Kongruenzsätze für Sternflächen in Räumen konstanter Krümmung

Von HERBERT FRANK (Berlin)

In der vorliegenden Arbeit werden einige Kongruenzsätze für Sternflächen der klassischen dreidimensionalen Räume konstanter Krümmung **K** bewiesen, die eine Verallgemeinerung einiger im Nachtrag von E. REMBS und K. P. GROTEMEYER zu N. W. EFIMOW [2] dargelegten Kongruenzsätze für Flächen positiver Gaußscher Krümmung des euklidischen Raumes darstellen. Die gesamte Darlegung wird für den hyperbolischen Raum ${}^1S_3$ $\left(\mathbf{K}=-\frac{1}{r^2}\right)$ ausgeführt, während für den euklidischen Raum R_3 ($\mathbf{K}=0$) und für den elliptischen Raum S_3 $\left(\mathbf{K}=\frac{1}{r^2}\right)$ nur auf Abweichungen hingewiesen wird, die sich in diesen Ausführungen für die letztgenannten Räume ergeben. Als Hilfsmittel werden die Herglotzschen Integralformeln und die in [4] bewiesenen Sätze benutzt sowie ein spezieller Hilfssatz für Sternflächen, der im nachfolgenden bewiesen wird.

Die Herglotzschen Integralformeln. Da wir wiederholt von den Herglotzschen Integralformeln Gebrauch machen müssen, seien sie hier ohne Herleitung wiedergegeben, um sie bei Bedarf vor Augen zu haben [1]).

Es sei Φ eine Fläche der Klasse $C^{(3)}$ im ${}^1S_3$ mit dem begleitenden Vierbein $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, und e_0 sei ein beliebiger fester Punkt des ${}^1S_3$. Man setzt dann

$$(1)\qquad p_i=(e_0, a_i), \qquad i=0, 1, 2, 3.$$

Hierbei gilt insbesondere

$$(2)\qquad p_0=-r\operatorname{ch}\frac{\sigma}{r}\leqq -r, \quad |p_3|=r\operatorname{sh}\frac{\varrho}{r},$$

wenn σ den Abstand des Punktes e_0 vom Flächenpunkt $x=ra_0$ bezeichnet und ϱ den Abstand des Punktes e_0 von der Tangentialebene E der Fläche Φ im Punkte x. Ferner sind p_1, p_2 die partiellen Ableitungen der Funktion rp_0 bezüglich des Paares Pfaffscher Formen σ_1, σ_2, so daß die Form

$$(3)\qquad \Omega(rp_0)=p_1\omega_1+p_2\omega_2$$

eine Invariante der Fläche Φ ist.

---

[1]) Die Herleitung der Herglotzschen Integralformeln für die Räume ${}^1S_3$ und S_3 s. H. FRANK [3], 615-617 und 620, für den R_3 s. W. BLASCHKE und H. REICHARDT [1], 103-104.

Es seien nun Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei isometrische Flächen der Klasse $C^{(3)}$, wobei die Parameternetze auf ihnen so gewählt seien, daß sie einander durch die Isometrie zugeordnet sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dann annehmen, daß in einander durch die Isometrie zugeordneten Punkten der Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$ die Beziehungen

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1, \; \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2, \; \tilde{\omega}_3 = \omega_3 \tag{4}$$

gelten. Ist nun Γ ein einfach zusammenhängendes Flächenstück von Φ, das von einer (stückweise) glatten, geschlossenen Kurve γ berandet wird, so haben die Herglotzschen Integralformeln die Gestalt

$$\int_\gamma (\Omega(rp_0) - \tilde{\Omega}(rp_0)) = \iint_\Gamma p_3 \delta[\sigma_1, \sigma_2] + \frac{2}{r} \iint_\Gamma p_0 (H - \tilde{H})[\sigma_1, \sigma_2], \tag{5}$$

$$\int_\gamma (\tilde{\Omega}(r\tilde{p}_0) - \Omega(r\tilde{p}_0)) = \iint_\Gamma \tilde{p}_3 \delta[\sigma_1, \sigma_2] - \frac{2}{r} \iint_\Gamma \tilde{p}_0 (H - \tilde{H})[\sigma_1, \sigma_2] \tag{6}$$

oder in der symmetrisierten Form

$$\begin{aligned} \int_\gamma \{\tilde{p}_0(\Omega(rp_0) - \tilde{\Omega}(rp_0)) + p_0(\tilde{\Omega}(r\tilde{p}_0) - \Omega(r\tilde{p}_0))\} &= \\ = \iint_\Gamma (p_0 \tilde{p}_3 + \tilde{p}_0 p_3) \delta[\sigma_1, \sigma_2] & \end{aligned} \tag{7}$$

mit

$$\delta = \frac{[\omega_1 - \tilde{\omega}_1, \omega_2 - \tilde{\omega}_2]}{[\sigma_1, \sigma_2]} = (c_{11} - \tilde{c}_{11})(c_{22} - \tilde{c}_{22}) - (c_{12} - \tilde{c}_{12})^2. \tag{8}$$

Außerdem sei noch die Integralformel

$$\int_\gamma \Omega(rp_0) = 2 \iint_\Gamma p_3 (K - \mathbf{K})[\sigma_1, \sigma_2] + \frac{2}{r} \iint_\Gamma p_0 H[\sigma_1, \sigma_2] \tag{9}$$

erwähnt, die man bei der Herleitung der Formel (5) als Zwischenresultat erhält.

Diese Integralsätze gelten natürlich auch für mehrfach zusammenhängende Flächenstücke Γ, deren Rand γ aus einer endlichen Anzahl (stückweise) glatter, geschlossener Kurven besteht; denn ein solches Flächenstück kann durch Aufschneiden in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandelt werden, wobei sich die Randintegrale über die angebrachten Schnitte in der Summe wegheben.

Bemerkung. Im elliptischen Raum S_3 gilt

$$|p_0| = r \cos \frac{\sigma}{r}, \quad |p_3| = r \sin \frac{\varrho}{r}, \tag{10}$$

wobei σ und ϱ die vorige geometrische Bedeutung haben. In den Integralformeln (5), (6) und (9) ändert sich im Falle des S_3 nur das Vorzeichen der zweiten Glieder auf der rechten Seite; die symmetrisierte Herglotzsche Integralformel (7) bleibt unverändert.

Im euklidischen Raum R_3 setzt man

$$2p_0=(x,x)\geqq 0,\ p_i=(x,a_i),\qquad i=1,2,3. \tag{11}$$

Hierbei gilt insbesondere

$$|p_3|=\varrho, \tag{12}$$

wenn ϱ den Abstand des Ursprunges von der Tangentialebene E der Fläche Φ im Punkte x bezeichnet; p_1, p_2 sind die partiellen Ableitungen der Funktion p_0 bezüglich des Paares Pfaffscher Formen σ_1, σ_2 und somit die Form

$$\Omega(p_0)=p_1\omega_1+p_2\omega_2 \tag{13}$$

eine Invariante der Fläche Φ. In den Integralformeln (5), (6) und (9) steht in diesem Falle auf der rechten Seite überall anstelle der Faktoren p_0, $\tilde{p}_0$ und $1/r$ der Faktor 1; die symmetrisierte Herglotzsche Integralformel erhält man aus den Herglotzschen Integralformeln (5) und (6) durch einfache Addition.

