche Bahnensumme $k+s$ Knotenpunkte, wenn sie aus s Bahnen besteht. Wir teilen sämtliche Punkte von G^* in Klassen ein, so daß die Punkte einer jeden Bahn der ausgewählten Bahnensumme eine Klasse bilden und jeder der übrigen $n-(k+s)$ Punkte für sich eine Klasse darstellt. Die Anzahl aller Klassen ist unabhängig von s gleich $n-k$. Jede *Klasseneinteilung* der Punkte von G^* ist *durch die ausgewählte Bahnensumme eindeutig* bestimmt.

Umgekehrt: Wenn die n Knotenpunkte von G^* derart in $n-k$ Klassen eingeteilt werden, daß jeder Punkt in einer und nur einer Klasse auftritt und daß jede Klasse mindestens einen Punkt enthält, dann ist durch diese Einteilung eine Bahnensumme von G^* mit genau k Kanten eindeutig bestimmt: Zuerst seien diejenigen Klassen betrachtet, die mehr als einen Knotenpunkt enthalten und jede dieser Klassen werde durch die Bahn repräsentiert, welche die in ihr enthaltenen Knotenpunkte verbindet (in G^* ist diese Bahn wegen der transitiven Orientierung eindeutig bestimmt). Die den betrachteten Klassen entsprechenden Bahnen bilden eine Bahnensumme, da sie punktfremd sind. Wir wollen sagen, daß die übrigen, je einen Knotenpunkt enthaltenden Klassen durch „Bahnen mit 0 Kanten" repräsentiert werden. Damit ist jeder der $n-k$ Klassen je eine Bahn zugeordnet, deren Kantenzahl um eins geringer ist als die Anzahl der Knotenpunkte, die ihr angehören. Folglich ist die Anzahl der Kanten der durch die gegebene Klasseneinteilung eindeutig bestimmten Bahnensumme wirklich gleich $n-(n-k)=k$.

$[G^*]_k$ *ist demgemäß gleich der Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente in $(n-k)$ nicht-leere Klassen einzuteilen.*

Nimmt man vorübergehend an, daß die Klassen von 1 bis $n-k$ numeriert sind und die Reihefolge der Klassen in einer Einteilung wesentlich sei, so ist die Anzahl der Einteilungen gleich $(n-k)!\ [G^*]_k$. Diese Zahlen können mittels der logischen Formel (1) bestimmt werden.[16] Vorübergehend sei gestattet, daß gewisse Klassen leer bleiben. Weil jeder Knotenpunkt in eine jede der Klassen eingeordnet weden kann, beträgt die Anzahl der möglichen Einteilungen $N=(n-k)^n$.

---

[16]) Die Ausführung der dazu notwendigen Berechnungen kann man in der zitierten Arbeit von Skolem finden; [4], p.283.

Sagen wir, daß die Einteilung die Eigenschaft a_i besitzt, wenn die i-te Klasse leer bleibt, so hat die l-te Summe auf der rechnen Seite in Gleichung (1) den Wert $\binom{n-k}{l}(n-k-l)^n$, denn die leer bleibenden l Klassen können auf $\binom{n-k}{l}$ verschiedene Arten ausgewählt, die übrigen $n-k-l$ Klassen auf $(n-k-l)^n$ Weisen besetzt werden. Wegen $N_0=(n-k)![G^*]_k$ gilt folglich

$$(n-k)!\,[G^*]_k = (n-k)^n - \binom{n-k}{1}(n-k-1)^n +$$

$$+\binom{n-k}{2}(n-k-2)^n - \ldots + (-1)^{n-k-1}\binom{n-k}{n-k-1}$$

d. h.

(10)
$$[G^*]_k = [G_n^*]_k = \frac{1}{(n-k)!}\sum_{l=0}^{n-k-1}(-1)^l\binom{n-k}{l}(n-k-l)^n =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{m}{l}(m-l)^n$$

mit $m = n-k$.

Die durch (10) gegebenen Zahlen sind mit den Stirlingschen Zahlen zweiter Art $\mathfrak{S}_n^m$ identisch:

(10a) $$[G_n^*]_k = \mathfrak{S}_n^m = \mathfrak{S}_n^{n-k}\ ^{17})$$

Für (10) läßt sich unter Benutzung des Δ-Differenzoperators kürzer schreiben:

(10b) $$[G_n^*]_k = \frac{\Delta^{n-k}x^n}{(n-k)!}\bigg|_{x=0} = \mathfrak{S}_n^{n-k}\ ^{18})$$

II. Verstehen wir unter G nun einen n Knotenpunkte enthaltenden beliebig gerichteten vollständigen Graphen, dann können wir bei der Bestimmung der aus k Kanten bestehenden Bahnensummen in G wieder so vorgehen, daß wir die Punkte des Graphen auf alle möglichen Arten in $(n-k)$ Klassen einteilen. Zu jeder Einteilung gehören jetzt jedoch i. a. mehrere Bahnensummen.

Im transitiv gerichteten Graphen sind die Bahnensummen eindeutig bestimmt. Eine Einteilung der n Knotenpunkte des Graphen G_n in $n-k$ Klassen soll „geordnet" heißen, wenn die Knotenpunkte innerhalb jeder Klasse je eine geordnete Variation bilden. $[G_n]_k$ ist folglich gleich der Anzahl der geordneten Einteilungen der n Punkte von G_n in $n-k$ Klassen. Sei im transitiv gerichteten Graphen $G_n^*\{K_1^{(i)}, K_2^{(i)}, \ldots, K_{n-k}^{(i)}\}$ die i-te Klasseneinteilung $(i=1, 2, \ldots, [G_n^*]_k)$. Im beliebig gerichteten vollständigen Graphen G_n erhält man aus dieser $m_1^{(i)}m_2^{(i)}\ldots m_{n-k}^{(i)}$ verschiedene Klasseneinteilungen, wofern $m_\varrho^{(i)}$ die Anzahl der volständigen Bahnen in der ϱ-ten Klasse bedeutet $(\varrho=1, \ldots, n-k)$ und die Anzahl der vollständigen

[17]) Siehe CH. JORDAN p. 169(3). Das Werk wird kurz mit „Jordan" zitiert.

