# Untersuchungen über den Zusammenhang von Differential- und Funktionalgleichungen I.

Von A. MOÓR und L. PINTÉR (Szeged)

## Einleitung

Unsere Untersuchungen, deren Resultate wir im folgenden zusammenfassen wollen, beziehen sich auf eine gewisse Lösungsmethode der Differentialgleichungen von der Form:

$$y' = \varphi(x, y) \quad \text{bzw.} \quad y'' = \varphi(x, y, y').$$

Der Grundgedanke dieser Methode besteht darin, daß man zu der angegebenen Differentialgleichung eine solche Funktionalgleichung von der Form

$$y(h(x, \xi)) = H(x, y(x), g(\xi))$$

bzw.

$$y(h(x, \xi, \eta)) = H(x, y(x), g_1(\xi), g_2(\eta))$$

konstruiert, deren Lösung $y(x)$ mindestens eine partikuläre — möglicherweise die allgemeine — Lösung der zu Grunde gelegten Differentialgleichung bestimmt.

Die Funktionen $h$ und $H$ hängen im allgemeinen von der Funktion $\varphi(x, y)$ bzw. $\varphi(x, y, y')$ und noch von einer partikulären Lösung der Differentialgleichung ab. Es sind aber in erster Reihe diejenigen Type der Differentialgleichungen von Wichtigkeit, bei denen $h$ von jeder partikulären Lösung unabhängig ist. Das gilt, falls $\varphi(x, y)$ die Form

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$$

hat, bzw. bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung: $\varphi(x, y, y')$ der Funktionalgleichung von der Form

$$\varphi(x, y, zu) = \varphi(v, y, z)u^2 + z(u\Phi(x) - u^2\Phi(v))$$

genügt, wo $\Phi(x)$ eine stetig differentierbare Funktion bezeichnet.

Im § 4. geben wir einige geometrische Anwendungen unserer im vorigen angegebenen Methode.

## § 1. Allgemeine Betrachtungen über Differentialgleichungen erster Ordnung

Zu Grunde gelegt sei eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$y'(x) = \varphi(x, y(x)), \tag{1. 1}$$

wo wir über die Funktion $\varphi(x, y)$ annehmen wollen, daß sie in ihren beiden Veränderlichen $x, y$ stetig ist. Wir wollen jetzt das folgende Problem untersuchen: unter welchen Bedingungen ist eine Funktionalgleichung von der Form

$$y(h(x, \xi)) = H(x, y(x), g(\xi)) \tag{1. 2}$$

so angegeben werden, daß die allgemeine Lösung von (1. 2) mit der von (1. 1) übereinstimme. Es gilt der folgende

**Satz 1.** *Sind $h(x, \xi)$ und $H(x, y, z)$ stetig differenzierbare Funktionen ihrer Veränderlichen, gelten ferner die Relationen:*

$$h(x, \psi(x)) \equiv 0 \tag{1. 3}$$

und

$$\varphi(x, y(x)) = \left. \frac{y'(0) h'_x(x, \xi) - H'_x(x, y(x), g(\xi))}{H'_y(x, y(x), g(\xi))} \right|_{\xi = \psi(x)}, \tag{1. 4}$$

*wo $y(x) \not\equiv 0$ eine differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung* (1. 2) *ist, so genügt $y(x)$ auch der Differentialgleichung* (1. 1) [1]).

Die Konstante $c = y'(0)$ in (1. 4) kann nach (1. 1) auch durch $c = \varphi(0, y(0))$ ersetzt werden.

Beweis. Differenzieren wir (1. 2) nach $x$, so wird nach der Substitution $\xi = \psi(x)$ in Hinsicht auf (1. 3):

$$y'(0) h'_x(x, \psi(x)) = H'_x\{x, y(x), g(\psi(x))\} + H'_y\{x, y(x), g(\psi(x))\} y'(x).$$

Lösen wir diese Gleichung bezüglich $y'(x)$, beachten wir dann die Relation (1. 4), so erhalten wir eben die Differentialgleichung (1. 1), und das beweist die Behauptung des Satzes.

*Bemerkung.* Die Gültigkeit des Satzes 1. besteht auch dann, falls $g(\xi) = y(\xi)$, und — Einfachheit halber — die Funktion $H(x, y, z)$ von $x$ unabhängig vorausgesetzt wird. Die Funktionalgleichung (1. 2) lautet also in diesem Falle:

$$y(h(x, \xi)) = H(y(x), y(\xi)). \tag{1. 5}$$

Interpretieren wir $h(x, \xi)$ als eine Operation bezüglich $x$ und $\xi$, die wir durch einen Stern bezeichnen wollen, und entsprechend bezeichnen wir die Operation $H(y, z)$ durch einen Kreis, so kann (1. 5) in der äquivalenten Form:

$$y(x * \xi) = y(x) \circ y(\xi) \tag{1. 5a}$$

angegeben werden, wie das in der Theorie der Funktionalgleichungen üblich ist.

[1]) Bezüglich derartige Untersuchungen verweisen wir auf die Arbeit; F. Radó, Mathematica (Cluj) **4** (1962), 131—143.

Wir geben ein Beispiel:

*Beispiel I.* Die Differentialgleichung sei:

$$y'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,y(x). \tag{1.6}$$

Die der Gleichung (1. 2) entsprechende Funktionalgleichung lautet:

$$y\left(\frac{x+\xi}{1+x\xi}\right) = y(x)y(\xi). \tag{1.7}$$

Auf Grund von (1. 5) sieht man, daß

$$h(x,\xi) = \frac{x+\xi}{1+x\xi}, \quad H\big(y(x), y(\xi)\big) = y(x)y(\xi). \tag{1.8}$$

Aus der Formel von $h(x, \xi)$ folgt unmittelbar, daß für $\psi(x) = -x$ die Bedingungsgleichung (1. 3) erfüllt ist. Setzen wir in (1. 7) $\xi = -x$, so wird:

$$y(x)y(-x) = y(0).$$

Auf Grund dieser Relation und in Hinsicht auf (1. 8) kann man unmittelbar verifizieren, daß auch die Bedingungsgleichung (1. 4) erfüllt ist, da jetzt

$$h'_x(x,\xi)\big|_{\xi=\psi(x)} = \frac{1}{1-x^2}, \qquad H'_x \equiv 0,$$

$$H'_{y(x)}\big(y(x), y(\psi(x))\big) = y(-x) \equiv \frac{y(0)}{y(x)},$$

und nach (1. 6) für $x=0$: $y'(0)=y(0)$ bestehen; $\varphi(x, y(x))$ ist selbstverständlich eben die rechte Seite von (1. 6). Die Lösung von (1. 7) genügt also der Differentialgleichung (1. 6); die Funktionalgleichung (1. 7) bestimmt einen „Multiplikationsgesetz" für die gemeinsame Lösung von (1. 6) und (1. 7).