Zwei Hilfsätze für isometrische Flächen. Der erste Hilfssatz präzisiert den Satz 4 in [4].

Hilfssatz 1. *Sind Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei isometrische Flächen der Klasse $C^{(3)}$ und $\varphi, \tilde{\varphi}$ einander durch die Isometrie zugeordnete Gebiete von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ mit $K-\mathbf{K}<0$ und $\delta>0$, auf derem Rand δ verschwindet, so setzt sich der Rand von φ und $\tilde{\varphi}$ aus einander durch die Isometrie zugeordneten Randstücken zusammen, die nur aus Kongruenzpunkten bestehen, d. h., in deren Punkten die Beziehungen*

$$\tilde{c}_{11}=c_{11},\ \tilde{c}_{12}=c_{12},\ \tilde{c}_{22}=c_{22}$$

gelten, oder aus einander durch die Isometrie zugeordneten Randstücken, die Asymptoten linien sind — soweit sie nicht aus Flachpunkten bestehen —, wobei jedoch stets wenigstens eines zweier einander durch die Isometrie zugeordneter Randstücke Asymptotenlinie ist.

Beweis. Faßt man die Ergebnisse des Satzes 4 in [4] über die Struktur des Randes von φ und $\tilde{\varphi}$ zusammen, so gelangt man zu dem oben genannten Sachverhalt, jedoch mit dem Zusatz, daß noch zwei Randpunktmengen auftreten können, die zum Rand von φ und $\tilde{\varphi}$ nirgends dicht sind. Es erweist sich allerdings, daß diese Punktmengen bereits in den in der Formulierung des Hilfssatzes angeführten Randpunktmengen enthalten sind.

In der Tat, nach Satz 4 in [4] kann noch eine Menge von Randpunkten mit $K-\mathbf{K}=0$ auftreten, die zum Rand von φ und $\tilde{\varphi}$ nirgends dicht ist. Diese Punktmenge ist in der Abschließung der Menge $\mathfrak{R}^-$ der Randpunkte von φ mit $K-\mathbf{K}<0$ enthalten, die nach dem zitierten Satz ausschließlich aus Kongruenzpunkten von Φ und $\tilde{\Phi}$ oder Asymptotenlinienstücken besteht. Aus Stetigkeitsgründen kann dann auch die Abschließung der Menge $\mathfrak{R}^-$ nur aus Kongruenzpunkten oder Asymptotenlinienstücken bestehen. Somit ist die eingangs genannte Menge von Randpunkten mit $K-\mathbf{K}=0$ bis auf eine etwaige Teilmenge von Kongruenzpunkten von Φ und $\tilde{\Phi}$, die zum Rand von φ und $\tilde{\varphi}$ nirgends dicht ist, bereits in den in der Formulierung des Hilfssatzes angeführten Randpunktmengen enthalten.

Als letzte Möglichkeit kann eine Menge von Randpunkten auftreten, die zum Rand von φ und $\tilde{\varphi}$ nirgends dicht ist und ausschließlich aus Kongruenzpunkten von Φ und $\tilde{\Phi}$ besteht. Diese Punktmenge ist in der Abschließung der Menge $\mathfrak{R}^{\alpha}$ von Randpunkten enthalten, die sich aus allen Randstücken von φ zusammensetzt, die — soweit sie nicht aus Flachpunkten bestehen — Asymptotenlinien sind, längs derer also die zweite quadratische Grundform verschwindet. Somit ist die Menge $\mathfrak{R}^{\alpha}$ mit ihrer Abschließung identisch und folglich die eingangs genannte Randpunktmenge bereits in ihr enthalten.

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Der zweite Hilfssatz befaßt sich mit der Invariante δ isometrischer Sternflächen. Eine Fläche heißt *Sternfläche*, wenn man einen Punkt e_0 (im R_3 den Ursprung) so wählen kann, daß ihre Stützfunktion p_3 bezüglich dieses Punktes nirgends verschwindet. Eine Stützfunktion, die nirgends verschwindet, heißt *definit*.

Hilfssatz 2. *Auf zwei isometrischen Sternflächen Φ und $\tilde{\Phi}$ der Klasse $C^{(3)}$, die — sofern es sich nicht um vollständige Flächen handelt — von (stückweise) glatten Kurven berandet werden, längs derer der Integrand des Randintegrals in der symmetrisierten Herglotzschen Integralformel verschwindet, gibt es keine einander durch die Isometrie zugeordneten beschränkten Gebiete mit $K-\mathbf{K}<0$ und $\delta>0$, auf deren Rand — zumindest soweit er nicht gleichzeitig Rand von Φ und $\tilde{\Phi}$ ist — δ verschwindet.*

Beweis. Wir beweisen diesen Hilfssatz indirekt und nehmen an, es gibt zwei isometrische Sternflächen Φ und $\tilde{\Phi}$ mit den genannten Eigenschaften, auf denen einander durch die Isometrie zugeordnete beschränkte Gebiete φ bzw. $\tilde{\varphi}$ mit $K-\mathbf{K}<0$ und $\delta>0$ existieren, in deren Randpunkten — zumindest in denen, die nicht zum Rand von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ gehören — δ verschwindet. Nach Hilfssatz 1 gilt dann auf den Rändern η und $\tilde{\eta}$ von φ bzw. $\tilde{\varphi}$ folgender Sachverhalt:

1. Einander durch die Isometrie zugeordnete Randstücke $\eta_{\varkappa}$ und $\tilde{\eta}_{\varkappa}$, die nicht zum Rand von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ gehören, bestehen gänzlich aus Kongruenzpunkten von Φ und $\tilde{\Phi}$.

2. Randstücke η_{α} von φ sind selbst Asymptotenlinien oder die ihnen durch die Isometrie zugeordneten Randstücke $\tilde{\eta}_{\alpha}$ von $\tilde{\varphi}$ sind Asymptotenlinien, d. h., die Randstücke η_{α} sind glatte Kurvenstücke.

3. Außerdem können Randstücke η_{ϱ} von φ zum Rand von Φ gehören. Nach Voraussetzung sind diese Randstücke ebenfalls glatte Kurvenstücke.

Wir verbinden nun die Endpunkte jeder zusammenhängenden Komponente der Randstücken $\eta_{\varkappa}$ von φ durch eine einfache glatte Kurve $\gamma_{\varkappa}$, die ganz auf $\Phi\setminus\varphi$ liegt — ist eine zusammenhängende Komponente der Randstücken $\eta_{\varkappa}$ geschlossen, so ersetzen wir sie durch eine einfache, geschlossene, (stückweise) glatte Kurve $\gamma_{\varkappa}$, die ganz in $\Phi\setminus\varphi$ liegt —, und beziehen in unsere Betrachtungen das Gebiet Γ von Φ ein, das φ enthält und dessen Rand γ aus den glatten Kurvenstücken $\gamma_{\varkappa}$, η_{α} und η_{ϱ} besteht. Wir setzen für alle Punkte von Γ

$$\hat{\sigma}_i=\sigma_i=\tilde{\sigma}_i, \quad \hat{\omega}_3=\omega_3=\tilde{\omega}_3 \tag{14}$$

und

$$\hat{\omega}_i=\begin{cases}\omega_i & \text{für alle Punkte von } \Gamma/\varphi\\ \tilde{\omega}_i & \text{für alle Punkte von } \overline{\varphi}.\end{cases} \tag{15}$$