[18]) Siehe [1], p. 168. (1).

Bahnen in Klassen, die nur einen einzigen Punkt enthalten, gleich 1 gesetzt wird. Demnach gilt

$$[G_n]_k = \sum_{i=1}^{[G_n^*]_k} m_1^{(i)} \dots m_{n-k}^{(i)}.$$

Die Zahlen $m_\varrho^{(i)}$ sind nach dem Rédeischen Satze sämtlich ungerade, so daß

$$(11) \qquad [G_n]_k \equiv [G_n^*]_k \pmod 2.$$

Als Anzahl der Möglichkeiten, n Punkte in jeweils n nichtleere Klassen einzuteilen, ist $[G_n]_0 = [G_n^*]_0 = 1$. Ferner gilt $[G_n]_1 = [G_n^*]_1 = \binom{n}{2}$ als Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur 2-ten Klasse ohne Berücksichtung der Anordnung. Bezeichnen wir mit $c_3(G_n)$ die Anzahl der zyklischen Dreiecke des Graphen G_n (s. Fußnote [6])), so finden wir zwischen $[G_n]_2$ und $[G_n^*]_2$ die Beziehung:

$$(12) \qquad [G_n]_2 = [G_n^*]_2 + 2c_3(G_n).$$

Beweis. Eine Bahnensumme mit zwei Kanten besteht entweder aus zwei Kanten ohne gemeinsamen Endpunkt oder aus einer Bahn mit zwei Kanten. Im 1. Falle gibt es sowohl in G_n^* als auch in G_n genau eine Möglichkeit der Realisierung bei festgehaltenen Knotenpunkten.

Den 2. Fall können wir verwirklichen, indem wir in beiden Graphen je 3 Knotenpunkte auswählen und diese durch eine Bahn mit 2 Kanten verbinden. In G_n^* ist das auf genau eine Weise, in G_n dagegen auf 3 verschiedene Weisen oder genau eine möglich — je nachdem ob die ausgewählten Punkte ein zyklisch oder transitiv gerichtetes Dreieck bestimmen. Womit (12) bewiesen ist.

III. Gemäß (11) genügt es, die Parität der Zahlen $[G_n^*]_k$ zu bestimmen. Bei der Bestimmung der Parität von $[G_n^*]_k$ benutzt man zweckmäßig, daß $[G_n^*]_k$ gleich der Summe über alle k-gliedrigen Produkte von Kombinationen mit Wiederholung ist, die aus den Zahlen $1, 2, \dots, n-k$ gebildet werden können. [19]) (Ein Zusammenhang, der übriges die kombinatorische Bedeutung der Stirlingschen Zahlen 2. Art deutlich werden läßt).

Betrachten wir Klasseneinteilungen der Bahnensummen mit k Kanten des Graphen G_n^* danach, in welche k Knotenpunkte die Kanten der Bahnensummen gerichtet sind. Diese bilden eine k-gliedrige Kombination der Punkte $A_2, \dots, A_n$.

Sei nun $i_1, i_2, \dots, i_k$ eine fest Indexkombination $(2 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n)$ und bestimmen wir die Anzahl der Bahnensummen mit k Kanten, deren Kanten genau in die Punkte $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ gerichtet sind. Nach A_{i_r} sind $i_r - 1$ Kanten gerichtet $(r = 1, \dots, k)$. Wählt man eine beliebige nach A_{i_1} laufende Kante aus, so darf eine nach A_{i_2} laufende Kante nur so ausgewählt werden, daß sie mit der zuerst gekennzeichneten Kante nicht im gleichen Knotenpunkt entspringt [20]), d. h. für die Wahl der zweiten Kante verbleiben $(i_2 - 2)$ Möglichkeiten, für die der dritten $(i_3 - 3)$,

[19]) Siehe [1], p. 176.

[20]) Ohne diese Einschränkung würden auch Bahnen mit gemeinsamen Anfangspunkten in die Betrachtungen einbezogen; die Bahnen einer Bahnensumme sollten jedoch punktfremd sein.

usw. Also ist die Anzahl der Bahnensummen, die zur Punktkombination $A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ gehören, gleich

$$(i_1-1)(i_2-2)\ldots(i_k-k).$$

Die Faktoren dieses Produktes bilden eine Kombination mit Widerholungen aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n-k$.

Umgekehrt ergibt das Produkt der Glieder jeder Kombination mit Wiederholung $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \leqq j_1 \leqq j_2 < \ldots < j_k \leqq n-k)$ gerade die Anzahl derjenigen Bahnensummen von G_n^*, deren Kanten in die Punkte mit den Indizes $j_1+1, j_2+2, \ldots, j_k+k$ gerichtet sind. Damit ist unsere Behauptung gerechtfertigt! Demnach hat $[G_n^*]_k$ die gleiche Parität wie die Anzahl derjenigen der betrachteten Produkte, deren Wert ungeradzahlig ist, d. h. die gleiche Parität wie die Anzahl der Möglichkeiten, aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n-k$ k ungerade Zahlen mit Wiederholungen auszuwählen.

Da von diesen Zahlen $\left[\frac{n-k+1}{2}\right]$ ungeradzahlig sind, erhalten wir wegen

$$\left[\frac{n-k+1}{2}\right]+k-1=\left[\frac{n+k-1}{2}\right]$$

und (11) das Resultat

$$[G_n]_k \equiv [G_n^*]_k \equiv \binom{\left[\frac{n+k-1}{2}\right]}{k} \pmod 2. \tag{13}$$

§ 5

Die Stirlingschen Zahlen 2-ter Art $\mathfrak{S}_n^m$ werden in der Diffrenzenrechnung durch die Umordnung der Potenz x^n nach Faktoriellen, d. h. durch die Identität [21])

$$x^n = \mathfrak{S}_n^1 x + \mathfrak{S}_n^2 x(x-1) + \mathfrak{S}_n^3 x(x-1)(x-2) + \ldots$$

$$+ \mathfrak{S}_n^n x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{S}_n^k (x)_k,$$

gewonnen. $(x)_k$ bezeichnet dabei die in der Differenzenrechnung gebräuchliche Abkürzung $(x)_k = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$.

