Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen

Von ARTHUR MOÓR (Szeged)

Inhalt

§ 1. Einleitung

Im folgenden werden wir eine lineare Übertragungstheorie in einem solchen Raum $\mathfrak{M}_n$ entwickeln, dessen Grundelemente (x^i, v^i), $(i=1, 2, \ldots, n)$ den Transformationsformeln von der Form:

$$\text{(1. 1)} \qquad \begin{cases} \hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ \hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^n), \quad \bar{v}^j = \dfrac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r} v^r \end{cases}$$

$$\text{(1. 2a)} \qquad \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k}\right) \neq 0 \qquad\qquad \text{(1. 2b)} \quad \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^k}\right) \neq 0$$

genügen und die Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^n)$ dabei in den $\bar{v}^k$ homogen von erster Ordnung sind. Die v^i sollen immer nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt sein, d. h. (x^i, v^i) und $(x^i, \varrho v^i)$ definieren dasselbe Grundelement von $\mathfrak{M}_n$. Offenbar ist diese Eigenschaft auf Grund der vorausgesetzten Homogenität erster Ordnung der Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v})$ auch für die transformierten Grundelemente $(\hat{x}^i, \hat{v}^i)$ gültig.

Vor allem geben wir eine geometrische Interpretation für die Grundelemente (x^i, v^i). Nehmen wir erstens an, daß in (1. 1) die Relation $\hat{v}^i \equiv \bar{v}^i$ besteht. Dann bestimmt (1. 1) wegen (1. 2a) die Transformationsformel der gewöhnlichen Linienelemente (x^i, v^i), wo x^i das Zentrum und v^i die Richtung des Linienelementes definiert. $\hat{x}^i = \hat{x}^i(x)$ bestimmt eine Punkttransformation, die das Linienelement (x^i, v^i) in $(\hat{x}^i, \bar{v}^i)$ transformiert. Transformiert man dann zweitens die Richtung $\bar{v}^i$ des

Linienelementes $(\hat{x}^i, \bar{v}^i)$ durch eine Richtungstransformation $\hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v})$ in die Richtung $\hat{v}^i$, d. h. man dreht das Linienelement $(\hat{x}^i, \bar{v}^i)$ um sein Zentrum $\hat{x}^i$, so erhält man eben die Transformationsformel (1. 1), die somit als die Zusammensätzung einer reinen Punkt- und einer reinen Richtungstransformation der Linienelemente (x^i, v^i) interpretiert werden kann. Wir wollen aber im folgenden die (x^i, v^i) als *erweiterte Linienelemente* auffassen, die der Transformationsformel (1. 1) genügen und die im Falle $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ die gewöhnlichen Linienelemente bestimmen.

Eine Übertragungstheorie im $\mathfrak{M}_n$-Raume der erweiterten Linienelemente definiert also die Parallelübertragung der Vektoren und Tensoren, die jetzt von den (x^i, v^i) abhängig sind. Wir müssen aber auch den Tensorbegriff bezüglich der Transformationen (1. 1) erweitern, so aber, daß wir im Falle $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ die wohlbekannten Transformationsformeln der Tensoren bekommen. Dementsprechend werden wir in § 2 den Tensorbegriff erweitern, und dann, in § 3 definieren wir das invariante Differential der *verallgemeinerten Vektoren* bzw. Tensoren, und wir bestimmen ferner die Transformationsformeln der Übertragungsparameter. Eine derartige allgemeine Übertragungstheorie der verallgemeinerten Vektoren und Tensoren haben A. Kawaguchi und S. Hokari begründet (vgl. [5]—[7]). Die Grundtransformationen der Kawaguchi—Hokarischen Geometrie ist zwar allgemeiner als unsere zu Grunde gelegten Transformationen (1. 1), aber eben deshalb können in dem von uns betrachteten Falle auch solche charakteristische Sätze bewiesen werden, die im allgemeinen schon nicht gültig sind. Auch die von uns angegebene geometrische Interpretation, nämlich die Zusammensetzung der Grundtransformationen (1. 1) aus einer Punkt- und Richtungstransformation der Linienelemente, besteht im allgemeinen Fall nicht. Für eine andere geometrische Interpretation vgl. auch [8]. Eine eingehende Vergleichung unserer Untersuchungen mit denen von A. Kawaguchi und S. Hokari werden wir übrigens im § 9, in den Schlußbemerkungen angeben.

In § 4 bestimmen wir die fundamentalen kovarianten Ableitungen unserer in § 3 begründeten Übertragungstheorie. Nachher erweitern wir in § 5 das invariante Differential auf *Pseudotensoren*, die solche Größe sind, die nur im $\mathfrak{M}_n$-Raum auftreten und im gewöhnlichen Linienelementraum (bzw. Punktraum) mit den gewöhnlichen Tensoren übereinstimmen. Diese Erweiterung geschieht mittels einer speziellen größe a^i_k, die in den Linienelementräumen in das Kroneckersche δ^i_k übergeht.

In § 6 konstruieren wir die Übertragungsparameter aus einem symmetrischen rein kovarianten Tensor zweiter Stufe $g_{ik}(x, v)$, der die Rolle des metrischen Grundtensors im $\mathfrak{M}_n$-Raum spielt. In § 7 werden wir die Torsions- und Krümmungsgrößen der $\mathfrak{M}_n$-Räume festlegen.

Unsere Theorie wird somit die Verallgemeinerung der Theorie der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen (vgl. [4]), bzw. im metrischen Fall wird sie die Verallgemeinerung der Cartanschen Theorie der Finslerräume (vgl. [2]). Endlich — in § 8 — werden wir einige charakteristische Kurven in unserem $\mathfrak{M}_n$-Raum untersuchen.

§ 2. Erweiterung des Begriffs der Vektoren und Tensoren

Der Begriff der Vektoren und Tensoren in den Punkt- bzw. Linienelementräumen kann mit Hilfe der Transformationsformeln der Grundelemente festgelegt werden. Falls in (1. 1) $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ gilt, d. h. der Raum $\mathfrak{M}_n$ ein gewöhnlicher Linienelementraum ist, so hat bekanntlich die Transformationsformel eines Tensors $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ die Form:

$$\hat{T}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial \hat{x}^{i_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \hat{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial \hat{x}^{j_s}} T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}(x, v), \tag{2. 1}$$

wo $\dfrac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}$ die Ableitung der inversen Transformation $x^b = x^b(\hat{x})$ bedeutet. Diese inverse Transformation existiert wegen der Bedingung (1. 2a) immer. Wir können uns leicht überzeugen, daß im Falle $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ auf Grund der zweiten Relation von (1. 1), die Transformationsformel (2. 1) in der Form

$$\hat{T}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^{i_1}}{\partial v^{a_1}} \cdots \frac{\partial \hat{v}^{i_r}}{\partial v^{a_r}} \frac{\partial v^{b_1}}{\partial \hat{v}^{j_1}} \cdots \frac{\partial v^{b_s}}{\partial \hat{v}^{j_s}} T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}(x, v) \tag{2. 2}$$

geschrieben werden kann, da im erwähnten Falle

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}, \qquad \frac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^j} = \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}$$

gilt.

Die Transformationsformel (2. 2) ist schon geeignet dafür, daß mit ihr die Tensoren im $\mathfrak{M}_n$-Raum definiert werden, falls wir zeigen, daß die inverse Transformation von (1. 1) existiert. Auf Grund von (1.2a) und (1. 2b) sind aber die Formeln von (1. 1) bezüglich x^i und $\bar{v}^i$ lösbar, d. h. es gilt:

$$x^i = x^i(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n), \quad \bar{v}^i = \bar{v}^i(\hat{v}^1, \ldots, \hat{v}^n).$$

Beachten wir jetzt, daß aus

$$\bar{v}^j = \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r} v^r \tag{2. 3a}$$

nach einer Überschiebung mit $\dfrac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}$

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \bar{v}^j \tag{2. 3b}$$

folgt, so bekommt man für die inverse Transformation von (1. 1) die Formeln

$$\begin{cases} x^i = x^i(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^n) \\ v^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} \bar{v}^s(\hat{v}^1, \hat{v}^2, \ldots, \hat{v}^n), \end{cases} \tag{2. 4}$$

wo $\bar{v}^s(\hat{v})$ die Lösung des in (1. 1) auftretenden Funktionensystems $\hat{v}^i(\bar{v})$ bezüglich $\bar{v}^s$ bedeutet und wo nach (1. 2a) und (1. 2b) auch

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}\right) \neq 0, \qquad \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \hat{v}^j}\right) \neq 0$$

gültig sind.