Da in den Punkten des Durchschnitts $(\Gamma\setminus\varphi)\cap\overline{\varphi}$, der aus den Randstücken $\eta_{\varkappa}$ von φ besteht, die Beziehungen

$$c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$$

gelten und somit

$$\omega_i = \tilde{\omega}_i, \quad [\omega_3, \omega_i] = [\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_i]$$

ist, also auch

$$D\omega_1 = [\omega_3, \omega_2] = [\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_2] = D\tilde{\omega}_1 \quad D\tilde{\omega}_2 = -[\omega_3, \omega_1] = -[\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_1] = D\tilde{\omega}_2,$$

sind die Koeffizienten $\hat{c}_{ij}$ in der Zerlegung der Pfaffschen Formen $\hat{\omega}_i$ nach $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ überall auf Γ stetig und die Formen $\hat{\omega}_i$ besitzen stetige äußere Differentiale. Ferner sind die Integrierbarkeitsbedingungen

$$D\hat{\sigma}_1 = [\hat{\omega}_3, \hat{\sigma}_2], \quad D\hat{\omega}_1 = [\hat{\omega}_3, \hat{\omega}_2],$$

$$D\hat{\sigma}_2 = -[\hat{\omega}_3, \hat{\sigma}_1], \quad D\hat{\omega}_2 = -[\hat{\omega}_3, \hat{\omega}_1],$$

$$0 = [\hat{\omega}_2, \hat{\sigma}_1] - [\hat{\omega}_1, \hat{\sigma}_2], \quad D\hat{\omega}_3 = \frac{1}{r^2}[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2] - [\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2]$$

erfüllt. Somit existiert nach dem Hauptsatz der Flächentheorie eine Fläche $\hat{\Gamma}$ mit den Pfaffschen Formen $\hat{\sigma}_i, \hat{\omega}_j$. Diese Fläche $\hat{\Gamma}$ ist sowohl dem Gebiet Γ von Φ als auch dem entsprechenden Gebiet $\tilde{\Gamma}$ von $\tilde{\Phi}$ isometrisch. Wegen (14) und (15) gilt insbesondere für die Invariante $\delta(\Gamma, \hat{\Gamma})$ der isomterischen Flächen Γ und $\hat{\Gamma}$

$$\delta(\Gamma, \hat{\Gamma}) = \begin{cases} 0 & \text{für alle Punkte von } \Gamma / \varphi \\ \delta(\Gamma, \tilde{\Gamma}) > 0 & \text{für alle Punkte von } \varphi. \end{cases} \tag{16}$$

Ferner, wegen (14) und (15) ist nach dem Hauptsatz der Flächentheorie das Gebiet $\hat{\varphi}$ von $\hat{\Gamma}$, das den Flächenstücken φ und $\tilde{\varphi}$ durch die Isometrie zugeordnet ist, dem Flächenstück $\tilde{\varphi}$ kongruent oder symmetrisch; dabei kann man den Fall der Symmetrie durch Ausführung einer Spielung von $\hat{\Gamma}$ auf den Fall der Kongruenz zurückführen.

Da man bei der Herleitung der Herglotzschen Integralsätze lediglich die Darbouxschen Formeln und die Integrierbarkeitsbedingungen benutzt, gelten diese Integralsätze also auch für das isometrische Flächenpaar Γ und $\hat{\Gamma}$. Insbesondere gilt nach (7) und (3)

$$\begin{aligned} &\int_\gamma \{(\hat{p}_0 p_1 - p_0 \hat{p}_1)(\omega_1 - \hat{\omega}_1) + (\hat{p}_0 p_2 - p_0 \hat{p}_2)(\omega_2 - \hat{\omega}_2)\} = \\ &= \iint_\Gamma (p_0 \hat{p}_3 + \hat{p}_0 p_3)\delta(\Gamma, \hat{\Gamma})[\sigma_1, \sigma_2]. \end{aligned} \tag{17}$$

Dabei verschwindet längs γ der Integrand des Randintegrals: längs der Randstücke η_α laut Folgerung aus Satz 4 in [4], längs der Randstücke η_ϱ laut Voraussetzung des Hilfssatzes und längs der Randstücke $\gamma_\varkappa$ wegen (15). Berücksichtigt man noch (16) und die Kongruenz von $\hat{\varphi}$ und $\tilde{\varphi}$, so kann man für (17) schreiben:

$$\iint_\varphi (p_0 \tilde{p}_3 + \tilde{p}_0 p_3)\delta(\Gamma, \tilde{\Gamma})[\sigma_1, \sigma_2] = 0. \tag{18}$$

Da Φ und $\tilde{\Phi}$ Sternflächen sind, kann man annehmen, daß die Stützfunktionen p_3 und $\tilde{p}_3$ definit sind. Falls p_3 und $\tilde{p}_3$ verschiedene Vorzeichen besitzen, ändern wir die Orientierung der Fläche $\tilde{\Phi}$, indem wir die Richtung ihres Normalvektors umkehren, und damit das Vorzeichen von $\tilde{p}_3$. Wegen $p_0 < 0$ und $\tilde{p}_0 < 0$ verschwindet dann der Ausdruck $p_0\tilde{p}_3 + \tilde{p}_0 p_3$ nirgends. Außerdem gilt laut Voraussetzung $\delta(\Gamma, \tilde{\Gamma}) > 0$ in den Punkten von φ. War es allerdings nötig, die Orientierung von $\tilde{\Phi}$ auf die genannte Weise zu ändern, so ist $\delta(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ nach Satz 2, Nr. 1—3 in [4] nunmehr negativ in den Punkten von φ. Dieser Widerspruch zu (18) beweist die Richtigkeit der Behauptung unseres Hilfssatzes.

Bemerkung. Im Falle des S_3 bedarf der Beweis des Hilfssatzes 2 einer Ergänzung. Wie aus (10) ersichtlich ist, besitzen in diesem Falle die Funktionen p_0 und $\tilde{p}_0$ a priori kein festes Vorzeichen.

Es seien Punkte e_0 und $\tilde{e}_0$ des S_3 bereits so gewählt, daß die Stützfunktionen p_3 und $\tilde{p}_3$ der Sternflächen Φ und $\tilde{\Phi}$ definit sind, und die Flächen Φ und $\tilde{\Phi}$ seien durch ihre Normalvektoren so orientiert, daß p_3 und $\tilde{p}_3$ gleiche Vorzeichen haben. Dieser Sachverhalt erfährt keine Änderung, wenn wir den Punkt $\tilde{e}_0$ durch eine Bewegung des Raumes mit dem Punkt e_0 zur Deckung bringen. Sodann führen wir durch das Zentrum der Hypersphäre mit dem Radius r des vierdimensionalen euklidischen Raumes R_4, die uns bei identifizierten diametral gegenüberliegenden Punkten als Modell des elliptischen Raumes S_3 dient, die Hyperebene R_3 mit dem Normalvektor e_0. Anstatt diametral gegenüberliegende Punkte der genannten Hypersphäre zu identifizieren, können wir als Modell des S_3 auch eine beliebige Halbhypersphäre mit identifizierten diametral gegenüberliegenden Punkten ihres Randes ansehen. Insbesondere können wir als Modell des S_3 eine der Halbhypersphären des R_4 wählen, deren Rand in der genannten Hyperebene R_3 liegt. Am Verhalten der Funktionen p_3 und $\tilde{p}_3$ ändert sich dabei nichts; die Funktionen p_0 und $\tilde{p}_0$ aber haben dann offenbar in allen Punkten von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$, die nicht in der Ebene S_2 liegen, deren Modell der Rand unserer als Modell des S_3 fungierenden Halbhypersphäre ist, dasselbe feste Vorzeichen; in allen Punkten von Φ und $\tilde{\Phi}$, die in der Ebene S_2 liegen, verschwindet p_0 bzw. $\tilde{p}_0$. Da aber in den Punkten von φ und $\tilde{\varphi}$ laut Voraussetzung $K - \mathbf{K} < 0$ gilt, können dort keine ebenen Bereiche auftreten. Es kann sich also bei den Punktmengen $\varphi \cap S_2$ und $\tilde{\varphi} \cap S_2$ nur um Mengen handeln, die auf φ bzw. $\tilde{\varphi}$ nirgends dicht sind. Somit wechselt die Funktion $p_0\tilde{p}_3 + \tilde{p}_0 p_3$ nunmehr auch im vorliegenden Falle in den Punkten von φ das Vorzeichen nicht und verschwindet nur in einer auf φ nirgends dichten Punktmenge.

