Die Charakterisierung gewisser geordneter Halbmoduln mit Hilfe der Erweiterungstheorie

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

Wir wollen in dieser Arbeit alle Halbmoduln mit JIV bestimmen, womit wir kurz diejenigen geordneten Halbmoduln [1]) bezeichnen, welche die Eigenschaft

JIV: *Zu* $a \in \mathfrak{M}$ *und* $b \in \mathfrak{M}$ *mit* $a < b$ *existiert* $x \in \mathfrak{M}$ *mit* $a + x = b$

besitzen.

Früher hatten wir festgestellt (LUGOWSKI [1]), daß jeder solche Halbmodul sich aus einem Modul $\mathfrak{M}_1$ und einem positiv geordneten Halbmodul $\mathfrak{M}_2$ gemäß

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2$$

zusammensetzt, wobei $\mathfrak{M}_1$ außer seinem Nullelement gerade alle negativen Elemente von $\mathfrak{M}$ (d. h. Elemente $c \in \mathfrak{M}$ mit $c + c < c$) und deren Entgegengesetzten enthält; die trivialen Fälle $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2$ ordnen sich hierbei sinngemäß ein. Wir nennen $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ die *geordnete Zerlegung* von $\mathfrak{M}$ mit der *Modulkomponente* $\mathfrak{M}_1$; offenbar ist $\mathfrak{M}_2$ gemäß $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$ durch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ festgelegt. Genau diejenigen Halbmoduln $\mathfrak{M}$, für welche $\mathfrak{M}_2$ sogar natürlich geordnet ist [2]), genügen dabei der einfachen Additionsvorschrift

$$m_1 + m_2 = m_2$$

für alle $m_1 \in \mathfrak{M}_1$ und $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ und lassen sich auf diese Weise leicht aufbauen; wir bezeichnen in diesem Falle die geordnete Zerlegung von $\mathfrak{M}$ als *geordnete Summe* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \circlearrowleft \mathfrak{M}_2$. Im folgenden werden wir zeigen, daß sich auch alle übrigen Halbmoduln mit JIV durch Zusammensetzen eines Moduls und eines natürlich geordneten Halbmoduls gewinnen lassen, und zwar mit Hilfe einer Modifizierung der Schreierschen Erweiterungstheorie für Halbmoduln unter Einbeziehung der Ordnungsrelation (Satz 2 und 3). Insbesondere ordnen wir den Fall der geordneten Summe in diese Theorie ein (Satz 4), beschreiben den regulären Fall (Satz 5) und geben schießlich ein einfaches Beispiel eines Halbmoduls mit JIV an, der nicht zu diesen beiden Fällen gehört.

[1]) Unter einem geordneten Halbmodul verstehen wir hier eine kommutative Halbgruppe mit additiver Verknüpfung und einer Ordnungsrelation, die Trichotomie (JI), Transitivität (JII) und Monotonie (JIII: Aus $a < b$ folgt $a + c \leqq b + c$) erfüllt.

[2]) Die natürlich geordneten Halbmoduln sind gerade die positiv geordneten Halbmoduln mit JIV.

§ 1 Die Struktur der Halbmoduln mit JIV

Wir bemerken zunächst, daß sich in jedem (kommutativen) Halbmodul der Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2,$$

wo $\mathfrak{M}_1$ ein Modul ist [3]), eine Äquivalenzrelation gemäß

$$a \sim a' \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } x_1 \in \mathfrak{M}_1 \text{ mit } a + x_1 = a'$$

einführen läßt, die mit der Addition in $\mathfrak{M}$ kompatibel ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind von der Gestalt

$$[a] = a + \mathfrak{M}_1,$$

und wir erhalten den natürlichen Homomorphismus

$$(\ast) \qquad \mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1 \quad \text{vermöge} \quad a \to \bar{a} = [a]$$

von $\mathfrak{M}$ auf den Faktorhalbmodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ mit der Addition $[a]+[b]=[a+b]$ und dem Nullelement $\bar{o} = \mathfrak{M}_1$. Darüber hinaus gilt:

Satz 1. *Der Faktorhalbmodul $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ eines Halbmoduls $\mathfrak{M}$ mit* JIV *nach seiner Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$ wird zu einem natürlich geordneten Halbmodul, wenn man die Ordnung einführt gemäß*

$$[a] < [b] \Leftrightarrow [a] \neq [b] \quad \textit{und} \quad a < b.$$

Daher ist die Abbildung $(\ast)$ dann sogar ein o-*Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\overline{\mathfrak{M}}$* [4]).

Beweis. JI: Die Trichotomie ist klar, wenn wir zeigen, daß die Definition unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. Dazu sei $a \sim a'$, $b \sim b'$ und $a < b$, aber $a \not\sim b$, also $a' = a + x_1$, $b' = b + y_1$ und $a + x_2 = b$ mit $x_1 \in \mathfrak{M}_1$, $y_1 \in \mathfrak{M}_1$, $x_2 \in \mathfrak{M}_2$. Aus $x_1 < x_2 + y_1$ folgt dann jedenfalls

$$a' = a + x_1 \leqq a + x_2 + y_1 = b + y_1 = b'$$

und sogar $a' < b'$ wegen $a' \not\sim b'$.

JII: Es sei $[a] < [b]$ und $[b] < [c]$. Dann gilt jedenfalls $a < c$, zu zeigen bleibt $a \not\sim c$. Andernfalls gäbe es aber ein $x_1 \in \mathfrak{M}_1$ mit $a + x_1 = c$, was zusammen mit $b + x_2 = c$ $(x_2 \in \mathfrak{M}_2)$ wegen $x_2 + (-x_1) \in \mathfrak{M}_2$ zu dem Widerspruch

$$b \leqq b + x_2 + (-x_1) = a$$

führt.