*Die Umkehrung des Satzes* 1, *daß nämlich die allgemeine Lösung von* (1. 1) *der Funktionalgleichung* (1. 2) *genüge, gilt im allgemeinen nicht.*

Der Beweis dieser Behauptung kann eben durch unser Beispiel I. angegeben werden. Die allgemeine Lösung von (1. 6) ist nämlich:

$$y(x) = y(0)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \tag{1.9}$$

wo $y(0)$ beliebig gewählt werden kann. Aus (1. 7) folgt aber für $\xi=0$ im Falle $y(x)\not\equiv 0$ die Relation: $y(0)=1$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1. 6) genügt also der Funktionalgleichung (1. 7) nicht; mit anderen Worten: nur die partikuläre Lösung

$$y(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

von (1. 6) genügt der (1.2) entsprechende Funktionalgleichung (1. 7), und das beweist unsere Behauptung.

Für die Funktion (1. 9) gilt aber die von (1. 7) etwas verschiedene Funktionalgleichung:

$$y\left(\frac{x+\xi}{1+x\xi}\right)=\frac{1}{y(0)}\,y(x)y(\xi),\qquad y(0)\neq 0, \tag{1. 10}$$

wie das nach einer kurzen Rechnung leicht bestätigt werden kann. In diesem Falle genügen die Lösungen von (1. 6) der Gleichung (1. 10).

Im Satze 1 haben wir die Bedingung (1. 3) wesentlich benützt. Diese Bedingung drückt aus, daß $h(x, \xi)=0$ bezüglich $\xi$ lösbar ist und die Lösung ist eben $\xi=\psi(x)$. Wir nehmen jetzt an, daß statt dieser Bedingung die Funktion $H$ von $x$ unabhängig, ferner

$$H(y, g(\xi))=0$$

bezüglich $\xi$ lösbar sei; bezeichnet man die Lösung mit $\Lambda(y)$ so gilt:

$$H(y, g(\Lambda(y)))\equiv 0. \tag{1. 11}$$

Statt des Satzes 1 besteht jetzt der

**Satz 2.** *Genügen die Funktionen* $H(y, g(\xi))$ *und* $h(x, \xi)$ *der Relationen* (1. 11) *und*

$$h'_x(x, \Lambda(y))+h'_\Lambda(x, \Lambda(y))\Lambda'(y)\varphi(x, y)=0, \tag{1. 12}$$

*so genügen die differenzierbare Lösungen* $y(x)$ *von* (1. 2) *der Differenzialgleichung* (1. 1) *falls*

$$y'(h(x, y(x)))\not\equiv 0 \tag{1. 13}$$

*und der Koeffizient von* $\varphi(x, y)$ *in* (1. 12) *nicht verschwindet.*

Beweis. Es sei $y(x)$ eine Lösung von (1. 12). Setzen wir in (1. 2) $\xi=\Lambda(y)$, beachten wir noch, daß jetzt $H$ von $x$ unabhängig vorausgesetzt wurde, so wird wegen (1. 11):

$$y(h(x, \Lambda(y(x))))=0.$$

Differenzieren wir beide Seiten dieser Gleichung nach $x$, beachten wir (1. 13), so wird:

$$h'_x(x, \Lambda(y))+h'_\Lambda(x, \Lambda(y))\Lambda'(y)y'=0. \tag{1. 14}$$

Vergleichen wir diese Relation mit (1. 12), so folgt die Gültigkeit von (1. 1), w.z.b.w.

Unsere Sätze 1 und 2 behaupten, daß man gewisse Lösungen — in manchen Fällen alle Lösungen — der Differenzialgleichung (1. 1) durch die Bestimmung der allgemeinen Lösung der Funktionalgleichung (1. 2) erhalten kann. Die Schwierigkeit besteht darin, daß man solche Funktionen $h(x, \xi)$ und $H(x, y, z)$ bestimmen muß, die den Relationen (1. 3), (1. 4) bzw. (1. 11), (1. 12) genügen. Für einen etwas verschiedenen Typus, den wir im folgenden untersuchen wollen, werden wir zeigen, daß es eine entsprechende Funktionalgleichung existiert.

Es sei jetzt $y(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung

$$y(h(x, \xi))=H(x, \xi), \tag{1. 15}$$

wo $h(x, \xi)$ und $H(x, \xi)$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Im wesentlichen ist (1. 15) ein Spezialfall von (1. 2); aus (1. 2) entsteht nämlich (1. 15) wenn in $H$ die Veränderliche $y$ nicht vorkommt und $g(\xi)=\xi$ ist. Mit der gewöhnlichen schreibweise der Theorie der Funktionalgleichungen könnte man (1. 15) auch in der Form:

$$y(x * \xi) = x \circ \xi \tag{1. 15a}$$

angeben.

Es kann leicht gezeigt werden, daß

*wenn* $y(h(x, \xi))$ *auch eine Lösung von* (1. 1) *ist, so genügt* $y(x)$ *immer einer Funktionalgleichung von der Form* (1. 15).

Ist nämlich $y^* = f(x, c)$ die allgemeine Lösung von (1. 1) mit dem Parameter: $c$, ist ferner $y(x)$ eine partikuläre Lösung, so muß die Formel

$$y(h(x, \xi)) = f(x, c(\xi)) \tag{1. 15*}$$

bestehen, da nach der Annahme $y(h(x, \xi))$ mit beliebigem $\xi$ auch als eine Lösung von (1. 1) vorausgesetzt war. Unsere letzte Formel beweist unsere Behauptung mit

$$H(x, \xi) \equiv f(x, c(\xi)).$$

Unsere letzte Betrachtungen sind analog zum Satz 1 von F. Radó [2]) für den Typus (1. 1). In unserem Fall ist aber im allgemeinen $h(x, \xi) \neq x + \xi$.

Es gilt bezüglich des Typus (1. 15) der folgende

**Satz 3.** *Bestehen die Relationen*

$$h(x, \lambda(x)) = x \tag{1. 16}$$

*und*

$$\varphi(x, y(x)) = \left. \frac{H'_x(x, \xi)}{1 - h'_\xi(x, \xi)\lambda'(x)} \right|_{\xi = \lambda(x)}, \tag{1. 17}$$

*wo* $y(x)$ *eine Lösung von* (1. 15) *bezeichnet, so genügt* $y(x)$ *auch der Differentialgleichung* (1. 1).