Die Kongruenzsätze. Der Gegenstand unserer weiteren Untersuchungen werden isometrische Sternflächen Φ und $\tilde{\Phi}$ mit den folgenden Eigenschaften sein:

1°. Die Sternflächen Φ und $\tilde{\Phi}$ lassen sich im Großen durch ihre Normalvektoren so orientieren, daß in allen einander durch die Isometrie zugeordneten Punkten mit $K - \mathbf{K} \geqq 0$, die keine Flachpunkte sind, ihre mittleren Krümmungen gleiche Vorzeichen haben, also $H\tilde{H} > 0$ ist.

2°. Es existiert für die Sternflächen Φ und $\tilde{\Phi}$ je eine definite Stützfunktion p_3 und $\tilde{p}_3$, deren Vorzeichen übereinstimmen, wenn die Vorzeichen der mittleren Krümmungen H und $\tilde{H}$ in entsprechenden Punkten mit $K - \mathbf{K} \geqq 0$, die keine Flachpunkte sind, übereinstimmen.

3°. Die Teilstücke von Φ mit verschwindender relativer Krümmung werden von stückweise glatten Kurven berandet.

4°. Die Menge der Randpunkte mit verschwindender relativer Krümmung eines Regelflächenstückes mit $K-\mathbf{K}<0$ auf Φ besteht nur aus Geradenstücken.

Die ersten beiden Forderungen sind für die Kongruenz oder Symmetrie zweier isometrischer Sternflächen wesentlich. Läßt man diese Forderungen fallen, so kann man sich z. B. leicht zwei geschlossene Sternflächen vorstellen, die stückweise kongruent und stückweise symmetrisch, also nichttrivial isometrisch sind.

Satz 1. *Zwei isometrische, geschlossene Sternflächen der Klasse $C^{(3)}$, die den Bedingungen* 1°—4° *genügen, sind kongruent oder symmetrisch.*

Beweis. Es seien Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei isometrische, geschlossene Sternflächen mit den genannten Eigenschaften. Wendet man auf sie den Integralsatz (7) an, so erhält man auf bekannte Weise

$$\iint_{\Gamma} (p_0 \tilde{p}_3 + \tilde{p}_0 p_3)\delta[\sigma_1, \sigma_2] = 0. \tag{19}$$

Dabei seien Γ und $\tilde{\Gamma}$ durch ihre Normalvektoren so orientiert, daß in allen entsprechenden Punkten mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ gilt $H\tilde{H}\geqq 0$, und p_3, $\tilde{p}_3$ seien definite Stützfunktionen von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ mit übereinstimmenden Vorzeichen. Wegen $p_0<0$ und $\tilde{p}_0<0$ wechselt dann die Funktion $p_0\tilde{p}_3+\tilde{p}_0 p_3$ nirgends das Vorzeichen und ist überall von Null verschieden. Ferner gilt dann in allen entsprechenden Punkten von Γ und $\tilde{\Gamma}$ mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ nach den Sätzen 1 und 7 in [4] die Ungleichung $\delta\leqq 0$. Auch in allen Teilgebieten mit $K-\mathbf{K}<0$ muß für δ diese Ungleichung gelten, da anderenfalls beschränkte Teilgebiete mit $K-\mathbf{K}<0$ und $\delta>0$ auftreten würden, auf derem Rand δ verschwindet, was nach Hilfssatz 2 nicht möglich ist.

Aus (19) folgt somit, daß δ identisch verschwindet. Nach Satz 1 in [4] gelten dann in allen Teilgebieten von Γ und $\tilde{\Gamma}$ mit $K-\mathbf{K}>0$ die Beziehungen

$$c_{ij}=\tilde{c}_{ij}; \tag{20}$$

und dieselben Beziehungen gelten nach Satz 5 in [4] auch für alle Teilgebiete mit $K-\mathbf{K}<0$, deren Punkte, in denen die geodätische Krümmung der Asymptotenlinien verschwindet, eine zu diesen Teilgebieten nirgends dichte Menge bilden. Aus Stetigkeitsgründen erstreckt sich die Gültigkeit der Beziehungen (20) auch auf die Ränder der genannten Teilgebiete von Γ und $\tilde{\Gamma}$. Es verbleiben also nur noch Teilgebiete zur weiteren Untersuchung, die Regelflächenstücke sind.

Es sei Φ ein zusammenhängendes Regelflächenstück von Γ mit $K-\mathbf{K}<0$ und $\tilde{\Phi}$ das ihm durch die Isometrie zugeordnete Regelflächenstück von $\tilde{\Gamma}$. Längs der geradlinigen Erzeugenden dieser Flächenstücke, die einander durch die Isometrie zugeordnet sind (s. Folgerung des Satzes 5 in [4]), gilt nach Satz 6 in [4]

$$\frac{H-\tilde{H}}{\sqrt[4]{-(K-\mathbf{K})}} = \text{const.} \tag{21}$$

Da keine geschlossenen Regelflächen der Klasse $C^{(3)}$ existieren — eine vollständige Regelfläche der Klasse $C^{(3)}$ enthält Geraden und kann deshalb nicht beschränkt sein — besitzen Φ und $\tilde{\Phi}$ einen Rand und sind als Teilstücke einer geschlossenen Fläche beschränkt. Wie wir bereits bewiesen haben, gelten in allen ihren Randpunkten mit $K-\mathbf{K}<0$ die Beziehungen (20), also insbesondere auch $H-\tilde{H}=0$, während die Randpunktmenge mit $K-\mathbf{K}=0$ von Φ laut Voraussetzung aus Geradenstücken besteht. Dabei muß jedes Geradenstück des Randes von Φ eine Erzeugende der Abschließung von Φ sein.