JIII: Es sei $[a] < [b]$, also $a + x_2 = b$ mit $x_2 \in \mathfrak{M}_2$. Für jedes $c \in \mathfrak{M}$ gilt dann $a + c + x_2 = b + c$, also $a + c \leqq b + c$. Hieraus folgt, je nachdem ob $a + c \not\sim b + c$ oder $a + c \sim b + c$, entweder $[a+c] < [b+c]$ oder $[a+c] = [b+c]$, in jedem Falle also

$$[a] + [c] \leqq [b] + [c].$$

[3]) Offenbar ist das Nullelement o von $\mathfrak{M}_1$ auch Nullelement von $\mathfrak{M}$.

[4]) Damit bezeichnen wir einen Homomorphismus $a \to \bar{a}$ mit der Eigenschaft: Aus $a \leqq b$ folgt $\bar{a} \leqq \bar{b}$.

JIV: Aus $[a] < [b]$ folgt $a + x_2 = b$ mit $x_2 \in \mathfrak{M}_2$, also

$$[a] + [x_2] = [b].$$

Ferner sind alle Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}$ positiv, denn für $a \in \mathfrak{M}_1$ gilt $[a] = [o]$, und für $a \in \mathfrak{M}_2$ ergibt sich $[a] > [o]$ aus $a > o$ und $a \not\sim o$.

Der damit bewiesene Satz 1 veranlaßt uns zu folgender

Definition. *Ein Halbmodul M mit* JIV *heiße „Schreiersche Erweiterung" eines Moduls $\mathfrak{M}_1$ mit einem natürlich geordneten Halbmodul $\overline{\mathfrak{M}}$ (mit Nullelement), wenn M Oberhalbmodul von $\mathfrak{M}_1$ ist, der $\mathfrak{M}_1$ als Modulkomponente besitzt und für welchen die* o-*Isomorphie*

$$M/\mathfrak{M}_1 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} \overline{\mathfrak{M}}$$

gilt. Allgemeiner lassen wir für M auch zu, daß seine Modulkomponente M_1 nur $M_1 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} \mathfrak{M}_1$ und M entsprechend nur

$$M/M_1 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} \overline{\mathfrak{M}}$$

erfüllt.

Unter Verwendung dieser Begriffsbildung erkennt man, daß das Problem, alle Halbmoduln mit JIV (und nichtleerer Modulkomponente) zu finden und zu beschreiben, identisch ist mit dem „Schreierschen Erweiterungsproblem", zu gegebenem geordneten Modul $\mathfrak{M}_1$ und natürlich geordnetem Halbmodul $\overline{\mathfrak{M}}$ (mit Nullelement) alle Schreierschen Erweiterungen zu bestimmen. Um dieses Problem zu lösen, wollen wir als erstes die Struktur eines solchen Halbmoduls mit JIV als o-homomorphes Original des natürlich geordneten Faktorhalbmoduls $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ nach seiner Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$ mit Hilfe geeignet modifizierter Gedankengänge der Schreierschen Erweiterungstheorie für Halbgruppen beschreiben [5]). Dazu definieren wir zunächst wie üblich für die Elemente $\bar{a} = [a] \in \overline{\mathfrak{M}}$ eine *Auswahlfunktion* $f(\bar{a}) \in [a]$, d. h., wir wählen aus jeder Klasse $\bar{a} = [a]$ genau ein Element $f(\bar{a})$ fest aus; insbesondere setzen wir $f(\bar{o}) = o$, während $f(\bar{a}) \in \mathfrak{M}_2$ für $a \in \mathfrak{M}_2$ ist. Wir haben also

$$\bar{a} = [f(\bar{a})] = f(\bar{a}) + \mathfrak{M}_1,$$

so daß sich jedes Element von $\mathfrak{M}$ in der Gestalt $f(\bar{a}) + \alpha$ mit eindeutig bestimmten $f(\bar{a})$ und geeignetem $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ angeben läßt; allerdings kann dabei durchaus

$$f(\bar{a}) + \alpha = f(\bar{a}) + \beta$$

für verschiedene Elemente α und β aus $\mathfrak{M}_1$ gelten. Die Addition in $\overline{\mathfrak{M}}$ führt dann gemäß

$$\bar{a} + \bar{b} = [f(\bar{a})] + [f(\bar{b})] = [f(\bar{a}) + f(\bar{b})] = [f(\bar{a} + \bar{b})],$$

also

$$f(\bar{a}) + f(\bar{b}) = f(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{a}^{b}$$

[5]) Die von Rédei ([2]) vorgenommene Verallgemeinerung der Schreierschen Theorie auf Halbgruppen ist hierzu noch nicht ausreichend; denn $\mathfrak{M}_1$ braucht kein normaler Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}$ zu sein, d. h., aus $a + \alpha = a + \beta$ mit $\alpha \in \mathfrak{M}_1$, $\beta \in \mathfrak{M}_1$ braucht keineswegs $\alpha = \beta$ zu folgen; ganz abgesehen davon muß ja auch das Studium der Ordnungsrelation mit in die Betrachtung einbezogen werden.

zu dem *Summandensystem* $\bar{a}^{\bar{b}} \in \mathfrak{M}_1$ mit der „Anfangsbedingung" $\bar{o}^{\bar{o}} = o$. Ferner gilt, wie aus dem erstem Teil des Beweises von Satz 1 hervorgeht:

$$f(\bar{a}) + \alpha < f(\bar{b}) + \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder} & f(\bar{a}) < f(\bar{b}) \\ \text{oder} & f(\bar{a}) = f(\bar{b}), \quad \alpha < \beta, \quad f(\bar{a}) + \alpha \neq f(\bar{b}) + \beta \end{cases}$$