Wir beweisen das folgende, für die späteren noch sehr wichtige

Lemma 1. *In den Transformationsformeln* (1. 1) *und* (2. 4) *sind* 1. *die* $\hat{v}^i$ *von erster Ordnung homogene Funktionen von* $v^1, \ldots, v^n$ *und auch* 2. *die* v^i *sind von erster Ordnung homogene Funktionen von* $\hat{v}^1, \ldots, \hat{v}^n$.

Beweis. Die Behauptung 1. des Lemmas ist auf Grund der Forderung über die Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v})$ (vgl. (1. 1) und die nachfolgenden Zeilen) trivial, da $\bar{v}^j$ von den v^i linear abhängig ist. Wir müssen also nur die Behauptung 2. beweisen. Setzen wir statt (1. 1)

$$\hat{v}^i = \varphi^i(\bar{v}), \tag{2. 5}$$

so gilt nach unserer Annahme:

$$\varphi^i(\varrho\bar{v}) = \varrho\varphi^i(\bar{v}). \tag{2. 6}$$

Drückt man $\bar{v}^i$ mittels $\hat{v}^i$ aus, was nach (1. 2b) möglich ist, so wird:

$$\bar{v}^i = \bar{v}^i(\hat{v}) \equiv \psi^i(\hat{v}). \tag{2. 7}$$

Nach (2. 5) und (2. 7) gilt:

$$\psi^i(\varphi(\bar{v})) \equiv \bar{v}^i.$$

Setzen wir nun in diese Identität statt $\bar{v}^i$ die Größe $\varrho\bar{v}^i$, beachten wir ferner (2. 6), so wird:

$$\psi^i(\varrho\varphi(\bar{v})) \equiv \varrho\bar{v}^i.$$

In Hinsicht auf (2. 5) und (2. 7) bekommt man aus dieser Formel

$$\psi^i(\varrho\hat{v}) \equiv \varrho\psi^i(\hat{v})$$

und das drückt schon nach (2. 7) und (2. 4) die Behauptung 2. unseres Lemmas 1 aus.

Jetzt können wir schon den Begriff der Tensoren im $\mathfrak{M}_n$-Raum festlegen, da im $\mathfrak{M}_n$-Raum nach (1. 1) und (2. 4)

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a}, \qquad \frac{\partial v^i}{\partial \hat{v}^b}$$

Sinn haben.

Definition. *Ein verallgemeinerter Tensor, kurz Tensor im* $\mathfrak{M}_n$*-Raum ist die Gesamtheit der Funktionen* $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x, v)$ *die bei einer Transformation* (1. 1) — *bzw.* (2. 4) — *dem Transformationsgesetz* (2. 2) *genügen.*

Ein Pseudotensor im $\mathfrak{M}_n$*-Raum ist die Gesamtheit der Funktionen* $F^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}(x, v)$ *die bei einer Transformation* (1. 1) *dem Transformationsgesetz von der Form:*

$$\hat{F}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(\hat{x}, \hat{v}) = p^{i_1}_{a_1} \ldots p^{i_r}_{a_r} q^{b_1}_{j_1} \ldots q^{b_s}_{j_s} F^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}(x, v) \tag{2. 8}$$

genügen, wo die p^i_a *bzw.* q^b_j *die Größen* $\dfrac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}, \dfrac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a}$ *bzw.* $\dfrac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}, \dfrac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^j}$ *bedeuten können, so aber, daß die beiden Type der Faktoren, d. h.* ∂x *und auch* ∂v *effektiv vorhanden seien.*

Sind in (2. 8) *nur die Faktoren* ∂x *vorhanden, d. h. gilt in* (2. 8):

$$p_a^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}, \qquad q_j^b = \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}$$

so geht (2. 8) *in* (2. 1) *über,* $F:::$ *ist also ein Tensor im engeren Sinne, d. h. ein gewöhnlicher Tensor.*

Bemerkung. Bezüglich der allgemeinen Transformation (1. 1) bzw. (2. 4) sind die einzelnen Faktoren in (2. 2) von der Form:

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^r}\frac{\partial \hat{x}^r}{\partial x^a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^i} = \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^r}\frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \hat{v}^i}.$$

Die Formel (2. 2) ist also wirklich eine Verallgemeinerung von (2. 1), und sie geht nur im Falle $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ in (2. 1) über—.

Die Vektoren sind die Tensoren erster Stufe. Offenbar gehören diese zu einer der folgenden beiden Type: 1. verallgemeinerte Vektoren mit den Transformationsformeln:

$$\text{(2. 9a)} \qquad \hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}}{\partial v^r} X^r \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(2. 9b)} \qquad \hat{Y}_i = \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^i} Y_s,$$

2. Vektoren im engeren Sinne mit den gewöhnlichen Transformationsformeln:

$$\text{(2. 10a)} \qquad \hat{V}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} V^r \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(2. 10b)} \qquad \hat{W}_i = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^i} W_s.$$

Pseudovektoren können im Sinne der angegebenen Definition nicht existieren. (Dieser Vektorbegriff befindet sich auch bei Hokari, vgl. [6] S. 25).

Die drei verschiedenen Type der Tensoren, d. h. die verallgemeinerten Tensoren, die Pseudotensoren und die Tensoren im engeren Sinne kommen — wie wir es sehen werden — im $\mathfrak{M}_n$-Raum effektiv vor, vgl. den Satz 3 und die Formeln (4. 15). Ist aber in der Transformation (1. 1) $\hat{v}^i = \bar{v}^i$, d. h. ist die Transformation (1. 1) im Wesentlichen eine Punkttransformation $\hat{x}^i = \hat{x}^i(x)$ der Linienelemente (x^i, v^i), die wir kurz als gewöhnliche Linienelementtransformation bezeichnen wollen, so stimmen wegen (2. 3a) alle drei Type der Tensoren überein. In diesem Falle existieren nur Tensoren im engeren Sinne.

Interpretieren wir die (x^i, v^i) als ein Linienelement, so kann der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *Die Transformationsformeln* (2. 9a) *und* (2. 9b) *der verallgemeinerten Vektoren setzen sich aus einer Punkt — und aus einer darauffolgenden Richtungstransformation zusammen.*

BEWEIS. Zuerst bestimmen wir die Komponenten der verallgemeinerten Vektoren nach einer reinen Punkt — bzw. Richtungstransformation. Die reine Punkttransformation ist — wie schon bemerkt wurde — durch $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ charakterisiert. Es gehen in diesem Falle nach (1. 1) bzw. (2. 4) die Transformationsformeln (2. 9a) und (2. 9b) in

$$\text{(2. 11)} \qquad \bar{X}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} X^r, \qquad \bar{Y}_i = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^i} Y_s$$

über, wo wir die neuen Komponenten durch einen Strich bezeichnet haben.

Ist nun (1. 1) eine reine Richtungstransformation, dann ist wegen $\hat{x}^i = x^i$:

$$\hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^i, \ldots, \bar{v}^n), \qquad \bar{v}^i = v^i,$$

und (2. 9a) und (2. 9b) gehen in

$$\hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^r} X^r, \qquad \hat{Y}_i = \frac{\partial \bar{v}^s}{\partial \hat{v}^i} Y_s \tag{2. 12}$$

über.