Beweis. Da nach unserer Annahme $y(x)$ der Gleichung (1. 15) genügt, bekommt man nach Ableitung von (1. 15) nach $x$ und dann nach der Substitution $\xi = \lambda(x)$ in Hinsicht auf (1. 15*) die Relation

$$[y'(x) h'_x(x, \xi)]_{\xi = \lambda(x)} = [H'_x(x, \xi)]_{\xi = \lambda(x)}. \tag{1. 18}$$

Differenzieren wir jetzt (1. 16) nach $x$, so wird:

$$[h'_x(x, \xi)]_{\xi = \lambda(x)} \equiv [1 - h'_\xi(x, \xi)]_{\xi = \lambda(x)} \lambda'(x). \tag{1. 19}$$

Bestimmen wir $y'(x)$ aus (1. 18) mittels (1. 19), so folgt in Hinsicht auf (1. 17), daß $y(x)$ der Gleichung (1. 1) genügt, w.z.b.w.

In unserem Beispiel I. diskutierten wir durch (1. 6) eine Differentialgleichung, die leicht unmittelbar integriert werden könnte. Es ist aber auch möglich, daß die Differentialgleichung (1. 1) nicht unmittelbar integriert werden kann, doch existiert

---

[2]) Vgl. loc. cit. S. 133, insb. Formel (2.1).

die Funktionalgleichung (1. 2), deren Lösungen (1. 1) genügen. Es müssen nur diejenige Funktionen $\psi(x)$, $h(x, \xi)$ und $H(x, y, z)$ bekannt sein, welche den Formeln (1. 3) und (1. 4) genügen — wie das der Satz 1. behauptet. Wir geben für diesen Fall ein Beispiel:

*Beispiel II.* Betrachten wir die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{x}y^2 + \frac{3}{x}y + 4x - 4 \tag{1. 20}$$

und die Cauchysche Funktionalgleichung

$$y(x+\xi) = y(x) + y(\xi). \tag{1. 21}$$

Suchen wir die gemeinsamen Lösungen dieser beiden Gleichungen. Es ist nach (1. 5)

$$h(x, \xi) \equiv x + \xi, \qquad H(y(x), y(\xi)) \equiv y(x) + y(\xi).$$

Die Bedingungsgleichung (1. 4) ist jetzt

$$-\frac{1}{x}y^2 + \frac{3}{x}y + 4x - 4 = y'(0), \tag{1. 22}$$

wo $y = y(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung (1. 21) sein soll. Bekanntlich ist die differenzierbare Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung: $y = cx$. Diese genügt der Relation (1. 22) nur im Falle $c = 2$. Es ist somit $y = 2x$ die gesuchte gemeinsame Lösung von (1. 20) und (1. 21). Auf Grund der partikulären Lösung $y = 2x$ von (1. 20) kann schon auch die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung bestimmt werden.

## § 2. Einige Type von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Paragraphen wollen wir die Differentialgleichungen von der Form:

$$y'' = \varphi(x, y, y') \tag{2. 1}$$

untersuchen. Die Funktion $\varphi(x, y, y')$ soll die folgenden Forderungen genügen: 1) $\varphi(x, y, z)$ soll im Gebiet

$$R\colon 0 \leqq x < \infty, \qquad 0 \leqq y < \infty, \qquad -\infty < z \leqq 0$$

stetig sein. 2) $\varphi(x, 0, 0) = 0$ für $0 \leqq x < \infty$. 3) $\varphi(x, y, 0) \geqq 0$ für $0 \leqq x < \infty$, $0 \leqq y < \infty$. 4) Zu jedem $c > 0$ soll eine positive stetige Funktion $\Phi_c(z)$ existieren, so daß

$$|\varphi(x, y, z)| \leqq \Phi_c(z)$$

im Gebiet

$$R_c\colon 0 \leqq x \leqq c, \quad 0 \leqq y \leqq c, \quad -\infty < z \leqq 0,$$

und

$$\int_{-\infty}^{0} z \frac{dz}{\Phi_c(z)} = -\infty$$

gelten.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so existiert im Intervall $0 \leqq x < \infty$ zu jedem $y(0) > 0$ eine Lösung $y(x)$ von (2. 1) so, daß $y(x) \geqq 0$ und $y'(x) \leqq 0$ sind [3]).

Betrachten wir nun eine Funktionalgleichung von der Form:

$$y(h(x, \xi)) = H(y(x), g(\xi)). \tag{2. 2}$$

Wir beweisen den folgenden

**Satz 4.** *Sind* $h(x, \xi)$ *und* $H(y, z)$ *mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen, gelten ferner die Relationen* (1. 3) *und*

$$\varphi(x, y(x), y'(x)) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{y'(h(x, \xi))h'_x(x, \xi)}{H'_y(y(x), g(\xi))}\right]_{\xi = \psi(x)}, \tag{2. 3}$$

*wo* $y(x) \not\equiv 0$ *eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung* (2. 2) *ist, so genügt* $y(x)$ *der Differentialgleichung* (1. 1).

Beweis. Aus (2. 2) folgt nach einer Ableitung nach $x$:

$$y'(x) = \frac{y'(h(x, \xi))h'_x(x, \xi)}{H'_y(y(x), g(\xi))}, \tag{2. 4}$$

wenn $y(x)$ eine Lösung von (2. 2) bedeutet. Differenzieren wir diese Relation wieder nach $x$, substituieren wir dann $\xi = \psi(x)$, so geht die Relation (2. 4) auf Grund der Formeln (1. 3) und (2. 3) eben in die Gleichung (2. 1) über, womit der Satz 4 bewiesen ist.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (2. 1) hat im allgemeinen eine zweiparametrige Lösung

$$y_c = f(x, c_0, c_1) \tag{2. 5}$$

wo z. B. $c_0 = y_c(0)$, $c_1 = y'_c(0)$ genommen werden kann. Auf Grund der zwei Parameter ist es für gewisse Type der Differentialgleichungen zweiter Ordnung möglich, daß ihre Lösungen (nicht notwendigerweise alle Lösungen) statt (2. 2) eine allgemeinere Funktionalgleichung von der Form

$$y(h(x, \xi, \eta)) = H(x, y(x), g_1(\xi), g_2(\eta)) \tag{2. 6}$$

genügen. Bezüglich dieses Typus beweisen wir den folgenden

**Satz 5.** *Gelten die Relationen*

$$h(x, \varrho(x), \sigma(x)) \equiv 0, \quad h'_x(x, \xi, \eta)|_{\xi = \varrho(x), \eta = \delta(x)} \equiv 1, \tag{2. 7}$$

*und ist für die Lösung* $y(x)$ *der Funktionalgleichung* (2. 6) *die Relation*

$$\varphi(x, y, y') = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{y'(h(x, \xi, \eta))h'_x(x, \xi, \eta) - H'_x(x, y, g_1(\xi), g_2(\eta))}{H'_y(x, y, g_1(\xi), g_2(\eta))}\right]_{\substack{\xi = \varrho(x) \\ \eta = \sigma(x)}} \tag{2. 8}$$

*gültig, so genügt die differenzierbare Lösung* $y(x)$ *von* (2. 6) *der Differentialgleichung* (2. 1).