Auf Grund dieser Zusammenhänge zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}$ einerseits und den Elementen von $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{M}_1$ andererseits führen wir nun in der Produktmenge $\overline{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{M}_1$ die Äquivalenzrelation

$$(\bar{a}, \alpha) \sim (\bar{b}, \beta) \;\Leftrightarrow\; \bar{a} = \bar{b} \quad \text{und} \quad f(\bar{a}) + \alpha = f(\bar{b}) + \beta$$

ein und legen für die zugehörigen Äquivalenzklassen $[\bar{a}, \alpha]$ eine Addition und eine Ordnung gemäß

$$[\bar{a}, \alpha] + [\bar{b}, \beta] = [\bar{a} + \bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}} + \alpha + \beta],$$

$$[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder} & \bar{a} < \bar{b} \\ \text{oder} & \bar{a} = \bar{b}, \quad \alpha < \beta, \quad f(\bar{a}) + \alpha \neq f(\bar{b}) + \beta \end{cases}$$

fest. Man sieht unmittelbar, daß diese Festlegungen unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten sind und daß damit die Menge M der Klassen $[\bar{a}, \alpha]$ insbesondere zur geordneten Menge wird (JI und JII). Darüber hinaus gilt offenbar, daß die Zuordnung

$$f(\bar{a}) + \alpha \to [\bar{a}, \alpha]$$

einen o-Isomorphismus $\mathfrak{M} \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} M$ von $\mathfrak{M}$ auf M gibt. Daher ist auch M ein Halbmodul mit JIV. Dieser besitzt die geordnete Zerlegung $M = M_1 \cup M_2$ mit der Modulkomponente $M_1 = \{[\bar{o}, \alpha] \colon \alpha \in \mathfrak{M}_1\}$ und dem positiv geordneten Halbmodul $M_2 = M \setminus M_1$, wie aus den durch den obigen o-Isomorphismus induzierten o-Isomorphismen

$$\mathfrak{M}_1 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} M_1 \quad \text{vermöge} \quad \alpha \to [\bar{o}, \alpha],$$

$$\mathfrak{M}_2 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} M_2 \quad \text{vermöge} \quad f(\bar{a}) + \alpha \to [\bar{a}, \alpha] \qquad (\bar{a} \neq \bar{o})$$

hervorgeht.

Um diese Aussage unabhängig von der Auswahlfunktion $f(\bar{a})$ formulieren zu können, betrachten wir die dreistellige Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ in $\overline{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$, welche durch das Bestehen der Gleichung

$$f(\bar{a}) + \alpha = f(\bar{a}) + \beta \tag{0}$$

gegeben wird. Diese Relation besitzt offenbar folgende Eigenschaften:

(1) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha)$;

(2) $R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Rightarrow R(\bar{a}, \beta, \alpha)$;

(3) $R(\bar{a}, \alpha, \beta), R(\bar{a}, \beta, \gamma) \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha, \gamma)$;

(4) $R(\bar{o}, \alpha, \beta) \Rightarrow \alpha = \beta$;

(5) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha'), R(\bar{b}, \beta, \beta') \Rightarrow R(\bar{a} + \bar{b}, \alpha + \beta, \alpha' + \beta')$;

(6) $\alpha < \beta, \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta), R(\bar{a}, \alpha, \alpha'), R(\bar{a}, \beta, \beta') \Rightarrow \alpha' < \beta'$ *).

*) Mit $\neg R$ wird das Nichtbestehen der Relation bezeichnet.

Ferner bestehen zwischen dieser Relation und dem Summandensystem $\bar{a}^{\bar{b}} \in \mathfrak{M}_1$ folgende Zusammenhänge:

(I) $R(\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}^{\bar{b}},\ \bar{b}^{\bar{a}})$;

(II) $R(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\ \bar{a}^{\bar{b}+\bar{c}}+\bar{b}^{\bar{c}},\ (\bar{a}+\bar{b})^{\bar{c}}+\bar{a}^{\bar{b}})$;

(III) $\bar{a}<\bar{b},\ \bar{a}+\bar{c}=\bar{b}+\bar{c},\ \alpha\in\mathfrak{M}_1,\ \beta\in\mathfrak{M}_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{entweder} & R(\bar{a}+\bar{c},\quad \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha,\quad \bar{b}^{\bar{c}}+\beta) \\ \text{oder} & \neg R(\bar{a}+\bar{c},\quad \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha,\quad \bar{b}^{\bar{c}}+\beta),\quad \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha<\bar{b}^{\bar{c}}+\beta; \end{cases}$$

dabei sind (II lonotonie-
gesetz in M oc

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{entweder} & R(\bar{a}+\bar{c},\quad \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha,\quad \bar{b}^{\bar{c}}+\beta) \\ \text{oder} & \neg R(\bar{a}+\bar{c},\quad \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha,\quad \bar{b}^{\bar{c}}+\beta),\quad \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha<\bar{b}^{\bar{c}}+\beta; \end{cases}$$

Wir führen nun folgende Begriffsbildung ein:

Definition. *Es sei $\mathfrak{M}_1$ ein geordneter Modul und $\overline{\mathfrak{M}}$ ein natürlich geordneter Halbmodul mit Nullelement $\bar{o}$. Ferner sei $\bar{a}^{\bar{b}}$ ein System von Elementen aus $\mathfrak{M}_1$, welches die Anfangsbedingung $\bar{o}^{\bar{o}}=o$ erfüllt, und $R(\bar{a},\alpha,\beta)$ eine Relation für die Elemente $\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$ und $\alpha,\beta\in\mathfrak{M}_1$, welche die Eigenschaften (1)—(6) besitzt.*

Dann bezeichnen wir als „Schreiersche geordnete Summe" $[\overline{\mathfrak{M}},\mathfrak{M}_1]$ diejenige geordnete algebraische Struktur, welche als Elemente die in der Produktmenge $\overline{\mathfrak{M}}\times\mathfrak{M}_1$ nach der Äquivalenzrelation

(Ä) $$(\bar{a},\alpha)\sim(\bar{b},\beta)\ \Leftrightarrow\ \bar{a}=\bar{b}\quad \textit{und}\quad R(\bar{a},\alpha,\beta)$$

gebildeten Klassen $[\bar{a},\alpha]$ enthält und in welcher Addition und Ordnung gemäß

(A) $$[\bar{a},\alpha]+[\bar{b},\beta]=[\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta],$$

(J) $$[\bar{a},\alpha]<[\bar{b},\beta]\Leftrightarrow\begin{cases}\textit{entweder} & \bar{a}<\bar{b}\\ \textit{oder} & \bar{a}=\bar{b},\quad \alpha<\beta,\ \ \neg R(\bar{a},\alpha,\beta)\end{cases}$$

festgelegt sind.