Betrachten wir nach diesen Vorbereitungen die Transformationsformeln (2. 9a) und (2. 9b) bezüglich der allgemeinen Transformation (1. 1) bzw. bezüglich ihrer Inversen Transformation (2. 4). Diese können wir nach (2. 11) in der Form:

$$\hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^s} \frac{\partial \hat{x}^s}{\partial x^r} X^r = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^s} \overline{X}^s$$

$$\hat{Y}_i = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^r} \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \hat{v}^i} Y_s = \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \hat{v}^i} \overline{Y}_r$$

schreiben. Diese beiden letzten Formeln drücken aber nach (2. 11) und (2.12) aus, daß die Vektoren X^i bzw. Y^i nach einer Punkttransformation in $\overline{X}^i$ bzw. $\overline{Y}^i$, und dann nach einer Richtungstransformation in $\hat{X}^i$ bzw. $\hat{Y}^i$ transformiert wurden.

§ 3. Das invariante Differential der verallgemeinerten Vektoren

Das invariante Differential der Vektoren wollen wir durch die folgenden Forderungen festlegen: 1. Das invariante Differential soll zu einem kontra- bzw. kovarianten Vektor wieder einen kontra- bzw. kovarianten Vektor zuordnen. 2. Das invariante Differential soll den gewöhnlichen Differentiationsregeln genügen. 3. Bezüglich einer Transformation (1. 1) mit der Bedingung $\hat{v}^i = \bar{v}^i$, soll das invariante Differential in das entsprechende invariante Differential der gewöhnlichen affinzusammenhängenden Linienelementräume übergehen (vgl. [4] § 1).

Das invariante Differential eines kontravarianten Vektors muß auf Grund dieser Forderungen die Form:

$$DX^i = dX^i + M_j{}^i{}_k X^j dv^k + L_j{}^i{}_k X^j dx^k \tag{3. 1}$$

haben. Wir müssen noch die Transformationsformeln der Übertragungsparameter bestimmen. Aus der Forderung 1. folgt, daß DX^i ein verallgemeinerter Vektor sein muß, d. h. es gilt die Transformationsformel:

$$D\hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} DX^s. \tag{3. 2}$$

Es ist nun nach der Form (3. 1) des invarianten Differentials:

$$D\hat{X}^i = d\hat{X}^i + \hat{M}_j{}^i{}_k \hat{X}^j d\hat{v}^k + \hat{L}_j{}^i{}_k \hat{X}^j d\hat{x}^k. \tag{3. 3}$$

Aus der Transformationsformel (2. 9a) von X^i folgt nun:

$$(3.4)\qquad d\hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} dX^s + X^s \left(\frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial x^r \partial v^s} dx^r + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^r \partial v^s} dv^r \right).$$

Auf Grund von (1. 1) hat man noch:

$$(3.5)\qquad d\hat{v}^k = \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^r} dv^r + \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^r} dx^r, \quad d\hat{x}^k = \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^r} dx^r.$$

Substituieren wir nun die Formeln (3. 1) und (3. 3) in (3. 2), beachten wir dann (3. 4) und (3. 5), so bekommen wir durch Gleichsetzen der Koeffizienten von dv^r und dx^r die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $M_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$. Es wird nach Indexvertauschungen

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} M_j{}^s{}_k = \hat{M}_r{}^i{}_t \frac{\partial \hat{v}^r}{\partial v^j} \frac{\partial \hat{v}^t}{\partial v^k} + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^j \partial v^k}$$

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} L_j{}^s{}_k = \hat{L}_r{}^i{}_t \frac{\partial \hat{v}^r}{\partial v^j} \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} + \hat{M}_r{}^i{}_t \frac{\partial \hat{v}^r}{\partial v^j} \frac{\partial \hat{v}^t}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial x^k \partial v^j}.$$

Aus diesen Formeln können die Transformierten der Übertragungsparameter, d. h.: $\hat{M}_j{}^i{}_k$ und $\hat{L}_j{}^i{}_k$ bestimmt werden. Auf Grund von

$$(3.6)\qquad \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} = \delta^i_p \qquad (\delta^i_p : \text{Kronecker-}\delta)$$

$$(3.7)\qquad \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^p} = \delta^i_p$$

wird nach einer Kontraktion mit $\dfrac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p}, \dfrac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q}$ bzw. mit $\dfrac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^q}$

$$(3.8)\qquad \hat{M}_p{}^i{}_q = M_j{}^s{}_k \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q} - \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^j \partial v^k} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q},$$

$$(3.9)\qquad \hat{L}_p{}^i{}_q = L_s{}^t{}_r \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \hat{M}_p{}^i{}_k \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial x^r \partial v^s} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p}.$$

Um die Homogeneitätseigenschaften der Übertragungsparameter zu bekommen, beachten wir, daß X^i in den v^i homogen von nullter Ordnung ist und DX^i auch homogen von nullter Ordnung sein soll. Setzen wir jetzt in (3. 1) statt v^i die Größen $\varrho(x, v)v^i$ ein, so sieht man, daß DX^i dann und nur dann unverändert bleiben kann, falls $L_j{}^i{}_k$ in den v^i homogen von nullter Ordnung, $M_j{}^i{}_k$ homogen von (-1)-ter Ordnung und noch

$$(3.10)\qquad M_j{}^i{}_o \overset{\text{def}}{=} M_j{}^i{}_k v^k = 0$$

ist, was wir im folgenden immer annehmen wollen. In der Formel (3. 10) und im folgenden werden wir durch den Index „$_o$" immer die Kontraktion mit v^i bezeichnen.

Die Größen v^k selbst, die die Richtung des erweiterten Linienelementes bestimmen, haben einen kontravarianten Vektorcharakter und sie genügen dem Transformationsgesetz (2. 9a). Aus (1. 1) folgt nämlich wegen der Homogeneität erster Ordnung:

$$\hat{v}^i \equiv \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^k} v^k$$

und das beweist unsere Behauptung.

Die Bedingungsgleichung (3. 10) ist eine Tensorrelation, zwar $M_{j\ k}^{\ i}$ kein Tensor ist, wie das nach der Transformationsformel (3. 8) bestätigt werden kann. Auf Grund der Homogeneität erster Ordnung von $\hat{v}^i(v)$ und $v^i(\hat{v})$ folgt nämlich, daß $M_{j\ o}^{\ i}$ ein Tensor ist, da das Glied $\partial^2 \hat{v}^i$ nach der Kontraktion mit $\hat{v}^q$ aus (3. 8) hinausfällt.

Wir umformen noch für die späteren die beiden Transformationsformeln (3. 8) und (3. 9). Aus (3. 6) folgt nach einer partiellen Ableitung nach $\hat{v}^q$ die Relation:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^j \partial v^k} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q} \equiv -\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} \frac{\partial^2 v^j}{\partial \hat{v}^p \partial \hat{v}^q}$$

und aus (3. 8) wird somit

$$\hat{M}_{p\ q}^{\ i} = M_{j\ k}^{\ s} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^p \partial \hat{v}^q}. \tag{3. 11}$$

Für die Umformung von (3. 9) eliminieren wir zuerst $\hat{M}_{p\ k}^{\ i}$ mittels der Formel (3. 8), ferner setzen wir:

$$\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \equiv -\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^r} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{x}^q}, \tag{3. 12}$$

was nach der partiellen Ableitung von $\hat{v}^k$ nach $\hat{x}^q$ auf Grund von $\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \hat{x}^q} \equiv 0$ unmittelbar folgt. Differenzieren wir unsere letzte Relation nochmals nach $\hat{v}^p$, so wird:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}^k}{\partial x^r \partial v^s} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \equiv -\frac{\partial^2 \hat{v}^k}{\partial v^r \partial v^s} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{x}^q} - \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^r} \frac{\partial^2 v^r}{\partial \hat{x}^q \partial \hat{v}^p}, \tag{3. 12a}$$

und damit verändern wir das letzte Glied in (3. 9). Wir bekommen somit für $L_{p\ q}^{\ i}$ die Transformationsformel:

$$\hat{L}_{p\ q}^{\ i} = L_{s\ r}^{\ t} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} + M_{s\ r}^{\ t} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{x}^q} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^p \partial \hat{x}^q}, \tag{3. 13}$$

wo wir auch die zu (3. 6) inverse Relation

$$\frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^r} = \delta^t_r \tag{3. 14}$$

benützt haben.

