Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus II. Die alternative Gleichung

Von S. GOŁĄB (Kraków) und L. LOSONCZI (Debrecen)

Über die sogenannten alternativen Funktionalgleichungen wurden bisher nur wenige Ergebnisse gewonnen ([4], [5]).

In dieser Note wollen wir einen kleinen Beitrag zur Theorie der alternativen Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus geben ohne Anspruch auf allgemeine Lösung.

Daß es nichttriviale Lösungen dieser Gleichung gibt (im Gegensatz zu dem Fall der Gleichung (2)), die im ganzen Quadrat Q:

$$-1 \leqq x \leqq +1, \quad -1 \leqq y \leqq +1 \tag{1}$$

die Gleichung (3) erfüllen, hat der zweite Verfasser an anderer Stelle gezeigt ([6]).

Die Funktionalgleichung ([1], [2], [3])

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,] \tag{2}$$

gibt Anlaß zur Bildung der folgenden allgemeineren alternativen Gleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi[xy-\varepsilon(x,y)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}], \tag{3}$$

wo $\varepsilon(x, y)$ auch eine a priori gesuchte Funktion bedeutet, die der Relation

$$\varepsilon^2(x,y)=1 \tag{4}$$

genügt.

Wir beschränken uns hier (im Gegensatz zu dem Standpunkt der Arbeit [1]) auf den Fall, wo die gesuchten Funktionen $\varphi(x)$ und $\varepsilon(x, y)$ die Gleichung (3) im ganzen Quadrat Q erfüllen.

Satz 1. *Jede Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung* (3), *wie immer auch $\varepsilon(x, y)$ aussieht, stellt eine gerade Funktion dar.*

Beweis. Setzt man in (3) einerseits $x=y=1$, andererseits $x=y=-1$ ein, so erhält man

$$\varphi(1)=0, \quad \varphi(-1) = 0. \tag{5}$$

Das Einsetzen von $x=y=0$ ergibt weiter

$$\varphi(0)=0. \tag{6}$$

Berücksichtigt man dies beim Einsetzen von $y = -1$ in (3), so erhält man

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \tag{7}$$

was zu bewiesen war.

Korollar. *Es gilt für jede Lösung* φ *der Gleichung* (3) *die Identität*

$$\varphi(\sqrt{1-x^2}) = \varphi(x). \tag{8}$$

In der Tat, für $x=0$, $y=\sqrt{1-x^2}$ mit Berücksichtigung von (6) haben wir

$$\varphi(\sqrt{1-x^2}) = \varphi[-\varepsilon(0, \sqrt{1-x^2})\,|x|]. \tag{9}$$

(7) und (9) ergeben zusammen (8).

Bezeichnen wir ferner mit $T_n(x)$ bzw. $U_n(x)$ die n-ten Tschebyschewschen Polynome erster bzw. zweiter Gattung die durch die Gleichungen

$$\begin{cases} T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta \\ U_n(\cos\vartheta) = \dfrac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{10}$$

definiert sind.

Satz 2. *Wenn* $\varphi(x)$ *eine Lösung von* (3) *mit der Eigenschaft* $\varphi(x_0) \neq 0$ *ist, so gelten die Relationen*

$$\varphi[T_n(x_0)] = n\varphi(x_0) \tag{11}$$

$$\varphi[U_n(x_0)\sqrt{1-x_0^2}] = (n+1)\varphi(x_0). \tag{12}$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion je zweier Schritte. Für $n=0$ und $n=1$ gilt die Formel (11) wegen (5). Wir setzen ihre Gültigkeit für $n-1$ und n voraus. Setzen wir in (3) $x=x_0$, $y=T_n(x_0)$ ein. So erhalten wir auf Grund der Voraussetzung

$$(n+1)\varphi(x_0) = \varphi[x_0 T_n(x_0) - \varepsilon(x_0, T_n(x_0))\sqrt{1-x_0^2}\sqrt{1-T_n^2(x_0)}].$$

Es sei gesetzt

$$\vartheta_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \arc\cos x_0 \qquad (0 \leqq \vartheta_0 \leqq \pi).$$

Wir haben dann

$$x_0 T_n(x_0) - \varepsilon(x_0, T_n(x_0))\sqrt{1-x_0^2}\sqrt{1-T_n^2(x_0)} =$$

$$= \cos\vartheta_0 \cos n\vartheta_0 - \varepsilon|\sin\vartheta_0|\cdot|\sin n\vartheta_0| = \cos\vartheta_0\cos n\vartheta_0 - \varepsilon\sin\vartheta_0\,|\sin n\vartheta_0| =$$

$$= \cos(n\vartheta_0 + \eta\vartheta_0),$$

wo

$$\eta = \varepsilon \operatorname{sgn}(\sin n\vartheta_0)$$

ist.

Wir behaupten, daß der Fall $\eta = -1$ unmöglich ist. In der Tat, für $\eta = -1$ hätten wir

$$(n+1)\varphi(x_0) = \varphi[\cos(n-1)\vartheta_0] = \varphi[T_{n-1}(\cos\vartheta_0)] = \varphi[T_{n-1}(x_0)] = (n-1)\varphi(x_0),$$

was zu $\varphi(x_0)=0$ führen würde entgegen der Voraussetzung. Es ist also $\eta=+1$ und folglich

$$(n+1)\varphi(x_0)=\varphi[\cos(n+1)\vartheta_0]=\varphi[T_{n+1}(x_0)],$$

womit die Induktion den Beweis abschließt. In analoger Weise bestätigt man die Richtigkeit der Formel (12).

Aus (11) folgt unmittelbar, daß der Wertbereich einer nichttrivialen Lösung $\varphi(x)$ unbeschränkt sein muß. Dies führt zu dem folgenden

Satz 3. *Eine stetige bzw. eine beschränkte Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung* (3) *muß notwendigerweise eine triviale Lösung sein.*

Satz 4. *Ist ξ eine der Wurzeln der Gleichung*

(13) $$T_n(x)=T_m(x) \qquad (n\neq m),$$

so ist $\varphi(\xi)=0$.

Beweis. Wäre $\varphi(\xi)\neq 0$, so hätten wir auf Grund von (11) $n\varphi(\xi)=m\varphi(\xi)$ oder $(n-m)\varphi(\xi)=0$ oder $\varphi(\xi)=0$ entgegen der Voraussetzung.

Ein analoger Satz gilt, wenn im Satz 4 T durch U ersetzt wird.

Man kann weiter beweisen, daß die Menge der Wurzeln der Gleichungen (13), wenn n, m alle natürlichen Werte durchlaufen, eine dichte Menge bildet. Genauer gesagt, wir haben

(14) $$\varphi(\cos 2\pi r)=0$$

falls r eine beliebige rationale Zahl ist.

Literatur

[1] S. Gołąb—L. Losonczi, Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus I., *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 159—180.

[2] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart* 1961.

[3] M. Ghermanescu, Sur la définition fonctionnelle des fonctions trigonométriques, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957), 93—96.

[4] M. Hosszú, Egy alternatív függvényegyenletről, *Mat. Lapok* **14** (1963), 98—102.

[5] E. Vincze, Über eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Funktionalgleichung, *Funkc. Ekvac.* **6** (1964), 55—62.

[6] L. Losonczi, Lineáris függvényegyenletek, néhány általánosításuk és alkalmazásuk, *Mat. Lapok* **17** (1966), 180—214.

(Eingegangen am 13. November 1965.)