In der Tat, anderenfalls kann man dieses Geradenstück g — zumindest lokal — als Leitlinie wählen. In jedem Punkt von g wird dann die Tagentialebene des betrachteten Regelflächenstückes von der Geraden g und einer Erzeugenden aufgespannt. Längs g gilt aber $\omega_1^2+\omega_2^2=0$, also $\omega_1=\omega_2=0$, was wegen $K-\mathbf{K}=0$ aus der Identität

$$(K-\mathbf{K})(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+2H(\omega_2\sigma_1-\omega_1\sigma_2)+\omega_1^2+\omega_2^2=0$$

folgt, wenn man berücksichtigt, daß eine Gerade auf einer Fläche stets Asymptotenlinie ist. Somit gilt längs g nach der letzten Darbouxschen Formel

$$\mathrm{d}a_3=\omega_2 a_1-\omega_1 a_2=0,$$

d. h. $a_3=\text{const}$. Folglich fallen die Tangentialebenen in den Punkten von g alle in einer Ebene zusammen, und diese Ebene enthält alle Erzeugenden des betrachteten Regelflächenstückes. Dieses Regelflächenstück ist somit ein ebener Bereich, was nicht möglich ist, da für seine inneren Punkte $K-\mathbf{K}<0$ sein sollte.

Es trifft also jede geradlinige Erzeugende von Φ und $\tilde{\Phi}$ den Rand dieser Flächenstücke in einem Punkt mit $H-\tilde{H}=0$, was dann wegen (21) in allen Punkten von Φ und $\tilde{\Phi}$ gilt. Wir haben somit neben $\delta\equiv 0$ in den Punkten von Φ und $\tilde{\Phi}$ noch die Identität

$$\varepsilon=\frac{1}{4}[(c_{11}-\tilde{c}_{11})-(c_{22}-\tilde{c}_{22})]^2+(c_{12}-\tilde{c}_{12})^2=(H-\tilde{H})^2-\delta\equiv 0,$$

woraus unter Berücksichtigung von (8) die Beziehungen (20) folgen.

Es seien nun Φ und $\tilde{\Phi}$ die einander durch die Isometrie zugeordneten Punktmengen von Γ und $\tilde{\Gamma}$ mit $K-\mathbf{K}=0$. Wir bezeichnen mit Φ_1 die Menge der Flachpunkte von Φ und mit $\tilde{\Phi}_1$ die entsprechende Punktmenge von $\tilde{\Phi}$, mit $\tilde{\Phi}_2$ aber die Menge der Flachpunkte von $\tilde{\Phi}$ und mit Φ_2 die entsprechende Punktmenge von Φ. Die Mengen der übrigen Punkte von Φ und $\tilde{\Phi}$ bezeichnen wir mit Φ_3 bzw. $\tilde{\Phi}_3$.

Da die Punktmengen Φ_3 und $\tilde{\Phi}_3$ beide keine Flachpunkte enthalten, gelten für ihre zusammenhängenden Komponenten, die innere Punkte besitzen, nach Satz 8 in [4] die Beziehungen

$$c_{ij}=\frac{\tilde{H}}{H}\tilde{c}_{ij}$$

mit

$$\frac{\tilde{H}}{H}=\text{const}$$

längs der Erzeugenden von Φ_3 und $\tilde{\Phi}_3$, die einander durch die Isometrie zugeordnet sind. Treffen also einander entsprechende Erzeugende von Φ_3 und $\tilde{\Phi}_3$ auf Randpunkte von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$, die keine Flachpunkte sind, so gelten längs dieser Erzeugenden die Beziehungen (20), da sie auf dem Rand von Φ und $\tilde{\Phi}$ gelten.

Es sei nun Φ_3^* die Teilmenge von Φ_3, in der die Beziehungen (20) nicht gelten. Die Erzeugenden dieser Menge Φ_3^* werden den Rand von Φ nicht treffen oder in Punkten treffen, die Flachpunkte sind. Es sei ferner Φ_2^* die Teilmenge von Φ_2 mit

$H \neq 0$. Ist dann Γ^* eine zusammenhängende Komponente der Vereinigung $\Phi_2^* \cup \Phi_3^*$, so gilt auf derem Rand γ^* überall $\omega_1 = \omega_2 = 0$. In der Tat, der Rand γ^* von Γ^* kann nur zusammengesetzt sein

1. aus geradlinigen Erzeugenden, längs derer $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$, also $\omega_1 = \omega_2 = 0$ gilt;
2. aus Teilen des Randes von Φ, die zum Rand von Φ_3^* gehören und somit laut Definition von Φ_3^* aus Flachpunkten bestehen, in denen also $\omega_1 = \omega_2 = 0$ gilt;
3. aus Teilen des Randes von Φ, die zum Rand von Φ_2^* gehören und somit ebenfalls aus Flachpunkten bestehen, da auf dem Rand von Φ gilt: $\omega_i = \tilde{\omega}_i$ $(i = 1, 2)$, in $\tilde{\Phi}_2$ aber die $\tilde{\omega}_i$ identisch verschwinden;
4. aus Teilen des Randes von Φ_1, der nach Definition aus Flachpunkten besteht.

Hieraus ist ferner ersichtlich, daß es sich bei dem Rand γ^* von Γ^* um eine stückweise glatte Kurve handelt, da nach Voraussetzung die zusammenhängenden Komponenten des offenen Kerns der Menge Φ von stückweise glatten Kurven berandet werden und der gemeinsame Rand des Torsenstückes Γ^* und der Ebenenstücke von Φ_1 offenbar aus Geradenstücken besteht. Wir können also auf Γ^* den Integralsatz (9) anwenden. Beachten wir dabei, daß auf dem Rand γ^* die Pfaffsche Form $\Omega(rp_0)$ verschwindet und in Γ^* die relative Krümmung, so erhalten wir

$$\iint_{\Gamma^*} p_0 \, H[\sigma_1, \sigma_2] = 0,$$

was nicht möglich ist, da H in Γ^* das Vorzeichen nicht wechselt und $p_0 < 0$ gilt, d. h., die Menge Γ^* muß leer sein.

Aus den bisherigen Aussagen ergibt sich, daß in allen entsprechenden Punkten von Φ_3 und $\tilde{\Phi}_3$ die Beziehungen (20) gelten und die Punktmengen Φ_1 und Φ_2, also auch die ihnen durch die Isometrie zugeordneten Punktmengen $\tilde{\Phi}_1$ und $\tilde{\Phi}_2$, identisch sind, dort somit die Beziehungen (20) trivialerweise gelten: $c_{ij} = \tilde{c}_{ij} \equiv 0$.

Damit ist mit Berufung auf den Hauptsatz der Flächentheorie die Kongruenz oder Symmetrie von Γ und $\tilde{\Gamma}$ bewiesen.

Bemerkung. Es ist hier für den Fall des S_3 dieselbe Bemerkung wie zu Hilfssatz 2 anzufügen, die nur in sofern ergänzt werden muß, daß jetzt auf den Flächen Γ und $\tilde{\Gamma}$ des S_3 einander durch die Isometrie zugeordnete ebene Bereiche auftreten können, die in der Ebene S_2 liegen, für deren Punkte p_0 und $\tilde{p}_0$ verschwinden. Aus (19) folgt deshalb zunächst nur $\delta = 0$ für alle Punkte von Γ und $\tilde{\Gamma}$, die diesen Bereichen in der Ebene S_2 nicht angehören. Da aber für einander durch die Isometrie zugeordnete ebene Bereiche $c_{ij} = \tilde{c}_{ij} \equiv 0$ gilt, verschwindet nach (8) die Invariante δ auch in diesen Punkten.

Diese Bemerkung gilt auch für alle nachfolgenden Sätze.