Zur Rechtfertigung dieser Definition bemerken wir zunächst, daß (Ä) wegen (1)—(3) tatsächlich eine Äquivalenzrelation in $\overline{\mathfrak{M}}\times\mathfrak{M}_1$ darstellt. Ferner handelt es sich bei (A) um eine eindeutige, d. h. von den gewählten Repräsentanten unabhängige Vorschrift. Um dies zu zeigen, wählen wir

$$(\bar{a},\alpha)\sim(\bar{a}',\alpha')\quad\text{und}\quad(\bar{b},\beta)\sim(\bar{b}',\beta').$$

Also gilt gemäß (Ä)

$$\bar{a}=\bar{a}',\ R(\bar{a},\alpha,\alpha')\quad\text{und}\quad\bar{b}=\bar{b}',\ R(\bar{b},\beta,\beta').$$

Daraus folgt $\bar{a}+\bar{b}=\bar{a}'+\bar{b}'$ und $\bar{a}^{\bar{b}}=\bar{a}'^{\bar{b}'}$, sowie gemäß (5)

$$R(\bar{a}+\bar{b},\ \alpha+\beta,\ \alpha'+\beta').$$

Nun beachten wir, daß sich aus (5) insbesondere die Regel

(5′) $$R(\bar{a},\alpha,\beta)\Leftrightarrow R(\bar{a},\alpha+\gamma,\beta+\gamma)$$

für jedes $\gamma \in \mathfrak{M}_1$ folgern läßt, denn es gilt ja $R(\bar{o}, \gamma, \gamma)$ bzw. $R(\bar{o}, -\gamma, -\gamma)$ gemäß (1). Also können wir von der obigen Aussage zu

$$R(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta, \bar{a}'^{\bar{b}'}+\alpha'+\beta')$$

übergehen, woraus — wie behauptet — folgt

$$(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta) \sim (\bar{a}'+\bar{b}', \bar{a}'^{\bar{b}'}+\alpha'+\beta').$$

Schließlich zeigen wir die Eindeutigkeit der Definition (J) und darüber hinaus sogleich, daß $[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ auf Grund von (J) tatsächlich zur geordneten Menge wird (JI und JII). Dazu wählen wir $(\bar{a}', \alpha')$ und $(\bar{b}', \beta')$ wie oben. Also gilt mit $\bar{a} < \bar{b}$ auch $\bar{a}' < \bar{b}'$ und mit $\bar{a} = \bar{b}$ auch $\bar{a}' = \bar{b}'$. Ferner folgt aus $\alpha < \beta$ wegen (6) auch $\alpha' < \beta'$. Weiterhin gilt im Falle $\bar{a} = \bar{b}$ auch $\neg R(\bar{a}, \alpha', \beta')$; denn wäre $R(\bar{a}, \alpha', \beta')$, so erhielten wir wegen (3) mit $R(\bar{a}, \alpha, \alpha')$ zunächst $R(\bar{a}, \alpha, \beta')$ und (unter Verwendung von (2)) mit $R(\bar{a}, \beta', \beta)$ dann $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\neg R(\bar{a}, \alpha, \beta)$. Die Trichotomie (JI) ergibt sich durch Betrachtung der sich ausschließenden Fälle $\bar{a} < \bar{b}, \bar{a} > \bar{b}, \bar{a} = \bar{b}$ und $\neg R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ mit $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ($\alpha = \beta$ ist wegen (1) unmöglich) sowie $\bar{a} = \bar{b}$ und $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$. Zum Beweis der Transitivität (JII) sei $[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta]$ und $[\bar{b}, \beta] < [\bar{c}, \gamma]$. Dann folgt $[\bar{a}, \alpha] < [\bar{c}, \gamma]$; denn entweder gilt $\bar{a} < \bar{b} \leqq \bar{c}$ oder $\bar{a} \leqq \bar{b} < \bar{c}$ oder $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}, \alpha < \beta < \gamma, \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta), \neg R(\bar{a}, \beta, \gamma)$ und damit $\neg R(\bar{a}, \alpha, \gamma)$, da $R(\bar{a}, \alpha, \gamma)$ zusammen mit $R(\bar{a}, \beta, \beta), \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta), \alpha < \beta$ wegen (6) den Widerspruch $\gamma < \beta$ lieferte.

Unsere Strukturbeschreibung eines Halbmoduls mit JIV können wir damit in folgender Form zusammenfassen:

Satz 2. *Jeder Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *und der Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$ ist* o-*isomorph zu einer Schreierschen geordneten Summe $[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ mit den Eigenschaften* (I)—(III).

Man erhält eine solche Summe $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ etwa, indem man $\overline{\mathfrak{M}}$ als den (gemäß Satz 1 *geordneten) Faktorhalbmodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ wählt und die Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ mit Hilfe einer Auswahlfunktion $f(\bar{a})$ für die Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}$ gemäß*

$$(0) \qquad R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow f(\bar{a})+\alpha = f(\bar{a})+\beta$$

festlegt. Ein o-*Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf M wird dann durch die Zuordnung*

$$f(\bar{a})+\alpha \rightarrow [\bar{a}, \alpha]$$

gegeben, wobei die geordnete Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ zu einer solchen von M führt, nämlich gemäß $M = M_1 \cup M_2$ mit

$$\mathfrak{M}_1 \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_1 = \{[\bar{o}, \alpha] : \alpha \in \mathfrak{M}_1\},$$

$$\mathfrak{M}_2 \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_2 = M \setminus M_1 .$$

M ist daher (wie $\mathfrak{M}$) eine Schreiersche Erweiterung von $\mathfrak{M}_1$ mit $\overline{\mathfrak{M}}$.

