Über die Iteration reeller Funktionen II.

Von BÉLA BARNA (Debrecen)

Dieser Teil II. enthält lediglich zwei Ergänzungen zum Teil I. [1]) Die erste ergänzende Bemerkung bezieht sich auf *die sigulären Intervalle* [2]); es gilt nämlich die Verallgemeinerung des Satzes 7. (I. p. 32.):

Satz 9. *Gibt es in I ein singuläres Intervall, so existiert ein Intervall* $[a, b]$ *(in I), welches aus Fixpunkten gleicher Ordnung besteht.*

BEWEIS. Es folgt aus dem singulären Charakter eines Punktes x (s. I. p. 28.), daß in der Iterationsfolge (x_n) nur endlich viele verschiedene Punkte auftreten. Es gibt also Indexpaare mit $x_m = x_n$, d. h.

$$f_m(x) = f_n(x) \qquad (m \neq n). \tag{1}$$

In einem singulären Punkt x nehmen also — für gewisse m und n — die Funktionen f_m und f_n denselben Wert an. Umgekehrt, es folgt aus (1), daß x ein singuläres Punkt ist [3]).

Es sei jetzt $[C, D]$ ein singuläres Intervall, und bezeichnen wir mit $M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_\nu, \ldots$ die Mengen der Gleichungswurzeln (1) in irgendeiner Reihenfolge. Ist M_1 nirgends dicht in $[C, D]$, so existiert in diesem ein Teilintervall $[C_1, D_1]$, welches keinen Punkt aus M_1 enthält. Ist M_2 nirgends dicht, so hat $[C_1, D_1]$ einen Teil $[C_2, D_2]$, welcher keinen Punkt aus M_2 enthält. So fortfahrend erhalten wir eine unendliche Folge von geschlossenen Intervallen:

$$I \supseteqq [C, D] \supseteqq [C_1, D_1] \supseteqq \ldots [C_\nu, D_\nu] \supseteqq \ldots .$$

Gehört ein Punkt dem (nicht-leeren) Durchschnitt dieser Intervalle an, so folgt aus der Konstruktion, daß er kein singulärer Punkt ist. Dies steht aber im Gegensatz zu dem singulären Character des Intervalls $[C, D]$. Es gibt also unter den Mengen M_ν wenigstens eine, die nicht nirgends dicht ist, d. h. es existiert in $[C, D]$ ein Teilintervall Δx, in dem eins dieser M_ν, z. B. $M_{\bar{\nu}}$ überall dicht ist. Da aber $M_{\bar{\nu}}$ — wegen

[1]) B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I. *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 16—40. — Die bei Teil I. eingeführten Bezeichnungen (s. hauptsächlich I. p. 17, Fußnote 7) behalten wir in diesem Aufsatz bei.

[2]) I. p. 30.

[3]) Dies bedeutet, daß — bei graphischer Darstellung — die Menge der singulären Punkte durch Projizierung der gemeinsamen Punkten der Funktionenkurven $y = f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ auf die Abszissenachse entsteht. — Die Behauptung folgt eigentlich aus der Tatsache, daß die Vereinigung abzählbar vieler, nirgends dichter Mengen auch eine nirgends dichter Menge ist.

der Stetigkeit der Funktionen f_n — eine geschlossene Menge ist, gilt für ein gewisses (dem $\bar{\nu}$ entsprechenden) Indexpaar m, n

$$f_m(x) = f_n(x)$$

in jedem Punkt des Intervalls Δx. Es sei $f_p(x)$ die erste iterierte Funktion von $f(x)$, die sich in Δx durch Iteration wiederholt, und $f_{p+\mu}(x)$ die erste Wiederholung von $f_p(x)$, d. h.

$$f_{p+1}(x) \neq f_p(x), \ \dots f_{p+\mu-1}(x) \neq f_p(x)$$

(2) $$f_{p+\mu}(x) = f_p(x), \ x \in \Delta x.$$

Hier ist

$$f_{p+\mu}(x) = f_\mu(x_p), f_p(x) = x_p,$$

also gilt

$$f_\mu(x_p) = x_p, \quad \text{wenn } x \in \Delta x, \text{ d. h. wenn } \quad x_p \in (\Delta x)_p.$$