Mit Hilfe von (3. 11) und (3. 13) kann schon bewiesen werden, daß die Formel

$$DY_i = dY_i - M_{i\ k}^{\ j} Y_j \, dv^k - L_{i\ k}^{\ j} Y_j \, dx^k \tag{3. 15}$$

den Forderungen des invarianten Differentials genügt, d. h. (3. 15) die Formel des invarianten Differentials der verallgemeinerten kovarianten Vektoren bestimmt.

Die Formeln (3. 1) und (3. 15) bestimmen das invariante Differential der verallgemeinerten Vektoren im $\mathfrak{M}_n$-Raum der verallgemeinerten Linienelemente. Für einen Skalar ist das invariante Differential mit dem gewöhnlichen Differential identisch. Ist der $\mathfrak{M}_n$-Raum ein gewöhnlicher Linienelementraum, d. h. ist in (1. 1), bzw. (2. 4) $\hat{v}^i = \bar{v}^i$, so geht unser $\mathfrak{M}_n$-Raum in einen affinzusammenhängenden Linienelementraum über (vgl. [4] § 1), wie das aus (3. 11) und (3. 13) leicht gefolgert werden kann. Die Erweiterung der Formeln (3. 1) und (3. 15) des invarianten Differentials kann für beliebige verallgemeinerte Tensoren in der gewöhnlichen Weise geschehen, doch für Pseudotensoren kann die Erweiterung nicht unmittelbar durchgeführt werden, da in der Transformationsformeln der Pseudotensoren neben $\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j}$, $\frac{\partial v^i}{\partial \hat{v}^j}$ auch $\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}$, $\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}$ vorkommen. Auch für gewöhnliche Vektoren mit den Transformationsformeln (2. 10a) bzw. (2. 10b) sind die Formeln (3. 1) und (3. 15) nicht anwendbar. Für diese Größen werden wir ein invariantes Differential in § 5 definieren.

§ 4. Die fundamentalen kovarianten Ableitungen

Die fundamentalen kovarianten Ableitungen erhält man, wenn das invariante Differential durch tensorielle Glieder bestimmt wird. dx^k ist ein Vektor im gewöhnlichen Sinne, dv^k ist aber kein Vektor. Es gilt aber das folgende:

$$\omega^k(d) \overset{\text{def}}{=} dv^k + L_{o\ r}^{\ k}\, dx^r \tag{4. 1}$$

ist ein verallgemeinerter Vektor mit dem Transformationsgesetzt (2. 9a), *falls*

$$M_{o\ k}^{\ i} \equiv M_{j\ k}^{\ i}\, v^j = 0 \tag{4. 2}$$

besteht.

Der Vektorcharakter von $\omega^k(d)$ folgt aus der Tatsache, daß v^k — wie wir das schon gezeigt haben — im Wesentlichen ein verallgemeinerter kontravarianter Vektor ist, und auf Grund von (4. 2) und (3. 1) $\omega^k(d)$ eben das invariante Differential von v^k ist. Ein unmittelbarer Beweis des Vektorcharakters von ω^k wäre auf Grund der aus (3. 9) folgenden Transformationsformel

$$\hat{L}_{o\ q}^{\ k} = L_{o\ r}^{\ t} \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \tag{4. 3}$$

im Hinblick auf die Formeln

$$d\hat{v}^k = \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^s} dx^s + \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^t} dv^t, \qquad dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} d\hat{x}^q$$

auch leicht durchführbar.

Bemerkung. Im folgenden wollen wir immer annehmen, daß neben (3. 10) auch (4. 2) gültig ist. Die Bedingung (4. 2) ist aber nicht notwendig, wie wir das z. B. im gewöhnlichen metrischen Linienelementraum gezeigt haben (vgl. [3], § 2).

Bestimmt man nun dv^k mittels (4. 1), so kann (3. 1) in der Form

$$DX^i = dX^i + M_j{}^i{}_k X^j \omega^k(d) + L^*{}_j{}^i{}_k X^j dx^k \tag{4. 4}$$

angegeben werden, wo

$$L^*{}_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} L_j{}^i{}_k - M_j{}^i{}_r L_o{}^r{}_k \tag{4. 5}$$

gesetzt wurde. Die Transformationsformel von (4. 5) kann mittels (3. 8), (3. 13) und (4. 3) in Hinblick auf (3. 14) bestimmt werden. Die Rechnung gibt:

$$\begin{aligned}\hat{L}^*{}_j{}^i{}_k = L^*{}_s{}^t{}_r \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^s \partial v^t} L_o{}^t{}_r \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} + \\ + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^r \partial v^s} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial^2 v^t}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{x}^k}.\end{aligned} \tag{4. 6}$$

Auf Grund von (4. 2) ist

$$L^*{}_o{}^i{}_k = L_o{}^i{}_k \tag{4. 7}$$

und das zeigt, daß $L^*{}_o{}^i{}_k$ nach (4. 3) ein geometrisches Objekt ist. Es ist aber $L^*{}_i{}^j{}_k$ wegen (4. 6) nur bezüglich der in v^k linearen Transformationen ein differentiell-geometrisches Objekt (in deren Transformationsformel also v^i nicht explizit vorkommt).

Vor der Bestimmung der fundamentalen kovarianten Ableitungen fassen wir die Grundeigenschaften der Übertragungsparameter im folgenden Satz zusammen:

Satz 2. *Die Übertragungsparameter $M_p{}^i{}_q$ bilden ein differentiell-geometrisches Objekt mit der Transformationsformel* (3. 11); *$M_{[p}{}^i{}_{q]}$ ist ein schiefsymmetrischer verallgemeinerter Tensor* [1]). *Bezüglich der in v^i linearen Transformationen von der Form:*

$$\hat{v}^i = h^i_r \bar{v}^r \equiv h^i_r \frac{\partial \hat{x}^r}{\partial x^s} v^s, \qquad h^i_r = \text{konst.} \tag{4. 8}$$

ist auch $M_p{}^i{}_q$ ein Tensor. $L^*{}_o{}^i{}_p$ ist ein differential-geometrisches Objekt. $L^*{}_j{}^i{}_k$ ist nur bezüglich der Transformationen von der Form (4. 8) *ein differentiell-geometrisches Objekt und $L^*{}_{[j}{}^i{}_{k]}$ hat nur bezüglich der durch $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ charakterisierten Transformationen Pseudotensorcharakter. In diesem Falle ist aber $L^*{}_{[j}{}^i{}_{k]}$ ein Tensor im gewöhnlichen Sinne.*

Beweis. Die Behauptungen des Satzes bezüglich $M_p{}^i{}_q$ und $L^*{}_o{}^i{}_q$ folgen unmittelbar aus (3. 11) und (4. 3) in Hinsicht auf (4. 7). — Ist $L^*{}_j{}^i{}_k$ ein differentiell-geometrisches Objekt, somit kann in (4. 6) $L_o{}^i{}_r$ nicht vorkommen. Das kann nur im Falle:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^s \partial v^t} = 0$$

vorkommen, woraus folgt, daß $\hat{v}^i$ die Form (4. 8) hat.