§ 2. Die Konstruktion aller Halbmoduln mit JIV

Eine Übersicht über alle möglichen Halbmoduln mit JIV ergibt sich nun wie folgt:

Satz 3. *Eine Schreiersche geordnete Summe* $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ *eines geordneten Moduls* $\mathfrak{M}_1$ *und eines natürlich geordneten Halbmoduls* $\overline{\mathfrak{M}}$ *mit Nullelement* $\bar{o}$ *ist ein Halbmodul mit* JIV *genau dann, wenn die Bedingungen* (I)—(III) *erfüllt sind. Die Modulkomponente* M_1 *von* M *ist dann*

$$M_1=\{[\bar{o}, \alpha]\colon \alpha\in\mathfrak{M}_1\}$$

und erfüllt

$$\mathfrak{M}_1 \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_1 \quad \textit{vermöge} \quad \alpha\rightarrow[\bar{o}, \alpha];$$

ferner gilt

$$\overline{\mathfrak{M}} \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M/M_1 \quad \textit{vermöge} \quad \bar{a}\rightarrow\big[[\bar{a}, \alpha]\big]=[\bar{a}, \alpha]+M_1,$$

d. h., M ist eine Schreiersche Erweiterung von $\mathfrak{M}_1$ *mit* $\overline{\mathfrak{M}}$. *Gemäß Satz* 2 *ist jeder Halbmodul mit* JIV *und der Modulkomponente* $\mathfrak{M}_1$ *zu einer solchen Schreierschen Erweiterung* o-*isomorph.*

Beweis. Die Bedingung (I) ist genau dann erfüllt, wenn die Addition in M kommutativ ist; denn aus

$$[\bar{a}, \alpha]+[\bar{b}, \beta] = [\bar{b}, \beta]+[\bar{a}, \alpha],$$

d. h. aus

$$[\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta] = [\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}^{\bar{a}}+\alpha+\beta]$$

folgt gerade $R(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta, \bar{b}^{\bar{a}}+\alpha+\beta)$, also (I) wegen (5′), und umgekehrt.

Die Bedingung (II) ist genau dann erfüllt, wenn die Addition in M assoziativ ist; denn aus

$$([\bar{a}, \alpha]+[\bar{b}, \beta])+[\bar{c}, \gamma] = [\bar{a}, \alpha]+([\bar{b}, \beta]+[\bar{c}, \gamma]),$$

d. h. aus

$$[\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, (\bar{a}+\bar{b})^{\bar{c}}+\bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta+\gamma] = [\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{b}+\bar{c}}+\bar{b}^{\bar{c}}+\alpha+\beta+\gamma]$$

folgt gerade $R(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, (\bar{a}+\bar{b})^{\bar{c}}+\bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta+\gamma,\ \bar{a}^{\bar{b}+\bar{c}}+\bar{b}^{\bar{c}}+\alpha+\beta+\gamma)$, also (II) wegen (5′), und umgekehrt.

Die Bedingung (III) ist genau dann erfüllt, wenn in M das Monotoniegesetz (JIII) gilt:

$$[\bar{a}, \alpha]<[\bar{b}, \beta] \Rightarrow [\bar{a}, \alpha]+[\bar{c}, \gamma]\leqq[\bar{b}, \beta]+[\bar{c}, \gamma],$$

d. h.

$$[\bar{a}, \alpha]<[\bar{b}, \beta] \Rightarrow [\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha+\gamma]\leqq[\bar{b}+\bar{c}, \bar{b}^{\bar{c}}+\beta+\gamma].$$

Die Gültigkeit dieses Gesetzes besagt nämlich, daß im Falle $\bar{a}<\bar{b}$, $\bar{a}+\bar{c}=\bar{b}+\bar{c}$ (unter Berücksichtigung von (5′)) für Elemente α und β aus $\mathfrak{M}_1$ entweder

$$[\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha]=[\bar{b}+\bar{c}, \bar{b}^{\bar{c}}+\beta], \quad \text{also} \quad R(\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha, \bar{b}^{\bar{c}}+\beta)$$

oder

$$[\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha]<[\bar{b}+\bar{c}, \bar{b}^{\bar{c}}+\beta], \text{ also } \neg R(\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha, \bar{b}^{\bar{c}}+\beta) \text{ und } \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha<\bar{b}^{\bar{c}}+\beta$$

folgt. Umgekehrt ergibt sich aus (III) das Monotoniegesetz für den Fall, daß $\bar{a} < \bar{b}$, $\bar{a}+\bar{c} = \bar{b}+\bar{c}$ gilt; im Falle $\bar{a} < \bar{b}$, $\bar{a}+\bar{c} < \bar{b}+\bar{c}$ ist dies trivial, im Falle $\bar{a} = \bar{b}$, $\alpha < \beta$, $\neg R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ ebenfalls, da dann stets $\bar{a}+\bar{c} = b+\bar{c}$ und entweder $R(\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha, \bar{a}^{\bar{c}}+\beta)$ oder $\neg R(\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}^{\bar{c}}+\alpha, \bar{a}^{\bar{c}}+\beta)$ eintritt.