[3]) Ph. Hartman—A. Wintner, *Amer. Math. Journ.* **73** (1951), 390—404.

Beweis. Es sei $y(x)$ die Lösung von (2. 6). Differenzieren wir (2. 6) nach $x$, so wird

$$y'(x) = \frac{y'(h)h'_x - H'_x}{H'_y} \tag{2. 9}$$

Differenzieren wir diese Relation wieder nach $x$, substituieren wir dann $\xi=\varrho(x)$, $\eta=\sigma(x)$ beachten wir noch (2. 7) und (2. 8), so erhält man eben (2, 1), w.z.b.w.

Die Bedingung (2. 3) bzw. (2. 8) ist hinreichend dafür, daß die Lösungen der entsprechenden Funktionalgleichung (2. 2) bzw. (2. 6) der Differentialgleichung (2. 1) genügen. Sie sind aber keineswegs notwendig. Z. B. erhält man aus (2. 2) und (1. 3) für $\xi=\psi(x)$

$$y(0)=H\big(y(x),\, g(\psi(x))\big).$$

Nach zweimaliger Ableitung nach $x$ können wir $y''$ als Funktion von $x, y, y'$ bestimmen. Stimmt diese Funktion mit $\varphi(x, y, y')$ überein, so genügen die Lösungen von (2. 2) der Differentialgleichung (2. 1). Im zweiparametrigen Fall bekommt man aus (2. 9) einen neuen Typus. Aus (2. 9) und (2. 7) wird:

$$y'(x) = \frac{y'(0) - H'_x\big(x, y(x), g_1(\varrho(x)), g_2(\sigma(x))\big)}{H'_y\big(x, y(x), g_1(\varrho(x)), g_2(\sigma(x))\big)}.$$

Auf Grund dieser Gleichung kann man wieder $y''$ als Funktion von $x, y, y'$ bestimmen, und somit entsteht eine Funktion $f(x, y, y')$ für die $f\equiv\varphi$ hinreichend ist dafür, daß die Lösung von (2. 6), der Differentialgleichung (2. 1) genüge.

Wir wollen jetzt eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktionalgleichung angeben, die mit (2. 1) mindestens eine gemeinsame Lösung hat.

**Satz 6.** *Existiert die zweiparametrige Lösung von* (2. 1) *und bedeutet* $y(x)$ *eine partikuläre Lösung, für die die inverse Funktion* $y_{-1}(x)$ *existiert, so genügt* $y(x)$ *einer Funktionalgleichung von der Form:*

$$y\big(h(x, \xi, \eta)\big)=H\big(x, g_1(\xi, \eta), g_2(\xi, \eta)\big) \tag{2. 10}$$

*und* $y\big(h(x, \xi, \eta)\big)$ *ist mit beliebigen* $\xi, \eta$ *Lösung von* (2. 1).

Beweis. Es sei $f(x, c_1, c_2)$ die zweiparametrige Lösung von (2. 1). Setzen wir

$$c_1=g_1(\xi, \eta), \quad c_2=g_2(\xi, \eta),$$

— wo $\xi, \eta$ durch $c_1, c_2$ eindeutig bestimmbar sein sollen — und definieren wir $h(x, \xi, \eta)$ durch:

$$h(x, \xi, \eta) \overset{\text{def}}{=} y_{-1}\big(f(x, g_1(\xi, \eta), g_2(\xi, \eta)\big), \tag{2. 11}$$

dann folgt aus (2. 10) und (2. 11), daß

$$y\big(h(x, \xi, \eta)\big)=f\big(x, g_1(\xi, \eta), g_2(\xi, \eta)\big), \tag{2. 12}$$

d. h. (2. 10) ist gültig mit

$$H(x, g_1, g_2)\equiv f(x, g_1, g_2)$$

und das beweist den Satz.

Die Funktion $h(x, \xi, \eta)$ kann manchmal ohne Kenntniss der allgemeinen Lösung von (2. 1) bestimmt werden. Da nach (2. 12) $y(h(x, \xi, \eta))$ mit beliebigen $\xi, \eta$ eine Lösung von (2. 1) ist, bekommt man aus (2. 1) für $h(x, \xi, \eta)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{dy(h)}{dh}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{d^2y(h)}{dh^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2=\varphi\left(x, y(h), \frac{dy(h)}{dh}\frac{\partial h}{\partial x}\right), \tag{2. 13}$$

wo $y(x)$ eine partikuläre Lösung von (2. 1) bedeutet, und woraus $h(x, \xi, \eta)$ bestimmt werden kann; $\xi, \eta$ sind dann die Parameter. Wenn nicht Singularitäten vorhanden sind, dann bestimmt $y(h(x, \xi, \eta))$ die allgemeine Lösung von (2. 1), ausgedrückt durch die partikuläre Lösung $y(x)$, und (2. 12) ist für $y(x)$ ein „Multiplikationsgesetz".

*Beispiel III.* Eine partikuläre Lösung von

$$y''=\frac{2y'^2}{y-1} \tag{2. 14}$$

ist: $y=1+x^{-1}$. Aus (2. 13) wird jetzt nach einer leichten Rechnung:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0.$$

Es ist somit

$$y(h(x, \xi, \eta))=1+(x\xi+\eta)^{-1}=\frac{1+\eta+x\xi}{\eta+x\xi}$$

die allgemeinste Lösung von (2. 14).