Satz 2. *Zwei isometrische, beschränkte Sternflächen mit Rand der Klasse $C^{(3)}$, die einander entsprechende innere Punkte mit $K - \mathbf{K} \geqq 0$, die keine Flachpunkte sind, enthalten, sind kongruent oder symmetrisch, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Flächen haben die Eigenschaften* 1°—4°.
2. *Die Ränder der Flächen bestehen aus endlich vielen Kurven der Klasse $C^{(2)}$, deren Krümmung nur auf einer zu ihnen nirgends dichten Punktmenge verschwindet.*
3. *Einander durch die Isometrie zugeordnete Randkurven sind kongruent oder symmetrisch.*

4. *Sind die Flächen durch ihre Normalvektoren so orientiert, daß die Vorzeichen ihrer mittleren Krümmungen in allen entsprechenden Punkten mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$, die keine Flachpunkte sind, übereinstimmen, so sind sie gleich orientiert im Falle der Kongruenz ihrer Randkurven und verschieden orientiert im Falle der Symmetrie ihrer Randkurven; die Normalkrümmungen der Randkurven haben dabei in allen entsprechenden Punkten — sofern sie nicht verschwinden — gleiche Vorzeichen.*

BEWEIS. Es seien Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei isometrische, beschränkte Sternflächen mit Rand, die die genannten Eigenschaften besitzen. Wir orientieren zunächst die Flächen Γ und $\tilde{\Gamma}$ durch ihre Normalvektoren so, daß in allen entsprechenden Punkten mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ die Ungleichung $H\tilde{H}\geqq 0$ gilt. Sodann wählen wir definite Stützfunktionen p_3 und $\tilde{p}_3$ von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ aus, deren Vorzeichen übereinstimmen.

Sind die einander durch die Isometrie zugeordneten Kurven der Ränder γ und $\tilde{\gamma}$ von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ kongruent, so gilt

$$k=\tilde{k}, \quad w=\tilde{w}, \tag{22}$$

wenn die Randkurven gleich orientiert sind, was wir im weiteren annehmen werden. Den Fall der Symmetrie der Randkurven kann man auf den Fall der Kongruenz zurückführen, indem man eine Spiegelung von $\tilde{\Gamma}$ ausführt (die Ungleichung $H\tilde{H}\geqq 0$ in entsprechenden Punkten mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$, die Ungleichung $k_n\tilde{k}_n\geqq 0$ in entsprechenden Randpunkten sowie die Ungleichung $p_3\tilde{p}_3>0$ wird davon nicht berührt). Andererseits ist die Krümmung und Windung einer Randkurve mit den Flächeninvarianten im Randstreifen auf folgende Weise verknüpft:

$$k_g = k\cos\vartheta, \quad k_n=-k\sin\vartheta, \quad k=\sqrt{k_g^2+k_n^2}\,; \tag{23}$$

$$k_n=-\frac{\omega_2\,\sigma_1-\omega_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \quad \pm w=\frac{\omega_1\,\sigma_1+\omega_2\,\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{ds}}, \tag{24}$$

wobei in der letzten Beziehung (24) das Zeichen „plus" steht, wenn das begleitende (Frenetsche) Vierbein der Kurve dieselbe Orientierung wie das begleitende (Darbouxsche) Vierbein der Fläche besitzt, und das Zeichen „minus", wenn diese Vierbeine verschieden orientiert sind. Wegen der Isometrie stimmen in entsprechenden Punkten von γ und $\tilde{\gamma}$ die geodätischen Krümmungen k_g und $\tilde{k}_g$ überein. Nach (22) und (23) stimmen somit auch die Absolutwerte der Normalkrümmungen k_n und $\tilde{k}_n$ überein, so daß wegen unserer Voraussetzung über das Vorzeichen der Normalkrümmungen gilt

$$k_n=\tilde{k}_n. \tag{25}$$

In entsprechenden Punkten mit $k=\tilde{k}\neq 0$ gilt dann nach (23) auch

$$\vartheta=\tilde{\vartheta}. \tag{26}$$

Da laut Voraussetzung auch die Flächen Γ und $\tilde{\Gamma}$ gleich orientiert sind, steht in der zweiten Beziehung (24) vor w und vor $\tilde{w}$ dasselbe Vorzeichen, so daß sich wegen (22), (25) und (26) aus (24) ergibt

$$\begin{aligned}&(\omega_2-\tilde{\omega}_2)\sigma_1-(\omega_1-\tilde{\omega}_1)\sigma_2=\\&=(c_{11}-\tilde{c}_{11})\sigma_1^2+2(c_{12}-\tilde{c}_{12})\sigma_1\,\sigma_2+(c_{22}-\tilde{c}_{22})\sigma_2^2=0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&(\omega_1-\tilde{\omega}_1)\sigma_1+(\omega_2-\tilde{\omega}_2)\sigma_2=\\&=(c_{12}-\tilde{c}_{12})(\sigma_2^2-\sigma_1^2)+[(c_{11}-\tilde{c}_{11})-(c_{22}-\tilde{c}_{22})]\sigma_1\,\sigma_2=0,\end{aligned} \tag{28}$$

wobei sich die Gültigkeit dieser Gleichungen aus Stetigkeitsgründen auch auf alle Randpunkte mit $k=\tilde{k}=0$ erstreckt, da nach Voraussetzung k und $\tilde{k}$ nur auf einer zu γ bzw. $\tilde{\gamma}$ nirgends dichten Punktmenge verschwinden.

Aus (27) und (28) folgt sofort

$$(29) \qquad \omega_1-\tilde{\omega}_1=0, \quad \omega_2-\tilde{\omega}_2=0$$

längs einander entsprechender Randkurven, so daß längs dieser Randkurven der Integrand des Randintegrals in der symmetrisierten Herglotzschen Integralformel (7) verschwindet. Wenden wir also auf die Flächen Γ und $\tilde{\Gamma}$ diesen Integralsatz an, so erhalten wir wiederum die Beziehung (19), aus der sich hier dieselben Schlußfolgerungen wie im Beweis des Satzes 1 ergeben.

Wenn wir noch zeigen, daß längs aller einander entsprechenden Randkurvenstücke η und $\tilde{\eta}$ von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$, die zum Rand von Regelflächenstücken mit $K-\mathbf{K}<0$ gehören, die Beziehungen $c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$ oder $K-\mathbf{K}=0$ gelten und längs aller einander entsprechenden Randkurvenstücke ξ und $\tilde{\xi}$ von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$, die zum Rand von Regelflächenstücken mit $K-\mathbf{K}=0$ gehören, die Beziehungen $c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$ oder $\omega_i=\tilde{\omega}_i=0$, so verläuft der Beweis des Satzes 2 im übrigen offenbar in gleicher Weise wie der Beweis des Satzes 1; es ist nur zu beachten, daß jetzt zum Rand der Punktmenge Γ^* (s. *S.* 13) auch Randstücke ξ gehören können, längs derer $\omega_1=\omega_2=0$ ist.