Ferner überträgt sich die Gültigkeit von JIV von $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{M}_1$ auf M; denn aus $[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta]$ folgt $\bar{a} \leqq \bar{b}$, so daß ein $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ mit $\bar{a}+\bar{x} = \bar{b}$ existiert, und dann gilt

$$[\bar{a}, \alpha] + [x, \beta - \bar{a}^{\bar{x}} - \alpha] = [\bar{b}, \beta].$$

Wir zeigen nun, daß

$$\mathfrak{M}_1 \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_1 = \{[\bar{o}, \alpha] : \alpha \in \mathfrak{M}_1\} \quad \text{vermöge} \quad \alpha \to [\bar{o}, \alpha]$$

gilt. In der Tat ist diese Abbildung von $\mathfrak{M}_1$ auf M_1 eineindeutig, denn wegen (1) bzw. (4) gilt

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow R(\bar{o}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow [\bar{o}, \alpha] = [\bar{o}, \beta],$$

und weiterhin relationstreu bezüglich Addition und Ordnung, da

$$\alpha+\beta \to [\bar{o}, \alpha+\beta] = [\bar{o}+\bar{o}, \bar{o}^{\bar{o}}+\alpha+\beta] = [\bar{o}, \alpha]+[\bar{o}, \beta]$$

wegen $\bar{o}^{\bar{o}} = o$ gilt und mit $\alpha < \beta$ wegen (4) auch $\neg R(\bar{o}, \alpha, \beta)$ erfüllt ist, so daß

$$\alpha < \beta \Rightarrow [\bar{o}, \alpha] < [\bar{o}, \beta]$$

besteht.

Weiterhin ist der geordnete Modul M_1 die Modulkomponente von M, denn in M_1 liegen alle negativen Elemente von M: Ein negatives Element $[\bar{a}, \alpha]$ von M muß nämlich kleiner sein als jedes positive Element $[\bar{o}, \beta]$ von M_1, also $\bar{a} \leqq \bar{o}$ und damit $\bar{a} = \bar{o}$ erfüllen. Schließlich gilt

$$\overline{\mathfrak{M}} \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M/M_1 \quad \text{vermöge} \quad \bar{a} \to [[\bar{a}, \alpha]],$$

wobei die äußeren (eckigen) Klammern die Bildung der Klasse $[a, \alpha]+M_1$ in M wie am Anfang von § 1 bezeichnen möge. Wir weisen zunächst die Eineindeutigkeit dieser Abbildung von $\overline{\mathfrak{M}}$ auf M/M_1 nach: Es gilt $[[\bar{a}, \alpha]] = [[\bar{b}, \beta]]$ genau dann, wenn es ein Element $[\bar{o}, \gamma] \in M_1$ mit

$$[\bar{a}, \alpha]+[\bar{o}, \gamma] = [\bar{b}, \beta],$$

also

$$[\bar{a}, \bar{a}^{\bar{o}}+\alpha+\gamma] = [\bar{b}, \beta]$$

gibt, d. h. genau dann, wenn $\bar{a} = \bar{b}$ gilt und ein Element $\gamma \in \mathfrak{M}_1$ mit $R(\bar{a}, \bar{a}^{\bar{o}}+\alpha+\gamma, \beta)$ existiert. Letztere Bedingung ist aber wegen (1) stets erfüllt, da in dem Modul $\mathfrak{M}_1$ die Gleichung $\bar{a}^{\bar{o}}+\alpha+\gamma = \beta$ stets lösbar ist. Also gilt

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow [[\bar{a}, \alpha]] = [[\bar{b}, \beta]].$$

Ferner ist die Abbildung relationstreu bezüglich der Addition wegen

$$[[\bar{a}, \alpha]]+[[\bar{b}, \beta]] = [[\bar{a}, \alpha]+[\bar{b}, \beta]] = [[\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta]]$$

und bezüglich der Ordnung wegen

$$\bar{a} < \bar{b} \Rightarrow [[\bar{a}, \alpha]] \neq [[\bar{b}, \beta]], [\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta] \Rightarrow [[\bar{a}, \alpha]] < [[\bar{b}, \beta]].$$

§ 3 Spezialfälle

Wir ordnen als erstes den Fall $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\,\overset{<}{\cup}\,\mathfrak{M}_2$ in unsere Untersuchungen ein, der entsprechend unseren Ausführungen in der Einleitung genau dann eintritt, wenn $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist.

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *ein Halbmodul mit* JIV *und der geordneten Zerlegung* $\mathfrak{M}=$ $=\mathfrak{M}_1\,\overset{<}{\cup}\,\mathfrak{M}_2$; *ferner sei* $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ *und* $\overline{\mathfrak{N}}=\overline{\mathfrak{M}}\setminus\{\bar{o}\}$. *Dann gilt*

$$\mathfrak{M}_2 \overset{\simeq}{\underset{<}{\leftrightarrow}} \overline{\mathfrak{N}} \quad \text{vermöge} \quad a\to\bar{a}=[a]=a+\mathfrak{M}_1;$$

man erhält eine Auswahlfunktion $f(\bar{a})$ *und ein Summandensystem* $\bar{a}^{\bar{b}}$ *(mit* $\bar{o}^{\bar{o}}=o$*) durch die Festlegungen*

$$f(\bar{a})=\begin{cases} o & \text{für} \quad a\in\mathfrak{M}_1, \\ a & \text{für} \quad a\in\mathfrak{M}_2; \end{cases}$$

$$\text{(i)} \qquad \bar{a}^{\bar{b}}=o \quad \text{für alle} \quad a,\, b\in\mathfrak{M},$$

und die durch (0) *gegebene Relation* $R(\bar{a},\alpha,\beta)$ *erfüllt*

$$\text{(ii)} \qquad R(\bar{a},\alpha,\beta)\Leftrightarrow\begin{cases} \text{entweder} & \bar{a}=\bar{o}, \quad \alpha=\beta \\ \text{oder} & \bar{a}\neq\bar{o}, \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ beliebig.} \end{cases}$$