## § 3. Über die Konstruktion der Funktion $h(x, \xi, \eta)$

In den Paragraphen 1 und 2 beschäftigten wir uns unter anderen mit solchen Typen der Lösungen von Differentialgleichungen, die die Eigenschaft hatten, daß mit der Lösung $y(x)$ auch $y(h(x, \xi))$ bzw. $y(h(x, \xi, \eta))$ Lösung der Differentialgleichung (1. 1) bzw. (2. 1) war (vgl. die Formeln (1. 16) bzw. (2. 12)). Im folgenden wollen wir allgemeine Methode angeben, die in gewissen Fällen die Konstruktion der Funktion $h(x, \xi)$ bzw. $h(x, \xi, \eta)$ möglich machen. In manchen Fällen braucht man auch die partikuläre Lösung $y(x)$ nicht zu kennen.

Betrachten wir die Differentialgleichung (1. 1). Ist $y=\bar{f}(x)$ eine partikuläre Lösung von (1. 1) und soll auch $\bar{f}(h(x, \xi))$ mit beliebigem $\xi$ der Differentialgleichung (1. 1) genügen, so gilt für $h(x, \xi)$ die Bedingungsgleichung:

$$\bar{f}'(h(x, \xi))h_x'(x, \xi)=\varphi\{x, \bar{f}(h(x, \xi))\}. \tag{3. 1}$$

Wir stellen die folgende Forderung:

F) *Der Wertbereich von $z=h(x, \xi)$ stimmt mit dem Definitionsbereich $x_0 \leqq x \leqq x_1$ von $\bar{f}(x)$ überein.*

Da $\tilde{f}(x)$ nach unserer Annahme eine Lösung von (1. 1) ist, gilt auf Grund der Forderung F):

$$\tilde{f}'(z)=\varphi(z,\tilde{f}(z)), \qquad z=h(x,\xi). \tag{3. 2}$$

Aus (3. 1) bekommt man somit:

$$h'_x(x,\xi)=\frac{\varphi\{x,\tilde{f}(h(x,\xi))\}}{\varphi\{h(x,\xi),\tilde{f}(h(x,\xi))\}}. \tag{3. 3}$$

(3. 2) ist eine Differentialgleichung für $h(x,\xi)$. Umgekehrt:

*Gelten die Relationen* (3. 2) — d.h. die Funktion $\tilde{f}(x)$ ist eine Lösung von (1. 1) — *und* (3. 3), *so besteht auch* (3. 1), *d. h.* $\tilde{f}(h(x,\xi))$ *ist eine Lösung von* (1. 1) *mit beliebigem* $\xi$.

Die Anwendung unserer Theorie ist besonders dann günstig, wenn die Gleichung (3. 3) die partikuläre Lösung $\tilde{f}(z)$ nicht enthält. In diesem Falle gilt eine Multiplikationsgesetz von der Form (1. 15a), d. h. (1. 15) gilt für jede Lösung von (1. 1). Wir geben einen Typus für diesen Fall.

Die fundamentale Differentialgleichung habe die Form

$$y'(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(y),$$

die durch Trennung der Veränderlichen auch integriert werden kann, wodurch für die Lösung mindestens eine implizite Form

$$\psi_1(x)+\psi_2(y)=0$$

erhalten wird. Aus (3. 3) bekommt man:

$$h'_x(x,\xi)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(h(x,\xi))},$$

und diese Differentialgleichung — in der $\xi$ der Parameter ist — können wir in der Form:

$$\frac{d}{dx}\Phi_1(h(x,\xi))=\varphi_1(x) \tag{3. 4}$$

schreiben, falls

$$\Phi_1(x)=\int\varphi_1(x)\,dx \tag{3. 5}$$

bezeichnet. Integrieren wir (3. 4) unter Beachtung von (3. 5), bezeichnen wir ferner durch $\Phi_{-1}(x)$ die inverse Funktion von $\Phi_1(x)$, so wird

$$h(x,\xi)=\Phi_{-1}(\Phi_1(x)+\varkappa(\xi)), \tag{3. 6}$$

wo $\varkappa(\xi)$ so gewählt werden muß, daß die Forderung F) gültig sei, sonst aber beliebig ist. Besonders einfach wird die Form von $h(x,\xi)$ falls $\varphi_1(x)\equiv nx^{n-1}$. In diesem Falle wird nach (3. 5) und (3. 6)

$$h(x,\xi)=\sqrt[n]{x^n+\varkappa(\xi)}.$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß wenn in (3. 3) die rechte Seite von $z=\tilde{f}$ unabhängig ist, d. h. wenn statt $\tilde{f}$ die allgemeine Lösung von (1. 1) gesetzt werden kann, dann $\varphi(x, y)$ notwendigerweise die Form $\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ hat. Ist nämlich in (3. 3)

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(z, y)} = \gamma(x, z),$$

so folgt nach der Substitution $z = z_0 = \text{konst.}$

$$\varphi(x, y) = \gamma(x, z_0)\varphi(z_0, y),$$

und das beweist die Behauptung über die Form von $\varphi(x, y)$.

Jetzt gehen wir zur Untersuchung der Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Typus (2. 1) über. Ist $y(x)$ eine partikuläre Lösung von (2. 1), so ist die fundamentale Differentialgleichung für $h(x, \xi, \eta)$ durch (2. 13) angegeben. Die Forderung F) soll auch für die Funktion $h(x, \xi, \eta)$ bzw. für die partikuläre Lösung $y(x)$ vom (2. 1) gültig sein. Das bedeutet:

$$\text{(3. 7)} \qquad \frac{d^2 y(h)}{dh^2} = \varphi\left(h, y(h), \frac{dy(h)}{dh}\right).$$

Substituiert man das in (2. 13), so bekommt man für die Fundamentale Differentialgleichung:

$$\text{(3. 8)} \qquad \varphi\{h, y(h), y'(h)\}h_x'^2 + y'(h)h_{xx}'' = \varphi(x, y(h), y'(h)h_x').$$

Umgekehrt: *aus* (3. 7) *und* (3. 8) *folgt* (2. 13), *d. h.* $y(h(x, \xi, \eta))$ *ist mit beliebigen* $\xi, \eta$ *Lösung von* (2. 1).

Wir wollen zwei Type, bei denen $h(x, \xi, \eta)$ von der partikulären Lösung $y(x)$ unabhängig ist, näher untersuchen. Erstens sei:

$$\text{(3. 9)} \qquad y'' = y'^2\psi(y).$$

Die Gleichung (3. 8) reduziert sich auf

$$y'(h)h_{xx}'' = 0,$$

und wenn wir die Lösung $y' \equiv 0$ ausschließen, so wird $h_{xx}'' = 0$, d. h.

$$\text{(3. 10)} \qquad h(x, \xi, \eta) = \varkappa(\xi, \eta)x + \lambda(\xi, \eta).$$

Dabei sind $\varkappa$ und $\lambda$ beliebige Funktionen von $\xi, \eta$.