Die in der Identität auftretenden Koeffizienten $\mathfrak{S}_n^m$ sind nach (10b) eindeutig bestimmt. Wegen (10a) gilt.

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} [G_n^*]_{n-k} (x)_k . \tag{14}$$

Für (14) soll jetzt ein kombinatorischer Beweis gegeben werden!

---

[21]) Siehe [1], p. 168, (2).

Sei x eine beliebige ganze positive Zahl. Wir betrachten x voneinander durch die Ordnungszahlen $1, 2, \ldots, x$ unterschiedene Klassen, in die wir die Knotenpunkte des Graphen G_n^* auf alle möglichen Arten (leerbleibende Klassen gestattet) einteilen. Die Anzahl der Einteilungsmöglichkeiten beträgt x^n. Es seien nun diejenigen Einteilungen betrachtet, die genau k nichtleere Klassen enthalten ($k=1, 2, \ldots, n$). Diese k Klassen können auf $\binom{x}{k}$ verschiedene Arten ausgewählt werden. Für jede nichtleere Einteilung der n Knotenpunkte von G_n^* in k nichtleere Mengen gibt es $k!$ verschiedene Möglichkeiten, k ausgewählte Klassen zu besetzen. Da nach § 4 die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, n Elemente in $n-k$ nichtleere Klassen einzuteilen gleich $[G_n^*]_k$ ist, ergibt sich für die Anzahl der hier betrachteten Klasseneinteilungen

$$k!\binom{x}{k}[G_n^*]_{n-k} = [G_n^*]_{n-k}(x)_k.$$

Summation über k ($k=1, 2, \ldots, n$) liefert die Beziehung (14). Analog zu (14) führen wir für den beliebig gerichteten vollständigen Graphen G das Polynom

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}[G]_{n-k}(x)_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\, x^i \tag{15}$$

ein. Die Koeffizienten b_i sind ganze Zahlen. Interessant ist, daß ihre Summe vermöge $f(1)=[G]_{n-1}=(G)$ die Anzahl der vollständigen Bahnen des Graphen G angibt. Die b_i ($i=1, 2, \ldots, n-1$) sind sämtlich gerade Zahlen [22]), dagegen ist $b_n=[G]_0=1$. Ordnet man nämlich $f(x)$ mittels der Stirlingschen Zahlen 1. Art nach Potenzen von x um [23]), so erhält man

$$(x)_k = S_k^1\, x + S_k^2\, x^2 + \ldots + S_k^k\, x^k,$$

mit $S_k^k=1$.

Der Koeffizient b_{n-l} ergibt sich aus (15) zu

$$b_{n-l} = S_n^{n-l}\,[G]_0 + S_{n-1}^{n-l}[G]_1 + S_{n-2}^{n-l}[G]_2 + \ldots + S_{n-l}^{n-l}[G]_l. \tag{16}$$

(14) zeigt andererseits

$$S_n^{n-l}\,[G^*]_0 + S_{n-1}^{n-l}[G^*]_1 + S_{n-2}^{n-l}[G^*]_2 + \ldots + S_{n-l}^{n-l}[G^*]_l = 0.$$

Indem man diese Gleichung von (16) subtrahiert, findet man unter Berücksichtigung von $[G]_0=[G^*]_0$ und $[G]_1=[G^*]_1$:

$$b_{n-l} = S_{n-2}^{n-l}([G]_2-[G^*]_2) + S_{n-3}^{n-l}([G]_3-[G^*]_3) + \ldots + S_{n-l}^{n-l}([G]_l-[G^*]_l)$$

und mit (11) folgt daraus die Behauptung.

Für $l=2$ erhält man als Folge von (12) das Resultat

$$b_{n-2} = 2c_3(G_n). \tag{16a}$$

[22]) und zwar, wie wir vermuten, nicht negative gerade Zahlen.

[23]) Siehe [1], p. 143 (3). — Unter den Stirlingschen Zahlen erster Arrt (im Gegensatz zu denen zweiter Art) gibt es auch ungerade Zahlen.

Wir zeigen weiter $b_{n-1}=0$ für ungerades l, was gleichbedeutend mit dem Bestehen der Identität

$$f(x)=(-1)^n f(-x) \tag{17}$$

ist, die wir anschließend auf kombinatorischem Wege beweisen wollen.

$f(x)$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, die Punkte des Graphen G in x Klassen geordnet einteilen zu können.

Wegen $(-x)_k = (-1)^k(x+k-1)$ läßt sich (17) in der Gestalt

$$(-1)^n f(-x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k [G]_{n-k}(x+k-1)_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [G]_k (x+n-1-k)_{n-k}$$

schreiben. Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(x-1)!(-1)^n f(-x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n+x-1-k)!\,[G]_k.$$

Ein Vergleich mit (5) zeigt, daß dieser Ausdruck die Anzahl der vollständigen Bahnen eines teilweise gerichteten vollständigen Graphen $\mathfrak{G}$ angibt, der aus G wie folgt gewonnen werden kann:

Wir nehmen zu den n Knotenpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des Graphen G die Knotenpunkte $B_1, B_2, \ldots, B_{x-1}$ hinzu und verbinden jedes Punktepaar A_iB_j bzw. B_kB_l durch eine nichtgerichtete Kante. Der gerichtete Anteil des auf die beschriebene Weise erhaltenen vollständigen Graphen $\mathfrak{G}$ mit $n+x-1$ Knotenpunkten bildet den Graphen G. Somit bekommen wir mit Hilfe der Relation (5) tatsächlich

$$(-1)^n f(-x) = \frac{(\mathfrak{G})}{(x-1)!}$$

(Mit Rücksicht auf $[G]_{n+m}=0$ für $m \geqq 0$).