Die zugehörige Schreiersche geordnete Summe $M=[\overline{\mathfrak{M}},\mathfrak{M}_1]$ *wird dann beschrieben durch*

$$[\bar{a},\alpha]=[\bar{b},\beta]\Leftrightarrow\begin{cases} \text{entweder} & \bar{a}=\bar{b}=\bar{o}, \quad \alpha=\beta \\ \text{oder} & \bar{a}=\bar{b}\neq\bar{o}, \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ beliebig;} \end{cases}$$

$$[\bar{a},\alpha]+[\bar{b},\beta]=[\bar{a}+\bar{b},\alpha+\beta];$$

$$[\bar{a},\alpha]<[\bar{b},\beta]\Leftrightarrow\begin{cases} \text{entweder} & \bar{a}<\bar{b} \\ \text{oder} & \bar{a}=\bar{b}=\bar{o}, \quad \alpha<\beta, \end{cases}$$

und es gilt

$$\mathfrak{M}\overset{\simeq}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M=M_1\,\overset{<}{\cup}\,M_2$$

mit

$$\mathfrak{M}_1\overset{\simeq}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_1=\{[\bar{o},\alpha]:\alpha\in\mathfrak{M}_1\} \quad \text{vermöge} \quad \alpha\to[\bar{o},\alpha],$$

$$\mathfrak{M}_2\overset{\simeq}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_2=\{[\bar{a},o]:\bar{a}\neq\bar{o}\} \quad \text{vermöge} \quad \bar{a}\to[\bar{a},o].$$

Geht man umgekehrt von einem geordneten Modul $\mathfrak{M}_1$ *und einem natürlich geordneten Halbmodul* $\overline{\mathfrak{M}}$ *mit Nullelement* $\bar{o}$ *aus, so führen* (i) *und* (ii) *zu einer Schreierschen geordneten Summe* $M=[\overline{\mathfrak{M}},\mathfrak{M}_1]$, *welche ein Halbmodul mit* JIV *und natürlich geordneter Komponente* $\mathfrak{M}_2\overset{\simeq}{\underset{<}{\leftrightarrow}}\overline{\mathfrak{M}}\setminus\{\bar{o}\}$ *ist.*

Damit sind die Halbmoduln $\mathfrak{M}$ *mit* JIV *und einer geordneten Zerlegung* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\,\overset{<}{\cup}\,\mathfrak{M}_2$ *bis auf* o*-Isomorphie gerade die durch* (i) *und* (ii) *festgelegten Schreierschen geordneten Summen.*

Beweis. Die Aussagen des ersten Teiles der Behauptung ergeben sich durch leichte Überlegung unter Berücksichtigung der Additionsvorschrift

$$m_1 + m_2 = m_2 \qquad (m_1 \in \mathfrak{M}_1,\ m_2 \in \mathfrak{M}_2)$$

und Satz 2.

Für die Umkehrung stellen wir zunächst fest, daß auf Grund der Voraussetzungen über $\mathfrak{M}_1$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ die durch (ii) definierte Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ offenbar die Eigenschaften (1)—(6) besitzt und auch die Zusammenhänge (I)—(III) zwischen $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ und dem durch (i) definierten Summendensystem bestehen; insbesondere tritt in (III) immer der erste Fall $R(\bar{a}+\bar{c}, a^{\bar{c}}+\alpha, \bar{b}^{\bar{c}}+\beta)$ ein, da der zweite Fall $\bar{a}+\bar{c}=\bar{o}$, also auch $\bar{b}+\bar{c}=\bar{o}$ und damit $\bar{a}=\bar{b}=\bar{o}$ erforderte. Also führen (i) und (ii) tatsächlich zu einer Schreierschen geordneten Summe $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$, und diese ist gemäß Satz 3 ein Halbmodul mit JIV und der Modulkomponente $M_1=\{[\bar{o}, \alpha]\colon \alpha \in \mathfrak{M}_1\}$. Ferner erfüllt $M_2 = M \setminus M_1$ ebenfalls JIV, ist also natürlich geordnet, denn sind $[\bar{a}, \alpha]$ und $[\bar{b}, \beta]$ Elemente von M_2 mit $[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta]$, so gibt es jedenfalls ein $[\bar{x}, \xi] \in M$ mit $[\bar{a}, \alpha]+[\bar{x}, \xi]=[\bar{b}, \beta]$, und es gilt sogar $[\bar{x}, \xi] \in M_2$, da wegen $\bar{a} \neq \bar{o}$, $\bar{b} \neq \bar{o}$ nach Voraussetzung $\bar{a} < \bar{b}$ gilt, sodaß $\bar{a}+\bar{x}=\bar{b}$ auch $\bar{x} \neq \bar{o}$ nach sich zieht. Schließlich gilt

$$\overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\} \overset{\simeq}{\underset{<}{\longleftrightarrow}} M_2 \quad \text{vermöge} \quad \bar{a} \to [\bar{a}, o],$$

wie man unmittelbar den im Satz aufgeführten Regeln für das Rechnen in M entnimmt.

Als nächstes wollen wir den Fall betrachten, daß $\mathfrak{M}$ ein regulärer Halbmodul mit JIV ist, d. h. in $\mathfrak{M}$ die „Kürzungsregel"

$$a+c=b+c \Rightarrow a=b$$

gilt.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein regulärer Halbmodul mit* JIV *und der Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$. Dann ist auch $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ ein regulärer (natürlich geordneter) Halbmodul, das Summandensystem $\bar{a}^{\bar{b}}$ genügt der Bedingung*

(i) $$\bar{a}^{\bar{o}} = \bar{o}^{\bar{a}} = o \quad \textit{für alle} \quad \bar{a} \in \mathfrak{M},$$

und die durch (0) *gegebene Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ erfüllt für alle $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$*

$$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta,$$

woraus insbesondere folgt:

(iii) $$\bar{a}^{\bar{b}} = \bar{b}^{\bar{a}}, \quad \bar{a}^{\bar{b}+\bar{c}} + \bar{b}^{\bar{c}} = (\bar{a}+\bar{b})^{\bar{c}} + \bar{a}^{\bar{b}}.$$

Die zugehörige Schreiersche geordnete Summe $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$, zu welcher $\mathfrak{M}$ gemäß Satz 2 o-isomorph ist, wird dann beschrieben durch

$$[\bar{a}, \alpha] = [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \quad \textit{und} \quad \alpha = \beta\text{ [6])}$$

$$[\bar{a}, \alpha] + [\bar{b}, \beta] = [\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}^{\bar{b}}+\alpha+\beta],$$

$$[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{entweder} & \bar{a} < \bar{b} \\ \textit{oder} & \bar{a} = \bar{b}, \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

[6]) Damit kann also $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ mengenmäßig mit der Produktmenge $\overline{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{M}_1$ identifiziert werden.