[1]) $M_{[p}{}^i{}_{q]}$ bedeutet — wie gewöhnlich — den schiefsymmetrischen Teil von $M_p{}^i{}_q$, d. h.:

$$M_{[p}{}^i{}_{q]} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(M_p{}^i{}_q - M_q{}^i{}_p).$$

Wäre nun $L^*{}_{[j}{}^i{}_{k]}$ ein Pseudotensor, so wäre seine Transformationformel:

$$\hat{L}^*{}_{[j}{}^i{}_{k]} = L^*{}_{[r}{}^s{}_{t]} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^k}. \tag{4.9}$$

Vergleichen wir jetzt (4. 9) mit (4. 6), so folgt, daß (4. 9) nur dann bestehen kann, falls von der Formel (4. 6) die $\partial^2 \hat{v}^i$ und $\partial^2 v^i$ enthaltenden Glieder herausfallen, oder in j, k symmetrisch sind. Da $L_o{}^i{}_k$ nicht vorkommen kann, muß (4. 8) gelten, $\frac{\partial v^i}{\partial \hat{v}^j}$ ist also nur von den x^i abhängig. Nach (4. 6) wird somit:

$$\hat{L}^*{}_{[j}{}^i{}_{k]} = \frac{1}{2} L^*{}_r{}^s{}_t \left(\frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^j} \right) \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s},$$

wenn wir beachten, daß die übrigen Glieder herausfallen müssen. Aus (4. 9) bekommt man nach Indizesvertauschungen:

$$\hat{L}^*{}_{[j}{}^i{}_{k]} = \frac{1}{2} L^*{}_r{}^s{}_t \left(\frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} \right) \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s}.$$

Die beiden letzten Formeln bestehen aber nur dann für beliebige Punkttransformationen $x^i = x^i(\hat{x})$, falls

$$\frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^j} \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^j} : \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^j} = \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^k} : \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k}$$

besteht. Daraus folgt daß

$$\frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^j} = \varrho \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^j}$$

richtig ist; ϱ muß sogar eine Konstante sein, sonst würden die Glieder $\partial^2 v^t$ in (4. 6) in j, k nicht symmetrisch sein; dann kann aber $\varrho = 1$ gesetzt werden, da die $\hat{v}^i$ nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt sind. In Hinsicht auf (2. 4) folgt somit aus der letzten Formel:

$$\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^s} \frac{\partial \bar{v}^s}{\partial \hat{v}^j} = \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^j}$$

und nach einer Kontraktion mit $\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^t}$ wird wegen (3. 7):

$$\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \hat{v}^j} = \delta^i_j$$

und das beweist die letzte Behauptung des Satzes.

Die fundamentalen kovarianten Ableitungen erhält man aus (4. 4), wenn in (4. 4)

$$dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial X^i}{\partial v^k} dv^k$$

gesetzt und dv^k mittels (4. 1) unter Beachtung von (4. 7) eliminiert wird. Man bekommt auf diese Weise:

$$DX^i = \nabla_k X^i dx^k + \overset{*}{\nabla}_k X^i \omega^k(d), \tag{4. 10}$$

$$\nabla_k X^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} - \frac{\partial X^i}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k + L^*{}_j{}^i{}_k X^j, \tag{4. 11}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k X^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial X^i}{\partial v^k} + M_j{}^i{}_k X^j. \tag{4. 12}$$

Die Formeln (4. 11) und (4. 12) definieren die beiden fundamentalen kovarianten Ableitungen. Dies sind formal vollständig analog zum Falle der gewöhnlichen affinzusammenhängenden Linienelementräume (vgl. [4] Formeln (2. 6)—(2. 8) und (1. 13)), nur die Transformationsformeln der Übertragungsparameter sind jetzt anders. Die partielle Ableitung nach v^j bildet aus einem Skalar einen Vektor, für Tensoren ist aber $\frac{\partial}{\partial v^k}$ keine tensorielle Operation, wie das nach der aus (2. 9a) folgenden Formel

$$\frac{\partial \hat{X}^i}{\partial \hat{v}^j} = \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^r \partial v^s} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} X^r + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial X^r}{\partial v^s}$$

unmittelbar verifiziert werden kann. Aus dieser Formel folgt auch das

Lemma 2. *Die Operation* $\frac{\partial}{\partial v^j}$ *ist dann und nur dann eine Tensorielle Operation, falls die Richtungstransformation in* v^i *linear ist, d. h. die Form* (4. 8) *hat, oder* $\frac{\partial}{\partial v^i}$ *auf einen Skalar angewandt wird.*

Im kovarianten Fall hat man statt (4. 11) und (4. 12):

$$\nabla_k Y_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial Y_i}{\partial x^k} - \frac{\partial Y_i}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k - L^*{}_i{}^j{}_k Y_j, \tag{4. 13}$$

$$\overset{*}{\nabla}_k Y_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial Y_i}{\partial v^k} - M_i{}^j{}_k Y_j. \tag{4. 14}$$

Bezüglich des Charakters der fundamentalen kovarianten Ableitungen gilt der

Satz 3. $\overset{*}{\nabla}_k$ *ist eine tensorielle,* ∇_k *aber eine pseudotensorielle Operation, d. h.* ∇_k *ordnet zu einem verallgemeinerten Tensor einen Pseudotensor.*

Beweis. Nach (3. 2) hat man:

$$\nabla_j \hat{X}^i \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k} dx^k + \overset{*}{\nabla}_j \hat{X}^i \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \omega^k(d) \equiv \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} DX^s,$$

da dx^k ein gewöhnlicher und $\omega^k(d)$ ein verallgemeinerter Vektor ist. Setzen wir jetzt DX^s aus (4. 10) in diese Formel, beachten wir ferner, daß dx^k und $\omega^k(d)$ beliebig vorgegeben werden können, so folgen die Formeln

$$\nabla_j \hat{X}^i \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \nabla_k X^s, \qquad \overset{*}{\nabla}_j \hat{X}^i \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \overset{*}{\nabla}_\kappa X^s.$$

Diese Formeln geben nach Kontraktion mit $\dfrac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^m}$ bzw. $\dfrac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^m}$

$$(4.\,15) \qquad \nabla_m \hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^m} \nabla_k X^s, \qquad \overset{*}{\nabla}_m X^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^m} \overset{*}{\nabla}_k X^s$$

und das beweist den Satz.

Unsere Übertragungstheorie ist also die Verallgemeinerung der Vargaschen Theorie der affinzusammenhängenden Linienelementräume; sie ist aber nicht die Verallgemeinerung der Berwaldschen affinen Bahnengeometrien, da in diesen Räumen für die Übertragungsparameter $G_j{}^i{}_k$

$$G_j{}^i{}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^j \partial v^k} (L^*{}_t{}^i{}_s v^t v^s) + A_j{}^i{}_k|_o$$

charakteristisch ist, wenn die $G_j{}^i{}_k$ von gewissen $L^*{}_t{}^i{}_s$-Übertragungsparameter stammen (vgl. [1], Formel (10. 5); $A_j{}^i{}_k|_o$ bedeutet in der Formel von $G_j{}^i{}_k$ einen in j, k symmetrischen Tensor). In unserem $\mathfrak{M}_n$-Raum ist aber nach (4. 6)

$$L^*{}_o{}^i{}_o = L^*{}_o{}^t{}_r \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \hat{v}^q + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{x}^q} \hat{v}^q$$

und das zeigt, daß $L^*{}_o{}^i{}_o$ wegen

$$\frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \hat{v}^q \neq v^r$$

kein geometrisches Objekt ist, wie im Berwaldschen Fall.

Wir bemerken noch, daß die beiden fundamentalen kovarianten Ableitungen nur für verallgemeinerte Tensoren definiert sind, da das invariante Differential nur für diese festgelegt war. Die Formeln (4. 15) könnte man übrigens auch mittels der entsprechenden Transformationsformeln (3. 11) und (4. 6) beweisen. Für einen beliebigen verallgemeinerten Tensor $T^{\cdots}_{\cdots}$ ist:

$$(4.\,16) \qquad DT^{\cdots}_{\cdots} = \nabla_k T^{\cdots}_{\cdots} dx^k + \overset{*}{\nabla}_k T^{\cdots}_{\cdots} \omega^k(d).$$

§ 5. Invariantes Differential der Pseudotensoren

Ein invariantes Differential $\tilde{D}$ für Pseudotensoren können wir dadurch definieren, daß wir den Pseudotensor in geeigneter Weise in einen verallgemeinerten Tensor überführen und dann das im vorigen Paragraphen eingeführte invariante Differential anwenden.