Daher gibt $\dfrac{(\mathfrak{G})}{(x-1)!}$ die Anzahl der vollständigen Bahnen von $\mathfrak{G}$ an, entlang deren die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{x-1}$ in einer willkürlich festgelegten Reihenfolge durchlaufen werden. Diese betrachteten vollständigen Bahnen können mit den geordneten Einteilungen, deren Anzahl $f(x)$ angibt, in einen eineindeutigen Zusammenhang gebracht werden. Jede der Bahnen teilt nämlich die Knotenpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ den x Klassen zu — je nachdem ein Punkt A entweder vor B_1 oder zwischen B_1 und B_2, B_2 und B_3 usw. liegt. Umgekehrt lassen sich aus jeder solchen Klasseneinteilung der Punkte A so viele vollständige Bahnen in $\mathfrak{G}$ bilden, wie aus den in die gleiche Klasse gelangten Punkten A geordnete Variationen herstellbar sind.

Damit ist (17) für alle positiven Zahlen x bewiesen. Infolgedessen verschwinden also die Koeffizienten b_{n-l} für ungerades l. Wegen (16) hat man mithin folgendes Gleichungssystem:

$$S_n^{n-l}\,[G]_0 + S_{n-1}^{n-l}\,[G]_1 + S_{n-2}^{n-l}\,[G]_2 + \ldots + S_{n-l}^{n-l}\,[G]_l = 0 \tag{18}$$

für $l=2v+1 \quad (v=0, 1 \ldots)$.

Die so gewonnene Aussage zeigt anschaulich den Zusammenhang zwischen den Zahlen $[G]_k$ und ist, wie man zeigen kann, mit (9) äquivalent. (18) erlaubt die rekursive Berechnung der Zahlen $[G]_l$ $(l \geqq 3)$.

§ 6

Sei T_n das Maximum der Anzahlen (G_n) der vollständigen Bahnen sämtlicher zu festem n gehörenden gerichteten vollständigen Graphen G_n. Ziel unserer Überlegung ist es, möglichst gute Schranken für T_n anzugeben. Den Mittelwert der Zahlen (G_n) bezeichnen wir mit K_n. Offenbar gilt

$$K_n = \frac{\sum (G_n)}{2^{\binom{n}{2}}},$$

wobei über alle möglichen $2^{\binom{n}{2}}$ Orientierungen zu summieren ist. Die vollständige Bahn $\overrightarrow{A_1 A_2 \ldots A_n}$ tritt genau in den Graphen G_n auf, in denen die Kanten $\overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{A_2 A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1} A_n}$ vorkommen, wobei die übrigen $\binom{n}{2} - (n-1)$ Kanten beliebig gerichtet sein dürfen. Demzufolge beträgt die Anzahl dieser Graphen G_n: $2^{\binom{2}{n} - (n-1)}$. Eine durch eine beliebige Punktpermutation bestimmte vollständige Bahn kommt in ebenso vielen Graphen G_n vor. Da es $n!$ Punktpermutationen gibt, erhalten wir

$$\sum (G_n) = 2^{\binom{n}{2} - (n-1)} \cdot n!,$$

also

$$K_n = \frac{n!}{2^{n-1}} \leqq T_n. \tag{19}$$

Betrachten wir andererseits einen bestimmten gerichteten Graphen G_n. Zu bestimmen ist die Anzahl der Punktpermutationen $A_1 A_2 \ldots A_n$ mit $\overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{A_3 A_4}, \ldots,$

$$\ldots \begin{cases} \overrightarrow{A_{n-1} A_n} & \text{für geradès } n \\ \overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}} & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Diese Knotenpunktpermutationen sollen Punktpermutationen vom Typ $\rightarrow \ldots \rightarrow \ldots$ heißen, ihre Anzahl sei T_n'. Da jede vollständige Bahn von G_n eine solche Punktpermutation festlegt, ist $(G_n) \leqq T_n'$.

Die Kante $\overrightarrow{A_1 A_2}$ der Punktpermutation $A_1 A_2 \ldots A_n$ vom Typ $\rightarrow \ldots \rightarrow \ldots$ kann aus den $\binom{n}{2}$ Kanten von G_n beliebig ausgewählt werden. Lassen wir die Punkte A_1, A_2 und die mit ihnen inzidierenden Kanten weg, so erhalten wir einen gerichteten vollständigen Graphen G_{n-2}. Aus den verbleibenden Kanten kann $\overrightarrow{A_3 A_4}$ auf $\binom{n-2}{2}$

Weisen ausgewählt werden usw. Damit erhalten wir für T'_n die Formel

$$
\begin{aligned}
T'_n &= \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\cdots = \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n-2)(n-3)}{2}\,\frac{(n-4)(n-5)}{2}\cdots = \frac{n!}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Wir sehen also, daß T'_n von der Orientierung der Kanten von G_n unabhängig ist. Da also für alle gerichteten vollsändigen Graphen G_n mit n Knotenpunkten $(G_n) \leqq T'_n$ gilt, folgt somit $T_n \leqq T'_n$, d. h.

$$T_n \leqq \frac{n!}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}. \tag{21}$$

Aus diesen Überlegungen folgt

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n!} = 0.$$

Durch Zusammenfassung von (19) und (21) erhalten wir

$$\frac{n!}{2^{n-1}} \leqq T_n \leqq \frac{n!}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}} < \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}-1}}$$

oder

$$\frac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}} \leqq \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}},$$

also

$$\varliminf \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \varlimsup \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leqq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

Es erhebt sich die Frage, ob $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ für $n\to\infty$ einem Grenzwert zustrebt und wenn ja, welchem. Wir werden beweisen, daß $\lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} = l$ existiert und vermuten, daß $l = \frac{1}{2}$ ist.