Aus (29) folgt unmittelbar

$$\delta=(c_{11}-\tilde{c}_{11})(c_{22}-\tilde{c}_{22})-(c_{12}-\tilde{c}_{12})^2=0$$

längs des Randes von Γ und $\tilde{\Gamma}$. Ist in diesen Punkten außerdem noch

$$\varepsilon=\frac{1}{4}[(c_{11}-\tilde{c}_{11})-(c_{22}-\tilde{c}_{22})]^2+(c_{12}-\tilde{c}_{12})^2=0,$$

so gelten dort offenbar die Beziehungen $c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$. In einem Punkt P von η oder ξ sei $\varepsilon\neq 0$. Dann kann man in einer Umgebung von P auf dem Randstreifen das durch die Gleichung (28) definierte orthogonale Netz als Koordinatennetz einführen, und zwar so, daß die betrachtete Randkurve in der Umgebung von P zur Kurvenschar $\sigma_2=0$ gehört. Aus (28) und (27) folgt dann

$$(30) \qquad c_{12}=\tilde{c}_{12}, \quad c_{11}=\tilde{c}_{11},$$

wobei wegen $\varepsilon\neq 0$

$$(31) \qquad c_{22}\neq\tilde{c}_{22}$$

sein muß. Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$(32) \qquad K-\mathbf{K}=c_{11}c_{22}-c_{12}^2=\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}-\tilde{c}_{12}^2$$

ergibt sich somit schließlich

$$(33) \qquad c_{11}=\tilde{c}_{11}=0,$$

d. h., das betrachtete Randkurvenstück von Γ sowie das entsprechende Randkurvenstück von $\tilde{\Gamma}$ ist Asymptotenlinie.

Haben wir nun ein Kurvenstück von η bzw. $\tilde{\eta}$ vorliegen, so muß in den Punkten desselben $K-\mathbf{K}<0$ sein, da im Falle $K-\mathbf{K}=0$ laut Bedingung 4° ein Geradenstück vorliegen müßte, während andererseits die Krümmung der Randkurven von Γ und $\tilde{\Gamma}$ nur in einer zu γ bzw. $\tilde{\gamma}$ nirgends dichten Punktmenge verschwindet. Ferner sind die geradlinigen Erzeugenden isometrischer Regelflächen mit $K-\mathbf{K}<0$ einander durch die Isometrie zugeordnet (s. Folgerung des Satzes 5 in [4]). Da die betrachteten Kurvenstücke von η und $\tilde{\eta}$ ebenfalls Asymptotenlinien sind und einander entsprechen, so müssen auch die Hauptkrümmungsrichtungen von Γ in P und von $\tilde{\Gamma}$ im entsprechenden Punkt $\tilde{P}$ einander durch die Isometrie zugeordnet sein. Wegen (4) gilt somit in P und $\tilde{P}$ nach den Transformationsformeln für die Koeffizienten der zweiten quadratischen Grundform

$$2c_{12}\cos 2\varkappa-(c_{11}-c_{22})\sin 2\varkappa=0, \qquad 2\tilde{c}_{12}\cos 2\varkappa-(\tilde{c}_{11}-\tilde{c}_{22})\sin 2\varkappa=0,$$

wenn $\varkappa$ den Winkel zwischen einer Hauptkrümmungsrichtung und der Randkurve η in P bezeichnet. Hieraus folgt aber wegen (30) und (31) die Gleichheit $\sin 2\varkappa=0$ und damit $c_{12}=\tilde{c}_{12}=0$ in P bzw. $\tilde{P}$, was jedoch für $K-\mathbf{K}<0$ nicht eintreten kann, da außerdem (33) in P und $\tilde{P}$ gilt. Somit müssen längs η und $\tilde{\eta}$ die Beziehungen $c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$ gelten.

Haben wir ein Kurvenstück von ξ bzw. $\tilde{\xi}$ vorliegen, so gilt in den Punkten desselben $K-\mathbf{K}=0$ und somit nach (32) wegen (33)

$$c_{12}=\tilde{c}_{12}=0. \tag{34}$$

Längs der betrachteten Kurvenstücke von ξ und $\tilde{\xi}$, die zur Kurvenschar $\sigma_2=0$ gehören, haben wir also wegen (33) und (34)

$$-\omega_1=c_{12}\sigma_1+c_{22}\sigma_2=0, \qquad \omega_2=c_{11}\sigma_1+c_{12}\sigma_2=0$$

und analog $\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=0$, was zu beweisen war.

Damit kann der Beweis des Satzes 2 als abgeschlossen betrachtet werden.

Bemerkung. Ist in allen Randpunkten zweier isometrischer Sternflächen mit Rand die relative Krümmung nichtnegativ, so erübrigt sich die Forderung über das Vorzeichen der Normalkrümmungen der Randkurven im Satz 2, da diese dann von selbst erfüllt ist, wie aus der Identität

$$K-\mathbf{K}+2H\frac{\omega_2\,\sigma_1-\omega_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=0$$

sofort ersichtlich wird.

In den anschließenden beiden Sätzen müssen wir zwei Arten von Sternflächen unterscheiden: Eine orientierbare Sternfläche heißt *einseitig definit*, wenn bei gleichbleibender Orientierung ihre definiten Stützfunktionen p_3 alle ein und dasselbe Vorzeichen haben; besitzt eine orientierbare Sternfläche bei unveränderter Orientierung definite Stützfunktionen p_3 mit verschiedenen Vorzeichen, so heißt sie *zweiseitig definit*.

Satz 3. *Zwei isometrische, beschränkte, einseitig definite Sternflächen mit Rand der Klasse $C^{(3)}$, die außer Flachpunkten keine inneren Punkte mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ enthalten, sind kongruent oder symmetrisch, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Flächen haben die Eigenschaften 3°—4°.*
2. *Die Ränder der Flächen bestehen aus endlich vielen Kurven der Klasse $C^{(2)}$, deren Krümmung nur auf einer zu ihnen nirgends dichten Punktmenge verschwindet.*
3. *Einander durch die Isometrie zugeordnete Randkurven sind kongruent oder symmetrisch.*

4. *Sind die Flächen durch ihre Normalvektoren so orientiert, daß die Vorzeichen ihrer definiten Stützfunktionen übereinstimmen, so sind sie gleich orientiert im Falle der Kongruenz ihrer Randkurven und verschieden orientiert im Falle der Symmetrie ihrer Randkurven; die Normalkrümmungen der Randkurven haben dabei in allen entsprechenden Punkten — sofern sie nicht verschwinden — gleiche Vorzeichen.*

Diesen Satz beweist man offenbar völlig analog dem Satz 2. Dasselbe trifft auch für den nachfolgenden Satz zu.

Satz 4. *Zwei isometrische, beschränkte Sternflächen mit Rand der Klasse $C^{(3)}$, deren eine zweiseitig definit ist und die außer Flachpunkten keine inneren Punkte mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ enthalten, sind kongruent oder symmetrisch, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Flächen haben die Eigenschaften* 3°—4°.
2. *Die Ränder der Flächen bestehen aus endlich vielen Kurven der Klasse $C^{(2)}$, deren Krümmung nur auf einer zu ihnen nirgends dichten Punktmenge verschwindet.*
3. *Einander durch die Isometrie zugeordnete Randkurven sind kongruent oder symmetrisch.*
4. *Die Normalkrümmungen der Randkurven haben bei gleicher Orientierung der Flächen in allen entsprechenden Punkten — sofern sie nicht verschwinden — gleiche Vorzeichen im Falle der Kongruenz der Randkurven und verschiedene Vorzeichen im Falle der Symmetrie der Randkurven.*

Als nächstes betrachten wir Sternflächen mit *Rembsschen Rändern*, d. h. mit Rändern, die aus endlich vielen Kurven bestehen, längs derer der Normalvektor der Fläche konstant ist.