Nehmen wir an, daß im $\mathfrak{M}_n$-Raum außer den Übertragungsparametern noch ein Fundamentalobjekt $a^i_k(x, v)$ existiert, und seine Transformationsformel

$$(5.1) \qquad \hat{a}^i_j(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} a^r_s(x, v)$$

ist. Durch die Gleichungen

$$(5.2) \qquad a^i_j \, b^j_k = \delta^i_k$$

ist der zu a^i_j inverse Tensor b^j_k bestimmt, falls $|a^i_j| \neq 0$, was wir immer annehmen wollen. Es ist wohlbekannt, daß aus (5. 2) auch

$$(5.2a) \qquad a^t_i \, b^m_t = \delta^m_i$$

folgt. Die Transformationsformel von b^i_j kann aus

$$\hat{a}^i_j \, \hat{b}^j_k = \delta^i_k$$

mittels (5. 1) bestimmt werden. Es wird:

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} a^r_s \, \hat{b}^j_k = \delta^i_k .$$

Kontraktion der Reihe nach mit $\dfrac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^i}$, b^m_t, $\dfrac{\partial \hat{x}^p}{\partial x^m}$ gibt nach (5. 2a)

$$(5.3) \qquad \hat{b}^p_k = \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial \hat{x}^p}{\partial x^m} b^m_t .$$

Mit Hilfe der Pseudotensoren a^i_k und b^p_k kann durch Kontraktion zu jedem Pseudotensor bzw. gewönhlichen Tensor ein verallgemeinerter Tensor mit der Transformationsformel (2. 2) zugeordnet werden.

Definition. *Das invariante Differential $\tilde{D}$ eines Pseudotensors bzw. gewöhnlichen Tensors ist das invariante Differential des zugeordneten verallgemeinerten Tensors.*

Durch ein Beispiel zeigen wir die Konstruktion des zugeordneten verallgemeinerten Tensors. Es sei $T^i{}_{jk}$ ein Pseudotensor mit der Transformationsformel

$$(5.4) \qquad \hat{T}^i{}_{jk} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} T^r{}_{st} .$$

Auf Grund von (5. 1) und (5. 3) ist

$$(5.5) \qquad \tilde{T}^i{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} a^i_r \, b^s_j \, T^r{}_{sk}$$

der zugeordnete verallgemeinerte Tensor von $T^i{}_{jk}$. Aus den Formeln (5. 4) und (5. 5) sieht man, daß a^i_r bzw. b^s_j die Größen $\dfrac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^p}$ bzw. $\dfrac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^i}$, die in den Transformationsformeln der Pseudo- und gewöhnlichen Tensoren vorkommen, durch Kontraktionen in $\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^p}$ bzw. $\frac{\partial v^p}{\partial \hat{v}^i}$ überführen. Nach der Definition ist nun:

$$\tilde{D}T^i{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} D\tilde{T}^i{}_{jk}. \tag{5.6}$$

Zu (5. 6) analoge Formeln gelten bezüglich der kovarianten Ableitungen der Pseudotensoren. Wir bemerken noch, daß ein Pseudotensor a^i_j kann aus einem Vektor X^i nach (4. 15) mittels ∇_j gebildet werden.

§ 6. Der metrische $\mathfrak{M}_n$-Raum

Es sei im $\mathfrak{M}_n$-Raum ein in i, k symmetrischer verallgemeinerter Tensor $g_{ik}(x, v)$ definiert, der die Länge und Winkel der verallgemeinerten Vektoren durch die Formeln

$$|\vec{X}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik} X^i X^k}, \quad \cos\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{g_{ik} X^i Z^k}{|\vec{X}| \cdot |\vec{Z}|}$$

bestimmt. $g_{ik}(x, v)$ ist der metrische Fundamentaltensor des Raumes. In der gewöhnlichen Weise definieren wir durch die Gleichungen

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta^k_i \tag{6.1}$$

die kontravarianten Komponenten $g^{ik}(x, v)$ des metrischen Grundtensors. Das Herauf- bzw. Herunterziehen der Indizes der verallgemeinerten Tensoren ist dann durch g^{ij} bzw. g_{ij}, wie in den Finslerräumen definiert.

Neben g_{ij} führen wir auch den Tensor

$$\gamma_{ik} \overset{\text{def}}{=} g_{rs}\, a^r_i\, a^s_k \tag{6.2}$$

ein, der nach den Transformationsformeln (5. 1) und

$$\hat{g}_{rs} = \frac{\partial v^p}{\partial \hat{v}^r} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^s} g_{pt}$$

einen Tensor im gewöhnlichen Sinne bestimmt, d. h. seine Transformationsformel lautet:

$$\hat{\gamma}_{ik} = \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k} \gamma_{rs}.$$

Mit $\gamma_{ik}(x, v)$ können wir die Länge und den Winkel der gewöhnlichen Vektoren mit der Transformationsformel (2. 10a) definieren.

Definieren wir jetzt einen gewöhnlichen rein kontravarianten Tensor durch

$$\gamma^{ij} \overset{\text{def}}{=} g^{ht}\, b^i_h\, b^j_t,$$

so folgt nach (5. 2), (6. 1) und (5. 2a), daß

$$\gamma^{ij}\, \gamma_{jk} = \delta^i_k$$

besteht, d. h. γ^{ij} sind eben die kontravarianten Komponenten von γ_{jk}. Mit dem gewöhnlichen Tensor γ_{ij} können wir diejenigen Indizes herunterziehen, die bei einer Transformation (1. 1) einen $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$-Faktor haben. Offenbar verändern wir somit den pseudotensoriellen Charakter nicht. Ähnliches gilt für γ^{ij} bei dem Heraufziehen derjenigen Indizes, die einen $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}$-Faktor hervorrufen.

Wir wollen jetzt die Übertragungsparameter durch g_{ij} bestimmen. Da die Parallelübertragung der verallgemeinerten Vektoren längs einer Grundelementfolge

$$x^i = x^i(t), \quad v^i = v^i(t)$$

durch das Verschwinden des invarianten Differentials definiert ist, gibt die Forderung, daß bei Parallelübertragung die Länge der verallgemeinerten Vektoren eine Invariante sei, die Relation:

$$Dg_{ij} = 0,$$

die nach (4. 16) mit den Bedingungen

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} - M_{ijk} - M_{jik} = 0, \tag{6.3}$$

$$\nabla_k g_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k - L^*{}_{ijk} - L^*{}_{jik} = 0 \tag{6.4}$$

äquivalent ist. Dabei wurde

$$M_{ijk} = g_{js} M_i{}^s{}_k, \qquad L^*_{ijk} = g_{js} L^*_i{}^s{}_k$$

gesetzt.

Stellen wir jetzt die Forderung, daß $M_i{}^j{}_k$ *in i, k symmetrisch sei.* Diese Bedingung ist bezüglich der Transformationen (1. 1) invariant, da die angegebene Forderung mit $M_{[i}{}^j{}_{k]} = 0$ äquivalent ist, und diese Relation nach unserem Satz 2 eine tensorielle — d. h. bezüglich (1. 1) invariante — Relation ist. Auf Grund von (6. 3) ist

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} + \overset{*}{\nabla}_i g_{jk} - \overset{*}{\nabla}_j g_{ki} = 0$$

und aus dieser Gleichung folgt nach der gestellten Symmetrieforderung:

$$M_{ijk} \equiv g_{js} M_i{}^s{}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial v^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial v^j}\right). \tag{6.5}$$

Die Formel (6. 5) bestimmt nun M_{ijk} und somit nach einer Kontraktion mit g^{jt} auch $M_i{}^t{}_k$ ausgedrückt durch die g_{ij}. Doch sind die g_{ij} nicht vollständig beliebig angebbar. Nach (3. 10) und (6. 5) folgt, wenn die $g_{.j}$ in den v^k homogen von nullter Ordnung sind, was im metrischen Fall immer gelten muß, daß

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial v^i} v^k - \frac{\partial g_{ik}}{\partial v^j} v^k = 0 \tag{6.6}$$

besteht. (6. 6) zeigt, daß die g_{ij} nicht beliebig gewählt werden können.