Der Existenzbeweis wird durch die Verallgemeinerung der Abschätzung (21) geführt. Sei $k < n$; betrachten wir die Knotenpunktpermutationen $A_1A_2\ldots A_n$ vom Typ $\underbrace{\to\to\cdots\to}_{(k-1)\ \text{Kanten}}\cdots\underbrace{\to\to\cdots\to}_{(k-1)\ \text{Kanten}}$, d. h. diejenigen, in denen $\underrightarrow{A_1A_2\ldots A_k}$, $\underrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}\ldots A_{2k}}$, $\underrightarrow{A_{(q-1)k+1}A_{(q-1)k+2}\ldots A_{qk}}$ $(n = qk + r,\quad 0 \leqq r < k)$ Bahnen von G_n sind.

Die Anzahl dieser Punktpermutationen ist nicht von der Orientierung der Kanten von G_n unabhängig, deshalb wird auch die Fromel (20) nicht verallgemeinert werden können, wohl aber die Ungleichung (21). Aus den Knotenpunkten von G_n sind k Punkte $A_1, \ldots, A_k$ auf $\binom{n}{k}$ Weisen auswählbar.

Die ausgewählten k Knotenpunkte A_i lassen sich auf genauso viele verschiedene Weisen anordnen, wie es vollständige Bahnen in dem durch die Punkte A_i bestimmten vollständigen Untergraphen G_k von G_n gibt, mithin also T_k verschiedene Weisen. Entsprechend können die Punkte $A_{k+1}, \ldots, A_{2k}$ auf $\binom{n-k}{k}$ aus den Punkten des Graphen $(G_n - A_1 - A_2 - \ldots - A_k)$ ausgesucht werden. Wie oben gibt es für die Anornung dieses k-Tupels von Punkten wieder T_k Möglichkeiten.

Das Verfahren liefert bei Berücksichtigung der Tatsache, daß die als Rest bleibenden r Knotenpunkte $A_{qk-1}, A_{qk+2}, \ldots, A_n$ auf höchstens $r!$ verschiedene Weisen vorschreibbar sind, für die Anzahl der betrachteten Punktpermutationen höchstens

$$\binom{n}{k} T_k \binom{n-k}{k} T_k \ldots \binom{n-(q-1)k}{k} T_k\, r! = \frac{n!}{(k!)^q} T_k^q = n! \left(\frac{T_k}{k!}\right)^q .$$

Die durch die vollständigen Bahnen von G_n bestimmten Punktpermutationen kommen unter den in Rede stehenden Punktermtationen vor. Und mit $q = \left[\frac{n}{k}\right]$ erhalten wir [24])

$$T_n \leqq n! \left(\frac{T_k}{k!}\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]} . \tag{23}$$

Offenbar entsteht (21) aus (23) für $k=2$. Wegen $T_k \leqq k!$ und $\left[\frac{n}{k}\right] > \frac{n}{k} - 1$ ergibt sich die Beziehung

$$\frac{T_n}{n!} < \left(\frac{T_k}{k!}\right)^{\frac{n}{k}-1} = \frac{k!}{T_k}\left(\frac{T_k}{k!}\right)^{\frac{n}{k}}$$

oder

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \sqrt[n]{\frac{k!}{T_k}}\ \sqrt[k]{\frac{T_k}{k!}} \tag{24}$$

Für festgehaltenes k strebt $\sqrt[n]{\frac{k!}{T_k}} \to 1$ für $n \to \infty$, so daß für beliebiges $\varepsilon > 0$ und

[24]) Vermittels ähnlicher Überlegungen erhält man, daß die Anzahl derjenigen Punktpermutationen, in denen $\overrightarrow{A_1 A_2 \ldots A_k}$ $\overrightarrow{A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_n}$ Bahnen von G_n sind höchstesn $\binom{n}{k} T_k T_{n-k}$ beträgt, also $T_n \leqq \binom{n}{k} T_k T_{n-k}$, $\frac{T_n}{n!} \leqq \frac{T_n}{k!} \cdot \frac{T_{n-k}}{(n-k)!}$. Die Ungleichheit (23) ergibt sich hieraus iterativ.

geeignetes $n \geqq n_0(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$(25) \qquad \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leqq \sqrt[k]{\frac{T_k}{k!}} + \varepsilon \qquad \text{folgt.}$$

Die Folge $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ erweist sich nur als „fast monoton abnehmend". Trotzdem läßt sich aus (25) die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ zeigen.

Sei l die untere Grenze der positiven Zahlen

$$\frac{T_1}{1!}, \quad \sqrt{\frac{T_2}{2!}}, \quad \sqrt[3]{\frac{T_3}{3!}}, \ldots, \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}, \ldots.$$

Dann gilt einerseits

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leqq l \quad \text{für alle positiven } n.$$

Andererseits existiert eine positive Zahl k, so daß für $\varepsilon > 0$ $\sqrt[n]{\frac{T_k}{n!}} < l + \varepsilon$ gilt, also für $n \geqq n_0^*(\varepsilon)$ $l \leqq \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < l + 2\varepsilon$, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} = l$, wobei als Folge von (22) $\frac{1}{2} \leqq l \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein muß.

Mit dem Ziel der Herleitung einer besseren oberen Schranke für l verfeinern wir die aus (23) folgende Abschätzung für $k=3$: vgl. [26])

$$T_n \leqq \frac{n!}{2^{\left[\frac{n}{3}\right]}};$$

aus einer Punktpermutation $A_1 A_2 \ldots A_n$ vom Typ $\rightarrow \rightarrow \ldots \rightarrow \rightarrow \ldots$ des Graphen G_n können die ersten drei Knotenpunkte auf $\binom{n}{3}$ Weisen festgelegt werden. Dabei ist ihre Reihenfolge auf drei oder auf eine Weise wählbar, je nachdem nämlich diese drei Punkte ein zyklisches oder ein transitives Dreieck bilden. Demzufolge kann die Bahn $\overrightarrow{A_1 A_2 A_3}$ auf $3c_3(G_n) + t_3(G_n) = 3\binom{n}{3} - 2t_3(G_n)$ Arten bestimmt werden, wo $t_3(G_n)$ und $c_3(G_n) = \binom{n}{3} - t_3(G_n)$ die Anzahl der transitiven bzw. zyklischen Dreiecke des Graphen G_n bedeuten. Wir werden nun das Minimum von $t_3(G_n)$ bestimmen.