Satz 5. *Zwei isometrische, beschränkte Sternflächen der Klasse $C^{(3)}$ mit Rembsschen Rändern der Klasse $C^{(2)}$, die den Bedingungen* 1°—4° *genügen, sind kongruent oder symmetrisch.*

Beweis. Aus $a_3=\text{const}$ längs eines Rembsschen Randes folgt nach der letzten Darbouxschen Formel

$$da_3=\omega_2 a_1-\omega_1 a_2=0,$$

daß dort gilt

$$\omega_1=\omega_2=0. \tag{35}$$

Insbesondere folgt hieraus $K-\mathbf{K}=0$ für alle Randpunkte.

Sind also Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei isometrische Sternfläche mit den genannten Eigenschaften, die durch ihre Normalvektoren so orientiert sind, daß in allen entsprechenden Punkten mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ für ihre mittleren Krümmungen $H\tilde{H}\geqq 0$ gilt und für zwei ihrer definiten Stützfunktionen $p_3\tilde{p}_3>0$, so verläuft wegen (35) unter Anwendung der symmetrisierten Herglotzschen Integralformel (7) der Beweis des Satzes 5 ganz analog dem des Satzes 2.

Abschließend wollen wir uns noch mit den Sternflächen mit *sphärischen Rändern* befassen, d. h. mit Rändern, die aus endlich vielen Kurven bestehen, längs jeder derselben alle Flächennormalen durch einen festen Punkt — das *sphärische Zentrum der Randkurve* — gehen.

Satz 6. *Zwei isometrische, beschränkte Sternflächen der Klasse $C^{(3)}$ mit sphärischen Rändern der Klasse $C^{(2)}$, deren Randkurven alle ein und dasselbe sphärische*

Zentrum besitzen, sind kongruent oder symmetrisch, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Die Flächen haben die Eigenschaften* 1°, 3° *und* 4°.
2. *Die Stützfunktionen der Flächen bezüglich des sphärischen Zentrums der Randkurven sind definit und haben gleiche Vorzeichen, wenn die Vorzeichen der mittleren Krümmungen in entsprechenden Punkten mit* $K-\mathbf{K}\geqq 0$, *die keine Flachpunkte sind, übereinstimmen.*

Beweis. Ist e_0 das sphärische Zentrum einer sphärischen Rundkurve, so gilt längs dieser Kurve

$$e_0 = r\left(a_0 \operatorname{ch}\frac{\mathfrak{R}}{r} + a_3 \operatorname{sh}\frac{\mathfrak{R}}{r}\right), \qquad \mathfrak{R}\neq 0, \tag{36}$$

woraus sich sofort ergibt

$$p_1=(e_0,\, a_1)=0, \qquad p_2=(e_0,\, a_2)=0. \tag{37}$$

Außerdem erhält man durch Differentiation unter Verwendung der Darbouxschen Formeln

$$r\mathrm{d}a_0=\sigma_1 a_1+\sigma_2 a_2,\ \ \mathrm{d}a_3=\omega_2 a_1-\omega_1 a_2$$

aus (36) die Gleichung

$$(\sigma_1\, a_1+\sigma_2\, a_2)\operatorname{ch}\frac{\mathfrak{R}}{r}+r(\omega_2\, a_1-\omega_1\, a_2)\operatorname{sh}\frac{\mathfrak{R}}{r}+\left(a_0 \operatorname{sh}\frac{\mathfrak{R}}{r}+a_3\operatorname{ch}\frac{\mathfrak{R}}{r}\right)\mathrm{d}\mathfrak{R} = 0,$$

aus der neben $\mathfrak{R}=\text{const}$ insbesondere folgt

$$\operatorname{ch}\frac{\mathfrak{R}}{r}\,\sigma_1+r\operatorname{sh}\frac{\mathfrak{R}}{r}\,\omega_2 = 0, \quad \operatorname{ch}\frac{\mathfrak{R}}{r}\,\sigma_2-r\operatorname{sh}\frac{\mathfrak{R}}{r}\,\omega_1 = 0, \tag{38}$$

wonach längs der sphärischen Randkurve gilt

$$\omega_1\sigma_1+\omega_2\sigma_2=0, \tag{39}$$

d. h., sie ist Krümmungslinie.

Sind also Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei isometrische Sternflächen mit den genannten Eigenschaften, die durch ihre Normalvektoren so orientiert sind, daß in allen entsprechenden Punkten mit $K-\mathbf{K}\geqq 0$ für ihre mittleren Krümmungen $H\tilde{H}\geqq 0$ gilt, so verläuft wegen (37) und (39) der Beweis des vorstehenden Satzes unter Anwendung der symmetrisierten Herglotzschen Integralformel (7) wiederum völlig analog dem des Satzes 1, wenn p_3 und $\tilde{p}_3$ die Stützfunktionen von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ bezüglich des gemeinsamen sphärischen Zentrums e_0 bzw. $\tilde{e}_0$ der sphärischen Randkurven sind. Dabei ist nur zu beachten, daß für einander durch die Isometrie zugeordnete Randkurven mit $K-\mathbf{K}\neq 0$ die Beziehungen $c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$ gelten und für Randkurven mit $K-\mathbf{K}=0$ die Pfaffsche Form $\Omega(rp_0)$ im Integralsatz (9) wegen (37) verschwindet.

Um die Gültigkeit der Beziehungen $c_{ij}=\tilde{c}_{ij}$ für Randkurvenstücke mit $K-\mathbf{K}\neq 0$ zu zeigen, genügt es, auf den Randstreifen in der Umgebung der Punkte der betrachteten Kurvenstücke das durch die Gleichung (28) definierte orthogonale Netz, dem wegen (39) auch die Randkurven angehören, als Koordinatennetz einzuführen. Aus (28) und (39) folgt dann für die betrachteten Randstücke $c_{12}=\tilde{c}_{12}=0$, worauf sich aus $\delta=0$ und $K-\mathbf{K}=c_{11}c_{22}=\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\neq 0$ die genannten Beziehungen sofort ergeben.

Bemerkung, Im Falle des S_3 steht anstelle von (36) die Gleichung

$$e_0 = r\left(a_0 \cos\frac{\Re}{r} + a_3 \sin\frac{\Re}{r}\right), \qquad \Re \neq 0$$

und im Falle des R_3, wenn das sphärische Zentrum der sphärischen Randkurve als Ursprung gewählt ist, die Gleichung

$$x + \Re a_3 = 0, \qquad \Re \neq 0.$$

In beiden Fällen gelangt man offenbar zu denselben Aussagen über die sphärischen Randkurven.

Literatur

[1] W. Blaschke, und H. Reichardt, Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Aufl. *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1960.

[2] N. W. Efimow, Flächenverbiegung im Großen. Mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer, *Berlin*, 1957.

[3] H. Frank, (Х. Франк), Построение дифференциальной геометрии в пространстве Лобачевского методом внешних форм, *Сибирский матем. Журнал* II, № 4 (1961), 600—621.

[4] H. Frank, Invarianten isometrischer Flächen in Räumen konstanter Krümmung, *Bull. Polytechn. Inst. Jassy*. (Im Druck)

(Eingegangen am 13. September 1965.)