In den Finslerräumen ist die Relation

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} v^i = 0 \tag{6.7}$$

charakteristisch (vgl. [2], Formel (V) und die nachfolgenden Zeilen auf S. 11.). In unserem $\mathfrak{M}_n$-Raum gilt der folgende

Satz 4. *Die Relation* (6. 7) *ist bezüglich der Transformation* (1. 1) *dann und nur dann eine invariante Relation, falls in* (1. 1) $\hat{v}^i(v)$ *in den* v^k *linear ist, d. h. die Form* (4. 8) *hat.*

Beweis. Berechnen wir die Transformationsformel von $\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} v^i$ mit Hilfe der Formel:

$$\hat{g}_{ij} = \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^i} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} g_{rs}$$

mittels partieller Ableitung nach $\hat{v}^k$, beachten wir die Homogeneität erster Ordnung der inversen Transformation von (1. 1) in den $\hat{v}^k$ (vgl. unser Lemma 1 und die Formel (2. 4)), so wird

$$\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \hat{v}^k} \hat{v}^i = \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial g_{rs}}{\partial v^t} v^r + \frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{v}^k} g_{rs} v^r; \tag{6.8}$$

(6. 7) ist somit bezüglich der allgemeinen Form von (1. 1) keine invariante Relation.

Nehmen wir jetzt an, daß (6. 7) bezüglich einer gewissen speziellen Transformationsgruppe von der Form (1. 1) eine invariante Relation ist. Dann ist nach der Formel (6. 8) $v^i(\hat{v})$ von der Form:

$$\frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{v}^k} = 0, \qquad v^s = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k} \bar{v}^k(\hat{v}) = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k} \varphi^k_r \hat{v}^r,$$

woraus die Linearität von $\hat{v}^i$ in v^j folgt.

Aus diesem Satz folgt ein interessantes

Korollarium. $g_{ij}(x, v)$ *kann dann und nur dann in der Form*

$$g_{ij}(x, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial v^i \partial v^j}, \qquad \mathscr{F} \overset{\text{def}}{=} g_{ab} v^a v^b \tag{6.9}$$

bestimmt werden, falls in der Transformationsformel (1. 1) $\hat{v}^i$ *von den* v^i *linear abhängig ist.*

Beweis. Wäre (6. 9) eine invariante Relation, so würde auch (6. 7) gelten und nach dem Satz 4 wäre auch die Behauptung des Korollariums richtig.

Nun gehen wir auf die Berechnung der $L^{*}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ über. Das Gleichungssystem (6. 4) besteht wegen der Symmetrie in i, j aus $\frac{1}{2} n^2(n+1)$ Gleichungen. $L^{*}{}_{i}{}^{j}{}_{k}$ bzw. die gleichwertigen L^*_{ijk} geben n^3 Komponenten; das Gleichungssystem (6.4) bestimmt also nicht eindeutig die L^*_{ijk}. Im Finslerraum kann die Bedingung

$$L^*_{ijk} = L^*_{kji}$$

vorausgesetzt werden (vgl. [2], Forderung E. auf S. 10). Diese Bedingung kann aber wegen des Satzes 2 in den $\mathfrak{M}_n$-Räumen nicht gestellt werden. Zu den Gleichungen (6. 4) müssen wir noch $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ weitere stellen, um n^3 Gleichungen zu erhalten.

Es sei f_{ik} ein in i, k schiefsymmetrischer verallgemeinerter Tensor;

$$\nabla_k f_{ij} \equiv \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k - f_{ir} L^*{}_j{}^r{}_k - f_{rj} L^*{}_i{}^r{}_k = 0 \tag{6. 10}$$

gibt $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ weiere Gleichungen, die mit (6. 4) zusammen für die n^3 Größen $L^*{}_i{}^r{}_k$ ebensoviel lineare Gleichungen bestimmen. Das lineare Glechungssystem (6. 4) und (6. 10) bestimmt dann die Übertragungsparameter $L^*{}_i{}^r{}_k$.

Die Berechnung wollen wir kurz skizzieren. Offenbar ist:

$$L^*_{ijk} \equiv L^*_{(ij)k} + L^*_{[ij]k} \tag{6. 11}$$

immer eine Identität. Der in i, j symmetrische Teil: $L^*_{(ij)k}$, hat nach (6. 4) die Form:

$$L^*_{(ij)k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k\right). \tag{6. 12}$$

Der in i, j schiefsymmetrische Teil kann aus (6. 10) berechnet werden. Die Gleichung (6. 10) kann nämlich wegen $f_{ij} = -f_{ji}$ in der Form:

$$(f^s{}_j \delta^r_i - f^s{}_i \delta^r_j) L^*_{rsk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k$$

angegeben werden. Beachten wir (6. 11), so wird:

$$\varphi^{rs}{}_{ij} L^*_{[rs]k} = (f^s{}_i \delta^r_j - f^s{}_j \delta^r_i) L^*_{(rs)k} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k, \tag{6. 13}$$

wo wegen der schiefen Symmetrie von $L^*_{[rs]k}$ in r, s:

$$\varphi^{rs}{}_{ij} \overset{\text{def}}{=} f^{[s}{}_j \delta^{r]}_i - f^{[s}{}_i \delta^{r]}_j$$

bedeutet. Bezeichnet man den inversen Tensor von $\varphi^{rs}{}_{ij}$ mit $\psi^{ij}{}_{kl}$, d. h. ist:

$$\varphi^{rs}{}_{ij} \psi^{ij}{}_{lm} = \delta^{[r}_l \delta^{s]}_m \; {}^{2)} \tag{6. 14}$$

so wird nach Überschiebung mit $\psi^{ij}{}_{lm}$ aus (6. 13):

$$L^*_{[lm]k} = \psi^{ij}{}_{lm} \left\{ 2 f^s{}_{[i} \delta^r_{j]} L^*_{(rs)k} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k \right\}. \tag{6. 15}$$

---

[2]) Die rechte Seite und somit auch $\psi^{ij}{}_{lm}$ ist auch in l, m schiefsymmetrisch.

Aus (6. 11), (6. 12), und (6. 15) erhält man

$$
(6.16)\qquad
\begin{aligned}
L^*{}_{ijk} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r}\, L^*{}_o{}^r{}_k\right) + \\
&+ \psi^{ab}{}_{ij}\left\{ f^s{}_{[a}\delta^r_{b]}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial v^t}\, L^*{}_o{}^t{}_k\right) + \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{ab}}{\partial v^t}\, L^*{}_o{}^t{}_k\right\}.
\end{aligned}
$$

$L^*{}_{ijk}$ ist noch nicht vollständig bestimmt, nur mit $L^*{}_o{}^t{}_k$ ausgedrückt. Die Struktur von $L^*{}_{ijk}$ kann aber aus (6. 16) abgelesen werden. Jetzt müßte man noch eine Überschiebung von (6. 16) mit v^i durchführen, so würde man ein Gleichungssystem für $L^*{}_o{}^t{}_k$ erhalten, die noch gelöst werden sollte, um $L^*{}_{ijk}$ vollständig zu bestimmen. Die Grundgrößen sind jetzt g_{ij} und f_{ij}.

§ 7. Torsions- und Krümmungsgrößen des $\mathfrak{M}_n$-Raumes

Da das invariante Differential der $\mathfrak{M}_n$-Räume — abgesehen von den Transformationsformeln der Übertragungsparameter — formal mit dem der affinzusammenhängenden Linienelementräume identisch ist, können die Torsions- und Krümmungsgrößen in analoger Weise bestimmt werden (vgl. [4], § 3).