Dies bedeutet, daß

(3) $$f_\mu(x) = x$$

für

(4) $$x \in [a, b] = (\Delta x)_p$$

gilt, d. h. *das Intervall* $[a, b]$ *besteht aus Fixpunkten* μ*-ter Ordnung.*

Es folgt weiter nach (3) und (4) der

Satz 10. *Gibt es ein singuläres Intervall, so kommt unter den Iterierten der Grundfunktion* $f(x)$ *— wenigstens in einem Intervall — die Funktion* x *vor.*

Aus dem vorigen Beweis folgert man noch, daß es in jedem singulären Intervall $[C, D]$ Teilintervalle $[c, d] = \Delta x$ gibt so, daß in jedem solchen Teilintervall — nach (2) —

$$f_{p+k\mu}(x) = f_p(x), \ x \in [c, d] \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

besteht. So folgt

$$\lim_{k \to \infty} f_{p+r+k\mu}(x) = f_{p+r}(x), \qquad r = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1,$$

d. h. man kann die Iterationsfolge $f_n(x)$ in μ verschiedenen konvergenten Teilfolgen

$$f_{\mu k+r}(x), \ r = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

zerlegen, und eine jede dieser Teilfolgen konvergiert — als eine Folge gleicher Elemente — zu einer der Funktionen $f_{\nu+r}(x)$. So haben wir bewiesen den

Satz 11. *In einem singulären Intervall gibt es Teilintervalle, in denen der Grenzwert einer beliebigen konvergenten Teilfolge der Iterationsfolge* (x_n) *von dem Anfangspunkt* x_0 *abhängt.*

Die zweite Ergänzung bezieht sich auf die Frage, (siehe I. p. 37.) ob es Funktionen gibt, bei denen *die Menge der irregulären Punkte ein Intervall besitzt.* Auf diese Frage können wir *eine bejahende Antwort geben.* Wir möchten hier eine *Konstruktion* für solche Funktionen zeigen.

Nehmen wir in dem Intervall (0, 1) eine beliebige, streng monoton abnehmende Punktfolge

$$1 > A > B_0 > B_1 > \dots > B_{k-1} > B_k > \dots$$

(siehe die beiliegende Figur) und in jedem der $(A, 1)$ und (B_k, B_{k-1}) $(k=1, 2, \ldots)$ je eine unendliche Folge von disjunkten, geschlossenen Intervallen. Wir wollen die einzelnen Elemente dieser Intervallfolgen mit Ordnungszahlen (Indizes) versehen, und zwar bekommen die von links nach rechts nacheinander folgenden Intervalle