Die Differentialgleichung (3. 9) selbst ist unmittelbar integrierbar. Dividieren wir beide Seiten mit $y'$, so wird nach einer Integration

$$\log y' = \theta(y) + \log c_1, \quad \theta(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int \psi(y)\, dy,$$

woraus

$$y'(x) = c_1 e^{\theta(y)}$$

folgt. Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Veränderlichen integriert werden. Es wid

$$F(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int e^{-\theta(y)}\, dy = c_1 x + c_2$$

woraus die Lösung in der Form

$$y = f(c_1 x + c_2)$$

bestimmbar ist, falls die inverse Funktion von $F(y)$ existiert. Diese Lösung hat dann die Eigenschaft, daß wenn statt $x$ die durch (3. 10) angegebene $h(x, \xi, \eta)$ gesetzt wird, die Funktion

$$\hat{y}(x)=f(c_1 h(x, \xi, \eta)+c_2)$$

auch der Gleichung (3. 9) genügt.

Unser zweiter Typus sei durch (2. 1) angegeben, wo die Funktion $\varphi(x, y, y')$ der Funktionalgleichung von der Form

$$\varphi(x, y, zu)=\varphi(v, y, z)u^2+zf(x, v, u) \tag{3. 11}$$

genügt; dabei soll $f(x, v, u)$ eine bestimmte stetige Funktion ihrer Argumente sein. Es ist aber — wie wir es zeigen werden —

$$\varphi(x, y, z)=z^2\psi(y)+z\Phi(x) \tag{3. 12a}$$

die allgemeine differenzierbare Lösung von (3. 11), und dabei gilt

$$f(x, v, u)=u\Phi(x)-u^2\Phi(v); \tag{3. 12b}$$

$\psi(y)$, $\Phi(x)$ bedeuten in (3. 12a) und (3. 12b) beliebige Funktionen.

Setzen wir nun in (3. 11)

$$z=y', \quad u=h'_x, \quad v=h,$$

so bekommt man

$$\varphi(x, y, y'h'_x)=\varphi(h, y, y')h'^2_x+y'f(x, h, h'_x),$$

wo $y$ und $y'$ von $h$ abhängig sind. Eliminieren wir jetzt mittels dieser Form $\varphi(x, y, y'h'_x)$ aus der Gleichung (3. 8), und stellen wir ferner die Forderung: $y'\neq 0$, so wird:

$$h''_{xx}=f(x, h, h'_x).$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Funktion $h(x, \xi, \eta)$, die von den partikulären Lösungen von (2. 1) unabhängig ist.

Wir berechnen jetzt die:

*Allgemeine differenzierbare Lösung von* (3. 11). *Nach der* Substitution: $z=1$, $v=y$ bekommt man aus der Gleichung (3. 11):

$$\varphi(x, y, u)=\psi^*(y)u^2+f(x, y, u), \tag{3. 13}$$

wo

$$\psi^*(y)\overset{\text{def}}{=}\varphi(y, y, 1)$$

bedeutet. Setzt man $\varphi(x, y, u)$ aus (3. 13) in (3. 11), so bekommt man bezüglich der Funktion $f(x, y, u)$ die Funktionalgleichung:

$$f(x, y, zu)=f(v, y, z)u^2+zf(x, v, u). \tag{3. 14}$$

Wir bestimmen jetzt die Lösung von (3. 14). Für $u=v=z=1$ wird:

$$f(x, y, 1)=\beta(x)+\alpha(y), \quad \beta(x)\equiv f(x, 1, 1), \quad \alpha(y)\equiv f(1, y, 1). \tag{3. 15}$$

Setzen wir nun in (3. 14) $u=z=1$, beachten wir ferner (3. 15), so geht (3. 14) in $\beta(v)+\alpha(v)=0$ über, und aus (3. 15) wird somit

$$f(x, y, 1)=\beta(x)-\beta(y). \tag{3. 16}$$

Für $u=1$ bekommt man aus (3. 14) in Hinsicht auf (3. 16) die Relation:

$$f(x, y, z)=f(v, y, z)+z\big(\beta(x)-\beta(v)\big).$$

Substituiert man in diese Gleichung $v=y$, so wird die Funktion $f(x, y, z)$ die Form:

$$f(x, y, z)=\varkappa(y, z)+z\big(\beta(x)-\beta(y)\big), \qquad \varkappa(y, z)\equiv f(y, y, z) \tag{3. 17}$$

haben.

Auf Grund von (3. 17) und (3. 14) erhält man für $\varkappa(y, z)$ die folgende Funktionalgleichung (die $x$ enthaltenden Glieder fallen aus):

$$\varkappa(y, zu)-zu\beta(y)=\{\varkappa(y, z)+z\big(\beta(v)-\beta(y)\big)\}u^2+\{\varkappa(v, u)-u\beta(v)\}z.$$

Nach der Substitution $z=1$, $u=y$ sieht man aus dieser Funktionalgleichung unmittelbar, daß $\varkappa(v, y)$ die Form

$$\varkappa(v, y)=\gamma(y)-y^2\beta(v)+y\beta(v)$$

hat. Aus (3. 17) folgt nun, daß die bestimmende Funktion $f(x, y, z)$ die Form

$$f(x, y, z)=\gamma(z)+z\beta(x)-z^2\beta(y) \tag{3. 18}$$

hat.

Wir müssen noch die Form von $\gamma(z)$ bestimmen. Aus (3. 14) bekommt man unter Beachtung von (3. 18)

$$\gamma(zu)=\gamma(z)u^2+z\gamma(u). \tag{3. 19}$$

Das Differenzieren nach $z$ und dann die Substitution $z=1$ gibt:

$$\gamma'(u)u=ku^2+\gamma(u), \qquad k=konst.=\gamma'(1). \tag{3. 20}$$

Wir haben also eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $\gamma(u)$ erhalten, wo aber noch $k=\gamma'(1)$ bestehen muß. Die Lösung von (3. 20) hat die Form:

$$\gamma(u)=ku^2+k_1u$$

mit $k=\gamma'(1)$. Auf Grund von (3. 19) wird $k_1=-k$ und nach (3. 18) bekommt man:

$$f(x, y, z) = kz^2-kz+z\beta(x)-z^2\beta(y). \tag{3. 21}$$

Aus den beiden Formeln (3. 13) und (3. 21) folgt nun, daß $\varphi(x, y, z)$ wirklich die Form (3. 12a) hat, wo dann

$$\psi(y)\equiv\psi^*(y)+k-\beta(y), \quad \Phi(x)\equiv\beta(x)-k$$

gesetzt wurde. Aus (3. 21) und (3. 22) folgt auch die Relation (3. 12b). Man kann durch Substitution leicht verifizieren, daß die Formeln (3. 12a) und (3. 12b) der Funktionalgleichung (3. 11) wirklich genügen, woraus folgt, daß (3. 12a) und (3. 12b) die allgemeine differenzierbare Lösung von (3. 11) ist, wie behauptet wurde.