Unter dem „Anfangspunkt" eines transitiven Dreiecks sei derjenige eindeutig bestimmte Knotenpunkt verstanden, von dem aus zu den beiden anderen Punkten je eine Kante ausgeht. Treten aus einem Punkt A von G_n e Kanten aus, so ist er Anfangspunkt von $\binom{e}{2}$ transitiven Dreiecken, denn die beiden restlichen Knotenpunkte der transitiven Dreiecke dürfen aus den e Endpunkten der von A ausstrahlenden e Kanten beliebig ausgewählt werden. Gehen also von den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des Graphen G_n beziehentlich $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Kanten aus, dann ist

$$t_3(G_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{e_\nu}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2 - \binom{n}{2}\right), \tag{26}$$

weil

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = \binom{n}{2} \tag{27}$$

(d. i. die Anzahl der Kanten von G_n).

Die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2$ kann unter der Nebenbedingung (27) nur endlich viele Werte annehmen, unter denen es einen kleinsten gibt. Das Minimum kann nur angenommen werden, wenn entweder alle e_i gleich sind oder wenn es zwei e-Werte gibt mit $e_i - e_k = 1$ $(i \neq k)$. Sei nämlich $e_1 - e_2 > 1$, so besteht nach Verminderung von e_1 und Vergrößerung von e_2 um 1 auch weiterhin die Nebenbedingung (27). Andererseits gilt

$$(e_1-1)^2 + (e_2+1)^2 + e_3^2 + \ldots + e_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2 - 2(e_1 - e_2 - 1) < \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2$$

d. h. $\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2$ wäre kein Minimum.

Ist n ungerade, dann ist jeder Summand von

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(e_\nu - \frac{n-1}{2}\right) = 0 \tag{27'}$$

eine ganze Zahl. Entweder verschwindet jeder Summand, d. h. $e_\nu = \frac{n-1}{2}$, oder es gibt mindestens ein positives und mindestens ein negatives Glied, d. h.

$$e_i - \frac{n-1}{2} \geqq 1; \quad e_j - \frac{n-1}{2} \leqq -1.$$

Jedoch ist dann $e_i - e_j \geqq 2$ und $\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2$ kann infolgendessen kein Minimum sein. So erhält man das Minimum für $e_1 = e_2 = \ldots = e_n = \frac{n-1}{2}$. Es beträgt demnach $n\frac{(n-1)^2}{4}$.

Bei geradem n sind die Summanden von (27′) keine ganzen Zahlen, sondern von der Gestalt $m+\frac{1}{2}$ mit ganzem m. Demnach muß im Falle des Eintretens eines Minimums die Hälfte der Summanden gleich $+\frac{1}{2}$, die andere gleich $-\frac{1}{2}$ sein, oder es gäbe zwei Summanden, von denen der eine größer als $\frac{1}{2}$ der andere kleiner als $-\frac{1}{2}$ wäre. Dann existierten aber auch zwei Kantenzahlen e_i und e_k mit $e_i-e_k>1$, weshalb $\sum e_\nu^2$ ihr Minimum nicht annehmen könnte. Für das Minimum gilt daher bei geradem n:

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2 = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)^2+\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)^2=\frac{n(n^2-2n+2)}{4}.$$

Somit ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu^2 \geqq \begin{cases} \dfrac{n(n-1)^2}{4} & \text{für} \quad n\equiv 1 \quad (2) \\ \dfrac{n(n^2-2n+2)}{4} & \text{für} \quad n\equiv 0 \quad (2). \end{cases}$$

Zusammen mit (26)[25]) ergibt sich daraus:

$$t_3(G_n) \geqq \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{n(n-1)^2}{4}-\dfrac{n(n-1)}{2}\right\}=\dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}, & \text{wenn} \quad n\equiv 1 \quad (2) \\ \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{n(n^2-2n+2)}{4}-\dfrac{n(n-1)}{2}\right\}=\dfrac{n(n-2)^2}{8}, & \text{wenn} \quad n\equiv 0 \quad (2) \end{cases}$$

mithin

$$c_3(G_n)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-t_3(G_n)\leqq$$

$$\text{(28)} \qquad \leqq \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{24}(4n-8-3n+9)=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{24} & \text{für} \quad n\equiv 1 \quad (2) \\ \dfrac{n(n-2)}{24}(4n-4-3n+6)=\dfrac{(n+2)n(n-2)}{24} & \text{für} \quad n\equiv 0 \quad (2). \end{cases}$$

Des weiteren gilt

$$3\binom{n}{3}-2t_3(G_n)\leqq \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{4}(2n-4-n+3)=\dfrac{n(n-1)^2}{4} & \text{für} \quad n\equiv 1 \quad (2) \\ \dfrac{n(n-2)}{4}(2n-2-n+2)=\dfrac{n^2(n-2)}{4} & \text{für} \quad n\equiv 0 \quad (2), \end{cases}$$

---

[25]) Aus der obigen Überlegung folgt nicht sofort, daß die rechte Seite das Minimum von $t_3(G_n)$ liefert. Es ist noch die Existenz eines derartigen Graphen zu zeigen mit

$$e_1=e_2=\ldots=e_n=\frac{n-1}{2} \qquad \text{für } n\equiv 1(2)$$

bzw.

$$e_1=e_2=\ldots=e_{\frac{n}{2}}, \quad e_{\frac{n}{2}+1}=e_{\frac{n}{2}+2}=\ldots=e_n=\frac{n}{2}-1$$

für $n\equiv 0(2)$. Derartige Graphen könnten angegeben werden, jedoch ist es für die fogenden Überlegungen nicht wesentlich, daß das Gleichheitszeichen angenommen werden kann.