Geht man umgekehrt von einem geordneten Modul $\mathfrak{M}_1$ *und einem regulären natürlich geordneten Halbmodul* $\overline{\mathfrak{M}}$ *mit Nullelement* $\bar{o}$ *aus, so führen* (i), (ii) *und* (iii) *zu einer Schreierschen geordneten Summe* $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$, *welche ein regulärer Halbmodul mit* JIV *ist.*

Damit sind die regulären Halbmoduln mit JIV *(und nichtleerer Modulkomponente) bis auf* o*-Isomorphie gerade die lexikographisch geordneten (endomorphismenfreien) Schreierschen Erweiterungen eines geordneten Moduls mit einem regulären natürlich geordneten Halbmodul (mit Nullelement) im Sinne der von* Rédei [2] *auf Halbgruppen verallgemeierten Erweiterungstheorie.*

Beweis. Für den ersten Teil der Behauptung zeigen wir die Regularität von $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$: Aus $[a]+[c]=[b]+[c]$ folgt $[a+c]=[b+c]$, also die Existenz eines $x_1\in\mathfrak{M}_1$ mit $a+c+x_1=b+c$; wegen der Regularität von $\mathfrak{M}$ gilt damit aber auch $a+x_1=b$ und daher $[a]=[b]$. Die übrigen Aussagen sind dann ebenfalls auf Grund der Regularität von $\mathfrak{M}$ und wegen Satz 2 klar.

Umgekehrt sind (1)—(6) für die durch (ii) definierte „identische" Relation trivialerweise erfüllt, und (i) und (iii) gewährleisten (I) und (II), während (III) auf Grund der Regularität von $\overline{\mathfrak{M}}$ gegenstandlos wird [7]). Also erhalten wir wieder eine Schreiersche geordnete Summe $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$, die nach Satz 3 ein Halbmodul mit JIV ist. M ist ebenfalls regulär, denn aus $[\bar{a}, \alpha]+[\bar{c}, \gamma]=[\bar{b}, \beta]+[\bar{c}, \gamma]$ folgt $\bar{a}+\bar{c}=\bar{b}+\bar{c}$ und $\bar{a}^{\bar{c}}+\alpha+\gamma=\bar{b}^{\bar{c}}+\beta+\gamma$, also $\bar{a}=\bar{b}$ und damit $\alpha=\beta$, d. h. $[\bar{a}, \alpha]=[\bar{b}, \beta]$.

Abschließend wollen wir noch unter Anwendung von Satz 3 ein *Beispiel eines Halbmoduls M mit* JIV konstruieren, *der nicht regulär und dessen geordnete Zerlegung* $M=M_1\cup M_2$ *keine geordnete Summe* ist, der also nicht zu den in Satz 5 bzw. Satz 4 behandelten Fällen gehört. Dazu nehmen wir für $\mathfrak{M}_1$ einen beliebigen geordneten Modul und setzen $\overline{\mathfrak{M}}=\{\bar{o}, \bar{1}, \bar{2}\}$ mit $\bar{o}$ als Nullelement und $\bar{a}+\bar{b}=\bar{2}$ für $\bar{a}\neq\bar{o}, \bar{b}\neq\bar{o}$; ferner definieren wir

(i) $$\bar{a}^{\bar{b}}=o \quad \text{für alle} \quad \bar{a}, \bar{b}\in\overline{\mathfrak{M}};$$

(ii) $$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder} & \bar{a}\neq\bar{2}, \quad \alpha=\beta \\ \text{oder} & \bar{a}=\bar{2}, \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ beliebig.} \end{cases}$$

In der Tat sind damit (1)—(6) und (I)—(III) erfüllt. In $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ gelten dann insbesondere die Regeln

$$[\bar{1}, \alpha]\neq[\bar{1}, \beta] \Leftrightarrow \alpha\neq\beta,$$
$$[\bar{2}, o]=[\bar{2}, \alpha] \quad \text{für alle } \alpha\in\mathfrak{M}_1,$$

d. h., es ist $M=M_1\cup\{[\bar{1}, \alpha]: \alpha\in\mathfrak{M}_1\}\cup\{[\bar{2}, o]\}$, und die Addition in M verläuft gemäß

$$[\bar{o}, \alpha]+\begin{cases}[\bar{o}, \beta]=[\bar{o}, \alpha+\beta],\\ [\bar{1}, \beta]=[\bar{1}, \alpha+\beta],\\ [\bar{2}, o]=[\bar{2}, o],\end{cases}$$

$$[\bar{1}, \alpha]+[\bar{1}, \beta]=[\bar{1}, \alpha]+[\bar{2}, o]=[\bar{2}, o]+[\bar{2}, o]=[\bar{2}, o].$$

7) Bei nichtregulärem $\overline{\mathfrak{M}}$ ist mit der Relation (ii) die Bedingung (III) durch keine Wahl des Summandensystems zu erfüllen.

Literatur

[1] H. Lugowski, Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 23—31.
[2] L. Rédei, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952), 252—273.

(Eingegangen am 19. Oktober 1965.)