*Bemerkung*. Die Bedingung der Differenzierbarkeit haben wir nur bei der Lösung der Funktionalgleichung (3. 19) benützt.

## § 4. Differentialgleichungen in parametrischer Form mit Anwendungen in der Geometrie

In diesem Paragraphen wollen wir einige Resultate der vorigen Paragraphen auf solche Differentialgleichungssysteme übertragen, die die Bahnen eines Berwaldschen affinen differentialgeometrischen Raumes bestimmen. Die Form dieser Differentialgleichungssysteme im $n$-dimensionalen Raum ist:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i \left( x^j(s), \frac{dx^k}{ds} \right) = 0, \tag{4. 1}$$

wo die Indizes die Zahlen 1, 2, ..., $n$ durchlaufen sollen. Der Parameter $s$ ist der sogenannte affine Bogenparameter, und die Funktionen $G^i$ sollen in den $\frac{dx^k}{ds}$ homogen von zweiter Ordnung sein.[4]) Die allgemeine Lösung von (4. 1) habe die Form:

$$x^i = f^i(s;\, b^j, c^k), \qquad i, j, k = 1, \ldots, n, \tag{4. 2}$$

wo die Konstanten $b^j$ und $c^k$

$$b^j = x^j(0), \quad c^k = \left. \frac{dx^k}{ds} \right|_{s=0} \tag{4. 3}$$

bedeuten.

Wir bezeichnen nun durch

$$y^i(s) = f^i(s;\, b^{*j}, c^{*k}), \quad (b^{*j}, c^{*k} : fix) \tag{4. 4}$$

eine partikuläre Lösung von (2. 1), und stellen die folgende Annahme:

A) *Die Funktionen:*

$$p^i\big(y^h(s);\, \xi^j(s;\, v^k, w^l)\big) \equiv y^i(s) * \xi^j(s;\, v^k, w^l) \tag{4. 5}$$

*bilden für beliebige Konstante* $v^k$, $w^l$ *eine Lösung von* (4. 1).

Die Konstanten $v^k$ und $w^l$ spielen also in (4. 5) die Rolle der Parameter. Da die Formel (4. 2) auch die allgemeine Lösung von (4. 1) bestimmt, gilt auf Grund der Annahme A):

$$p^i\big(y^h(s);\, \xi^j(s;\, v^k, w^l)\big) = f^i(s;\, b^k, c^l), \tag{4. 6}$$

woraus folgt, daß $b^k$ und $c^l$ Funktionen von $v^k$, $w^l$ sein müssen, d. h.

$$b^k = b^k(v^i, w^j), \quad c^k = c^k(v^i, w^j). \tag{4. 7}$$

Im folgenden wollen wir immer annehmen, daß auch $v^i$ und $w^i$ durch $b^k$ und $c^k$ ausgedrückt werden können, d. h.

$$v^i = v^i(b^k, c^l), \quad w^i = w^i(b^k, c^l). \tag{4. 7a}$$

Diese Relationen entstehen aus (4. 7) durch Lösung bezüglich $v^i$, $w^j$.

---

[4]) L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of. Math.* **48** (1947), 755—781, insb. § 2.

Auf Grund von (4. 7) erhält man aus (4. 6) bezüglich der Funktionen $p^i$, $\xi^i$ das Funktionalgleichungssystem:

$$p^i(y^j(s); \xi^h(s; v^k, w^l)) = f^i(s; b^k(v^j, w^h), c^l(v^j, w^h)). \tag{4. 8}$$

Dieses Funktionalgleichungssystem haben wir auf Grund der Annahme A) abgeleitet. Offenbar ist aber auch die Umkehrung gültig: aus der Lösbarkeit des Funktionalgleichungssystem (4. 8) folgt die Annahme A), da $f^i(s; b^k, c^l)$ immer eine Lösung von (4. 1) bestimmt.

Nehmen wir jetzt an, daß die Lösungen (4. 2) die Bahnen einer durch (4. 1) bestimmten Berwaldschen affinen Bahnengeometrie bilden. Es sei (4. 4) eine Bahn dieser Geometrie und (4. 5) bestimme eine Nachbarkurve von (4. 4). Das bedeutet, daß eine Relation von der Form:

$$p^i(y^j(s); \xi^h(s; v^k, w^l)) = y^i(s) + \eta^i(s) \tag{4. 9}$$

besteht, wo $\eta^i(s)$ einen infinitesimalen kontravarianten Vektor bedeutet, welcher längs $y^i(s)$ definiert ist.

Der infinitesimale Vektor $\eta^i(s)$ ist auch durch (4. 2) und (4. 4) bestimmbar. Es gilt

$$\eta^i(s) = f^i(s; b^j, c^k) - f^i(s; b^{*j}, c^{*k}), \tag{4. 10}$$

wo

$$b^j = b^{*j} + \delta b^j, \quad c^k = c^{*k} + \delta c^k \tag{4. 11}$$

gesetzt werden soll, und $\delta b^j$, $\delta c^k$ infinitesimale Größen bedeuten.