in $(A, 1)$ die Indizes $0, 2, 5, 9, 14, \ldots,$

in (B_1, B_0) die Indizes $1, 4, 8, 13, \ldots,$

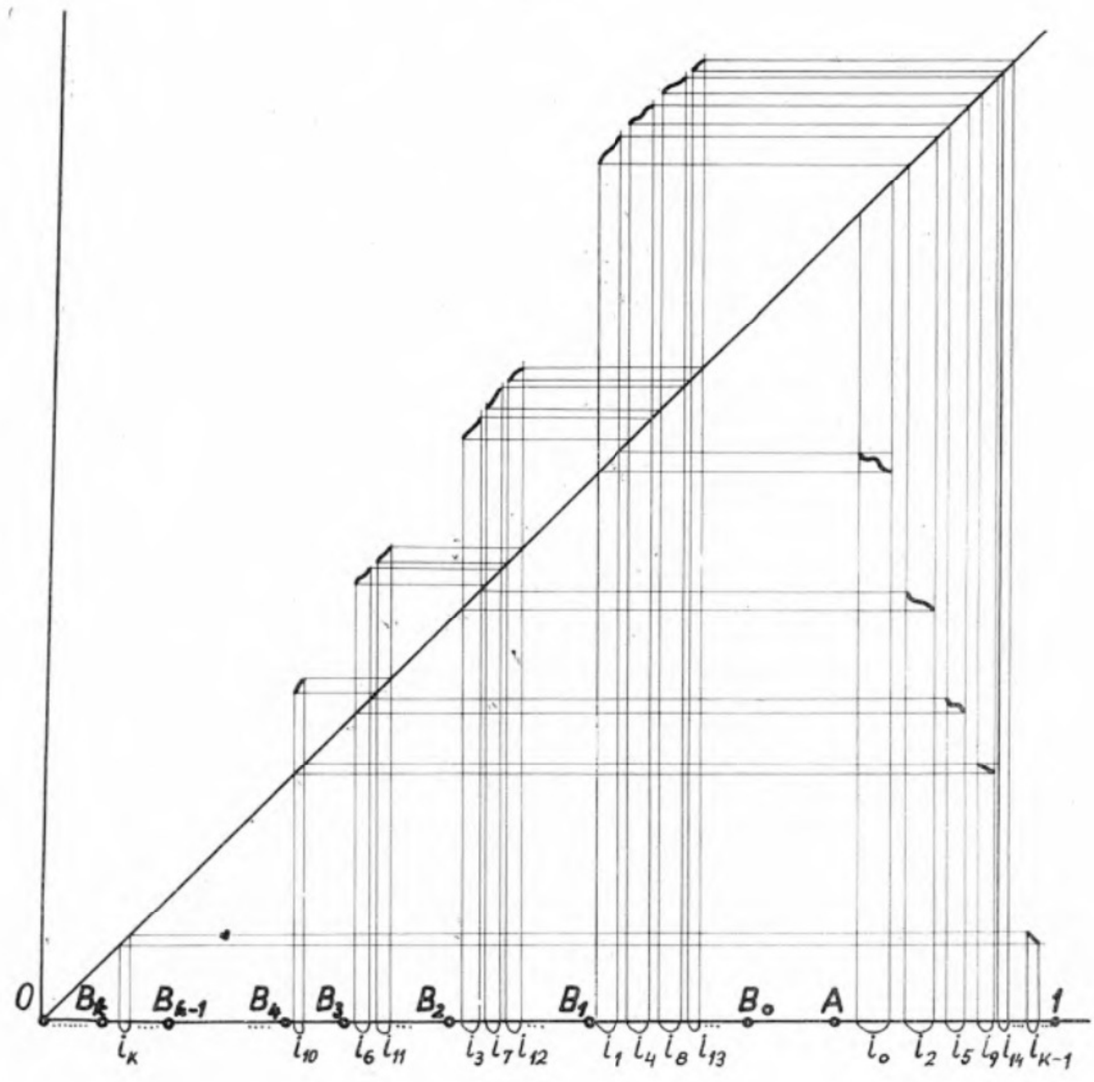
in (B_2, B_1) die Indizes $3, 7, 12, \ldots,$

in $B_3, B_2)$ die Indizes $6, 11, \ldots$

....

in (B_k, B_{k-1}) die Indizes $K, K+k+2, K+2k+5, K+3k+9, \ldots;$

$$K = \frac{k(k+1)}{2}.$$



Jetzt definieren wir die Funktion $f(x)$ so, daß durch sie das Intervall i_n auf i_{n+1} abgebildet wird; zwischen den numierten Intervallen können wir $f(x)$ beliebig definieren. Bei der Iteration der so entstehenden Grundfunktion $f(x)$ *ist jedes der Intervalle i_n ein irreguläres Intervall.*

Um dies einzusehen, bemerken wir, daß i_n die Iterierte n-ter Ordnung von i_0 ist. Da diese iterierten Intervalle keine gemeinsamen Punkte haben, sind die iterierten Punkte x_n eines beliebigen Punktes x_0 $(x_n \in i_n)$ paarweise verschiedene Punkte. Es ist also x_0 kein singulärer Punkt. Es liegt ferner in jedem Intervall (B_k, B_{k-1}) eine streng monoton zunehmende unendliche Teilfolge von (x_n), und diese haben also je einen Häufungspunkt. So gibt es unendlich viele Häufungspunkte der Iterationsfolge (x_n), woraus folgt, dass x_0 ein irregulärer Punkt ist. Da aber x_0 im Anfangsintervall i_0 beliebig gewählt wurde, ist jeder Punkt dieses Intervalls irregulär. So folgt die Irregularität der Intervalle i_n.

(Eingegangen am 10. August 1965.)