d. h. für beliebiges n

$$(28') \qquad 3\binom{n}{3} - 2t_3(G_n) \leqq n\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Die Bahn $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ der Punktpermutation $A_1A_2\dots A_n$ vom Typ $\to\to\dots\to\to\dots$ kann auf höchstens $3\binom{n}{3} - 2t_3(G_n)$ verschiedene Weisen gewählt werden. Entsprechend gibt es höchstens $(n-3)\left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right]$ Möglichkeiten für $\overrightarrow{A_4A_5A_6}$ usw. bis zur Bahn $\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}A_n}$ bzw. $\overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}}$ oder $\overrightarrow{A_{n-4}A_{n-3}A_{n-2}}$ je nachdem, ob n von der Form $3q$, $3q+1$ oder $3q+2$ ist. Im ersten Falle ist jeder Knotenpunkt bestimmt, im zweiten Fall ist A_n nur auf eine Weise wählbar, im letzten Falle können die Punkte A_{n-1} und A_n die Punktpermutation auf zweierlei verschiedene Arten abschließen. Die Anzahl der Knotenpunktpermutationen $A_1, A_2, \dots, A_n$ beträgt daher höchstens

$$T_n'' = n\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right](n-3)\left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right](n-6)\left[\frac{n-7}{2}\right]\dots.$$

Die letzten Faktoren sind

$$\text{für} \quad n \equiv 0(3)\colon\ 3\left[\frac{3}{2}\right]\left[\frac{2}{2}\right],$$

$$\text{für} \quad n \equiv 1(3)\colon\ 4\left[\frac{4}{2}\right]\left[\frac{3}{2}\right],$$

$$\text{für} \quad n \equiv 2(3)\colon\ 5\left[\frac{5}{2}\right]\left[\frac{4}{2}\right]\cdot 2.$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$T_n \leqq T_n'' \leqq n\frac{n}{2}\,\frac{n-1}{2}(n-3)\frac{n-3}{2}\,\frac{n-4}{2}(n-6)\frac{n-6}{2}\,\frac{n-7}{2}\dots <$$

$$< n\frac{n}{2}\,\frac{n-1}{2}(n-2)\frac{n-3}{2}\,\frac{n-4}{2}(n-5)\frac{n-6}{2}\,\frac{n-7}{2}\dots \leqq \frac{n\cdot n!}{2^{2\left[\frac{n}{3}\right]}} < \frac{n\cdot n!}{2^{\frac{2}{3}n-2}},$$

so daß [26]

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \sqrt[n]{\frac{4n}{2^{\frac{2}{3}n}}}, \quad l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leqq \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}.$$

[26]) Die Ungleichung $l \leqq \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$ folgt auch aus (24), wenn $k=6$ gesetzt wird; denn mit $T_6=45$ ergibt sich $\sqrt[6]{\frac{T_6}{6!}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$. T_6 wird durch die langwierige Untersuchung aller vollständigen Graphe G_6 bestimmt. Dagegen ist die obige Überlegung zur Verallgemeinerung geeignet.

Eine analoge Untersuchung der Punktpermutationen $\to\to\to\ldots\to\to\to\ldots\to\to\to\ldots$ führt zu einer weiteren Verschärfung der Abschätzung für l. Zunächst sei festgestellt, daß für einen Graphen mit vier Knotenpunkten G_4 die Anzahl der vollständigen Bahnen durch

$$(G_4) = 1 + 2c_3(G_4) \tag{29}$$

gegeben ist, nämlich: aus (15) folgt mit Rücksicht auf den Paragraphen 5

$$[G_4]_3 x + [G_4]_2 x(x-1) + [G_4]_1 x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) =$$
$$= x^4 + 2c_3(G_4)x^2.$$

Für $x=1$ folgt (29). [27])

Die Beziehung (29) wenden wir auf alle vollständigen Teilgraphen G_4 des gerichteten vollständigen Graphen G_n an. Es gibt $\binom{n}{4}$ derartige Teilgraphen.

Jedes zyklische Dreieck eines Teilgraphen G_4 kommt in insgesamt $(n-3)$ Teilgraphen mit 4 Punkten vor, weil bei festgehaltene 3 Punkten der vierte auf $(n-3)$ verschiedene Arten ausgewählt werden kann. Aus (29) erhält man durch Summation über alle vollständigen Teilgraphen von G_n mit 4 Punkten für die Anzahl der Bahnen in G_n mit 3 Kanten:

$$\binom{n}{4} + 2(n-3)c_3(G_n),$$

folglich mit (28)

$$\binom{n}{4} + 2(n-3)c_3(G_n) \leqq$$

$$\begin{cases} \dfrac{n(n-1)(n-3)}{24}(n-2+2n+2) = \dfrac{n^2(n-1)(n-3)}{8} & \text{für} \quad n \equiv 1(2) \\[2ex] \dfrac{n(n-2)(n-3)}{24}(n-1+2n+4) = \dfrac{(n+1)n(n-2)(n-3)}{8} & \text{für} \quad n \equiv 0(2); \end{cases}$$

Diese Abschätzung gibt also an, auf wievele Weisen die Bahn $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ der Punktpermutation $A_1A_2\ldots A_n$ vom Typ $\to\to\to\ldots\to\to\to\ldots$ höchstens gewählt werden kann. Analog ist die Bahn $\overrightarrow{A_5A_6A_7A_8}$ auf maximal $\dfrac{(n-4)^2(n-5)(n-7)}{8}$ für $n\equiv 1(2)$ und $\dfrac{(n-3)(n-4)(n-6)(n-7)}{8}$ Weisen für $n\equiv 0(2)$ wählbar usw. So gelangt man bis zur Bahn

$$\overrightarrow{A_{4q-3}A_{4q-2}A_{4q-1}A_{4q}} \qquad (n = 4q + r;\ 0 \leqq r < 4).$$

Im Falle $n\equiv 0(4)$ ist die Punktpermutation damit abgeschlossen; ist $n\equiv 1(4)$, so ist der fehlende Punkt A_n eindeutig bestimmt und für $n\equiv 2(4)$ können A_{n-1} und

[27]) Die Formel (29) erhält man unmittelbar, wenn alle vollständigen Graphen G_4 mit 4 Knotenpunkten — es gibt davon im wesentlichen 3 verschienene Typen — untersucht werden.