Auf Grund von (4. 11) werden die Formeln (4. 7a) die Form:

$$v^i = v^{*i} + \delta v^i, \quad w^i = w^{*i} + \delta w^i \tag{4. 12}$$

haben, wo nach (4. 7a):

$$v^{*i} = v^i(b^{*k}, c^{*l}), \quad w^{*i} = w^i(b^{*k}, c^{*l}),$$

$$\delta v^i = \left[\frac{\partial v^i}{\partial b^k}\,\delta b^k + \frac{\partial v^i}{\partial c^k}\,\delta c^k\right]_{b^k = b^{*k},\ c^k = c^{*k}},$$

$$\delta w^i = \left[\frac{\partial w^i}{\partial b^k}\,\delta b^k + \frac{\partial w^i}{\partial c^k}\,\delta c^k\right]_{b^k = b^{*k},\ c^k = c^{*k}}.$$

Die Größen $b^{*k}$, $c^{*k}$ entsprechen also den mit $v^{*k}$, $w^{*k}$ bezeichneten Parameterwerten und umgekehrt, wie das nach (4. 7) bzw. (4. 7a) verifiziert werden kann. Aus (4. 9) bekommt man $\eta^i(s)$, wenn die Werte aus (4. 12) in (4. 9) substituiert werden und dann noch die aus (4. 4) und (4. 8) folgende Relation

$$y^i(s) = p^i(y^j(s); \xi^h(s; v^{*k}, w^{*l})) \tag{4. 13}$$

beachtet wird. Nach einer Reihenentwicklung nach $\delta v^i$, $\delta w^i$ wird somit:

$$\eta^i(s) = \left[\frac{\partial p^i(y^a; \xi^b)}{\partial \xi^j}\left(\frac{\partial \xi^j}{\partial v^k}\,\delta v^k + \frac{\partial \xi^j}{\partial w^k}\,\delta w^k\right)\right]_{v^k = v^{*k},\, w^k = w^{*k}}, \tag{4. 14}$$

wenn die Glieder höherer Ordnung in $\delta v^k$, $\delta w^l$ vernachlässigt werden.

L. Berwald hat bewiesen, daß der infinitesimale Vektor $\eta^i$ einer charakteristischen Differentialgleichung genügen muß, falls die Nachbarkurve von $y^i(s)$, d. h. $y^i(s)+\eta^i(s)$ auch eine Bahn sein soll. Diese charakteristische Differentialgleichung ist[5]):

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2}+K^i_j\left(y^k, \frac{dy^l}{ds}\right)\eta^j = 0, \tag{4. 15}$$

$$K^i_j \overset{\text{def}}{=} 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j}-\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^t\,\partial x'^j}x'^t+2\frac{\partial^2 G^i}{\partial x'^t\,\partial x'^j}G^t-\frac{\partial G^i}{\partial x'^t}\frac{\partial G^t}{\partial x'^j} \tag{4. 15a}$$

und $K^i_j$ der Berwaldsche affine Abweichungstensor des Raumes, ferner

$$\frac{D\eta^i}{ds}=\frac{d\eta^i}{ds}+\frac{\partial G^i}{\partial x'^j}\eta^j$$

bedeuten. Der Operator $\frac{D}{ds}$ ist also das von L. Berwald eingeführte invariante Differential der affinen Bahnengeometrie. Die durch (4. 1) bestimmten Bahnen sind wegen der Homogenität zweiter Ordnung der $G^i(x, x')$ in den $x'^i$ eben die durch $\frac{D}{ds}\frac{dx^i}{ds}=0$ gekennzeichneten Kurven.

Beachten wir jetzt unsere Annahme A) bezüglich der Funktionen $p^i(y^j, \xi^k)$, so folgt, daß die durch (4. 9) bestimmte Kurve $x^i=y^i(s)+\eta^i(s)$ immer eine Bahn bestimmt für beliebige Werte von $v^k$, $w^l$. Wählen wir also die durch (4. 12) angegebenen Werte, so folgt nach unserer vorigen Behauptung, daß bei beliebigem Wahl von $\delta v^k$, $\delta w^l$ die durch (4. 14) definierten Vektoren der Gleichung (4. 15) immer genügen werden. Das bedeutet aber, daß jeder Koeffizient der Größen $\delta v^k$, $\delta w^l$ in (4. 14) je einen der Gleichung (4. 15) genügenden Vektor bestimmt. Die Vektoren

$$\eta^i_{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial p^i(y^a;\xi^b)}{\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^j}{\partial v^k}\right]_{v^k=v^{*k},\ w^k=w^{*k}}$$

$$\tilde{\eta}^i_{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial p^i(y^a;\xi^b)}{\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^j}{\partial w^k}\right]_{v^k=v^{*k},\ w^k=w^{*k}}$$

genügen also der Gleichung (4. 15).

**Satz 7.** *Existieren unter den Vektoren $\eta^i_{(k)}$, $\tilde{\eta}^i_{(k)}$ $(k=1, \ldots, n)$ $n$ linear-unabhängige Vektoren — z. B. seien diese Vektoren eben die $\eta^i_{(k)}$ —, so kann durch diese Vektoren, d. h. durch $p^i$ und $\xi^i$ der Abweichungstensor $K^i_j$ ausgedrückt werden.*

Beweis. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit ist

$$\eta^j_{(m)}\eta^{(m)}_k = \delta^j_k \tag{4. 16}$$

bezüglich $\eta^{(m)}_k$ eindeutig lösbar.

[5]) Vgl. L. Berwald, loc. cit., insbesondere (2. 4) und (2. 5).

Da $\eta^j_{(m)}$ für $m=1, 2, \ldots, n$ Lösung von (4. 15) ist, hat man

$$\frac{D^2 \eta^j_{(m)}}{ds^2} + K^j_i \left(y, \frac{dy}{ds}\right) \eta^i_{(m)} = 0.$$

Eine Überschiebung mit $\eta^{(m)}_k$ gibt in Hinsicht auf (4. 16):

$$K^i_k \left(y(s), \frac{dy}{ds}\right) = -\frac{D^2 \eta^i_{(m)}}{ds^2} \eta^{(m)}_k, \tag{4. 17}$$

w.z.b.w.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch darauf hinweisen, daß unsere in diesem Paragraphen angegebenen Resultate, insbesondere die Formel (4. 17) auch für den Typus

$$y'' = \varphi(x, y, y') \tag{4. 18}$$

bestimmt werden kann. Die Differentialgleichung (4. 18) bestimmt die Bahnen einer zweidimensionalen Geometrie. Das charakteristische Differentialgleichungssystem (4. 1) der Bahnen geht in (4. 18) über, falls die Dimensionszahl $n=2$, ferner $s=x^1=x,\ x^2=y$,

$$G^1(x, y, x', y') = 0, \quad G^2(x, y, x', y') = -\frac{1}{2} x'^2 \varphi \left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$$

$$\varphi(x, y, y') \stackrel{\text{def}}{=} G^2 \left(x, y, 1, \frac{dy}{dx}\right)$$

gesetzt wird. Eine längere, aber elementare Rechnung zeigt, daß für den Typus (4. 18) der Abweichungstensor die Form:

$$K^1_1 = K^1_2 = 0, \quad K^2_1 = -y' K^2_2$$

$$K^2_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)^2$$

hat, wie das auf Grund der Definitionsformel von $K^i_j$ berechnet werden kann.

*(Eingegangen am 2. Oktober 1965.)*