A_n in 2! — bzw. für $n \equiv 3(4)$ die Punkte A_{n-2}, A_{n-1} und A_n in — fach verschiedener Reihenfolge die Permutation beschließen.

Damit erhalten wir für die Anzahl der Punktpermutationen vom Typ $\to\to\to\ldots\to\to\to\ldots$ maximal

$$T_n'' = \begin{cases} \frac{n^2(n-1)(n-3)}{8}\cdot\frac{(n-4)^2(n-5)(n-7)}{8}\cdot \\ \cdot\frac{(n-8)^2(n-9)(n-11)}{8}\ldots, \quad n\equiv 1(2) \\ \frac{(n+1)n(n-2)(n-3)}{8}\cdot\frac{(n-3)(n-4)(n-6)(n-7)}{8}\cdot \\ \cdot\frac{(n-7)(n-8)(n-10)(n-11)}{8}\ldots, \quad n\equiv 0(2). \end{cases}$$

Der letzte Faktor dieses Produkts beträgt

$$\text{für} \quad n\equiv 0(4): \ \frac{5\cdot 4\cdot 2\cdot 1}{8}$$

$$\text{für} \quad n\equiv 1(4): \ \frac{5^2\cdot 4\cdot 2}{8}$$

$$\text{für} \quad n\equiv 2(4): \ \frac{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}{8}\cdot 2!$$

$$\text{für} \quad n\equiv 3(4): \ \frac{7^2\cdot 6\cdot 4}{8}\cdot 3!\,.$$

In jedem Falle gilt:

$$T_n \leqq T_n'' \leqq \frac{(n+1)n!}{8^{\left[\frac{n}{4}\right]}} < \frac{(n+1)n!}{2^{\frac{3n}{4}-3}}$$

sowie

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \sqrt[n]{\frac{8(n+1)}{2^{\frac{3}{4}}}}, \quad l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leqq \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}.$$

Das legt die Vermutung nahe, daß man aus der Untersuchung der Permutationen vom Typ $\to\to\to\to\ldots\to\to\to\to\ldots$ $l \leqq 2^{-\frac{4}{5}}$ erhält usw. Dazu müßten die Beziehungen (28) und (29) verallgemeinert werden; denn in der ersten Verallgemeinerung kommt die Anzahl der zyklischen Fünfecke, Siebenecke usw. und die Anzahl der aus mehreren zyklischen Vielecken zusammengesetzten „zyklischen Figuren" des Graphen G_n vor. Diese Verallgemeinerungen sind jedoch dem Autor nicht gelungen, so daß die durch die Abschätzungen vermutete Relation $l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} = \frac{1}{2}$ noch nicht bewiesen werden konnte.

Die nachfolgende Tabelle weist die Werte von T_n, des oben eingeführten Mittelwertes K_n als untere Schranke von T_n und der oberen Schranken T_n', T_n'', T_n''' $(3 \leqq n \leqq 7)$ aus:

n	T_n	K_n	T_n'	T_n''	T_n
3	3	1,5	3	3	6
4	5	3	6	8	5
5	15	7,5	30	40	25
6	45	22,5	90	108	126
7	189	78,75	630	504	882

Abschließend spricht der Verfasser Herrn Professor Dr. LÁSZLÓ RÉDEI, der ihn zu der vorliegenden Arbeit veranlaßt und ihm bei ihrer Ausführung mit wertvollen Bemerkungen zur Seite gestanden hat, seinen Dank aus, ferner Herrn Privatdozenten Dr. LÁSZLÓ KALMÁR, dem er nützliche Hinweise bei der Abfassung des Artikels verdankt.

Nachträgliche Bemerkung des Autors beim Korrekturlesen: Das Resultat (28′), die Maximalzahl der Bahnen in G_n mit zwei Kanten betreffend, läßt sich durch folgende Überlegung wesentlich einfacher gewinnen. Betrachtet man diejenigen Bahnen mit je zwei Kanten, deren „mittlerer Punkt" ein bestimmter beliebig gewählter Knotenpunkt von G_n ist, so besteht jede derartige Bahn aus einer in den „mittleren Punkt" einlaufenden und einer von ihm ausgehenden Kante.

Laufen also von einem als „mittleren Punkt" ausgewählten Knotenpunkt e_k Kanten weg und e_m Kanten in ihm ein, dann ist die Anzahl der in Betracht gezogenen Bahnen mit 2 Kanten gleich $e_k e_m$.

Wegen $e_k + e_m = n-1$ kann das Produkt $e_k \cdot e_m$ im Falle $n \equiv 1(2)$ höchstens $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, im Falle $n \equiv 0(2)$ höchstens $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ sein, und damit findet man sofort (28′).

Dem Verfasser ist es nicht gelungen, diese einfache Methode für die Bestimmung der maximalen Anzahl der Bahnen mit k Kanten für die Behandlung der Fälle $k > 2$ zu verallgemeinern. Das Maximum der Anzahl der Bahnen mit je 3 Kanten dann so auch weiterhin nur mittels (28) und (29) berechnet werden.

Literatur

[1] CH. JORDAN, Calculus of finite differences, *Budapest*, 1939.
[2] D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, *Leipzig*, 1936.
[3] I. KÜRSCHÁK, Matematikai versenytételek, *Szeged*, 1929.
[4] E. NETTO, Lehrbuch der Combinatorik, 2. Auflage, *Leipzig*, 1927.
[5] G. PÓLYA und G. SZEGŐ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I—II, *Berlin*, 1925.
[6] L. RÉDEI, Ein kombinatorischer Satz, *Acta Lit. Sci. Szeged* **7** (1934), 39—43.
[7] L. SCHRUTKA, Eine neue Einteilung der Permutationen, *Math. Ann.* **118** (1941), 246.
[8] TH. SKOLEM, Gruppierungen, kombinatorische Reziprozitäten, Paarsysteme, Nachtrag (Kap. 15) zu Netto [4].

(Eingegangen am 9. August 1965.)