Bedeuten d und δ miteinander vertauschbaren Differentiationssymbole, und D und Δ die zu ihnen gehörigen invariante Differentiale, so sind durch $(\tilde{\Delta}D - \tilde{D}\Delta)x^i$ die Torsionsgrößen des $\mathfrak{M}_n$-Raumes bestimmt[3]). Da x^i als Koordinate eines Punktes ein Skalar ist, ist $Dx^i = dx^i$. Nun ist aber dx^i ein gewöhnlicher Vektor, somit ist das invariante Differential von dx^i nach der Definition des invarianten Differentials der gewöhnlichen Tensoren

$$
(7.1)\qquad \tilde{\Delta}\, dx^i \overset{\text{def}}{=} \Delta a^i_j\, dx^j.
$$

Auf Grund von (4. 4) und (5. 6) wird somit:

$$
(\tilde{\Delta}D - \tilde{D}\Delta)x^i = \delta a^i_j\, dx^j + M_r{}^i{}_k\, a^r_j\, dx^j\, \omega^k(\delta) + L^*{}_r{}^i{}_k\, a^r_j\, dx^j\, \delta x^k - d|\delta,
$$

wo $d|\delta$ den vorigen Ausdruck mit vertauschten Differentiationssymbolen d und δ bedeutet.

Beachten wir jetzt, daß nach (4. 1) und (4. 7)

$$
dv^l = \omega^l(d) - L^*{}_o{}^l{}_k\, dx^k
$$

ist, so wird wegen $(\delta d - d\delta)x^i \equiv 0$:

$$
(7.2)\qquad
\begin{aligned}
(\tilde{\Delta}D - \tilde{D}\Delta)x^i &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial a^i_j}{\partial v^r}\, L^*{}_o{}^r{}_k + L^*{}_r{}^i{}_k\, a^r_j - j|k\right)[dx^j\, dx^k] + \\
&+ \left(\frac{\partial a^i_j}{\partial v^k} + M_r{}^i{}_k\, a^r_j\right)[dx^j\, \omega^k],
\end{aligned}
$$

---

[3]) $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{D}$ bedeutet nach (5.6), daß man das invariante Differential eines gewöhnlichen Vektors bilden soll, da $Dx^i = dx^i$ ein gewöhnlicher Vektor ist.

wo $j|k$ den vorigen (in Klammern stehenden) Ausdruck mit vertauschten Indexen j, k bezeichnet und die eckigen Klammern die entsprechenden äußeren Differentialformen bedeuten.

Die beiden Torsionstensoren des $\mathfrak{M}_n$-Raumes sind nach (7. 2):

$$Q^i{}_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial a^i_j}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_k + L^*{}_r{}^i{}_k a^r_j - j|k \tag{7. 3}$$

und

$$T^i{}_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a^i_j}{\partial v^k} + M_r{}^i{}_k a^r_j. \tag{7. 4}$$

Beachten wir noch, daß auf der linken Seite von (7. 2) auf Grund von (7. 1) ein verallgemeinerter Vektor steht, ferner, daß dx^k ein gewöhnlicher Vektor und $\omega^k(d)$ ein verallgemeinerter Vektor ist, so folgt aus (7. 2), daß die durch (7. 3) und (7. 4) bestimmten Größen Pseudotensoren sind. Ihre Transformationsformeln sind die folgenden:

$$\hat{Q}^i{}_{jk} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^k} Q^r{}_{st},$$

$$\hat{T}^i{}_{jk} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} T^r{}_{st}.$$

Die Bestimmung der Krümmungsgrößen ist vollständig analog zu dem Falle der affinzusammenhängenden Linienelementräume. Ist X^i ein verallgemeinerter Vektor, so ist

$$(\Delta D - D\Delta) X^j = \left\{\frac{1}{2} R_i{}^j{}_{kl}[dx^k\, dx^l] + P_i{}^j{}_{kl}[dx^k\, \omega^l] + \frac{1}{2} S_i{}^j{}_{kl}[\omega^k\, \omega^l]\right\} X^i, \tag{7. 5}$$

wo

$$R_i{}^j{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial L^*{}_i{}^j{}_k}{\partial x^l} - \frac{\partial L^*{}_i{}^j{}_k}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_l + L^*{}_i{}^t{}_k L^*{}_t{}^j{}_l - k|l\right) +$$

$$+ M_i{}^j{}_r \left(\frac{\partial L^*{}_s{}^r{}_k}{\partial x^l} - \frac{\partial L^*{}_s{}^r{}_k}{\partial v^t} L^*{}_o{}^t{}_l + L^*{}_s{}^t{}_k L^*{}_t{}^r{}_l - k|l\right) v^s,$$

$$P_i{}^j{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L^*{}_i{}^j{}_k}{\partial v^l} - \nabla_k M_i{}^j{}_l + M_i{}^j{}_t \frac{\partial L^*{}_s{}^t{}_k}{\partial v^l} v^s,$$

$$S_i{}^j{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M_i{}^j{}_k}{\partial v^l} + M_i{}^t{}_k M_t{}^j{}_l - k|l$$

bedeuten. Beachten wir jetzt, daß die linke Seite von (7. 5) ein verallgemeinerter Vektor bestimmt, dx^k ein gewöhnlicher und $\omega^k(d)$ ein verallgemeinerter Vektor ist, ferner dx^k, δx^k, $\omega^k(d)$, $\omega^k(\delta)$, X^k voneinander unabhängig vorgegeben werden können, so erhält man die folgenden Transformationsformeln der Krümmungsgrößen:

$$\hat{R}_i{}^j{}_{kl} = \frac{\partial v^p}{\partial \hat{v}^i} \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^q} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^l} R_p{}^q{}_{rs},$$

$$\hat{P}_i{}^j{}_{kl} = \frac{\partial v^p}{\partial \hat{v}^i} \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^q} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^l} P_p{}^q{}_{rs},$$

$$\hat{S}_i{}^j{}_{kl} = \frac{\partial v^p}{\partial \hat{v}^i} \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^q} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^l} S_p{}^q{}_{rs}.$$

$R_i{}^j{}_{kl}$ und $P_i{}^j{}_{kl}$ sind also im $\mathfrak{M}_n$-Raum Pseudotensoren, $S_i{}^j{}_{kl}$ ist aber ein verallgemeinerter Tensor.

Der Tensor $R_i{}^j{}_{kl}$ hat die Form:

(7. 6) $$R_i{}^j{}_{kl} \equiv R^*{}_i{}^j{}_{kl} + M_i{}^j{}_r R^*{}_o{}^r{}_{kl},$$

wo

$$R^*{}_i{}^j{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L^*{}_i{}^j{}_k}{\partial x^l} - \frac{\partial L^*{}_i{}^j{}_k}{\partial v^r} L^*{}_o{}^r{}_l + L^*{}_i{}^r{}_k L^*{}_r{}^j{}_l - k|l$$

gesetzt wurde. Wir zeigen, daß $R^*{}_i{}^j{}_{kl}$ kein Pseudotensor ist. Wäre nämlich $R^*{}_i{}^j{}_{kl}$ ein Pseudotensor, so könnte $R_i{}^j{}_{kl}$ nach (7. 6) und (3. 8) kein Pseudotensor sein, entgegen der vorigen.

Beschränken wir uns aber auf solche Transformationen (1. 1), die in den v^i homogen linear sind, d. h. die Form (4. 8) haben, so ist bezüglich dieser Transformationen auch $R^*{}_i{}^j{}_{kl}$ ein Pseudotensor. In diesem Falle ist nämlich nach (3. 8) $M_i{}^j{}_k$ ein verallgemeinerter Tensor, und nach (4. 2) ist immer (auch bezüglich der allgemeinen Form von (1. 1)):

$$R^*{}_o{}^j{}_{kl} \equiv R_o{}^j{}_{kl}$$

ein Pseudotensor. Aus (7. 6) folgt dann, daß in diesem Fall

(7. 7) $$R^*{}_i{}^j{}_{kl} \equiv R_i{}^j{}_{kl} - M_i{}^j{}_r R_o{}^r{}_{kl}$$

auch ein Pseudotensor ist.

§ 8. Charakteristische Kurven im $\mathfrak{M}_n$-Raum

Im gewöhnlichen affinzusammenhängenden Linienelementraum ist eine Kurve als eine einparametrige Mannigfaltigkeit der tangenten Linienelemente

$$x^i = x^i(t), \quad v^i = v^i(t) = \frac{dx^i}{dt}$$

definiert. Im $\mathfrak{M}_n$-Raum sind aber die Transformationsformeln von v^i und $\frac{dx^i}{dt}$ verschieden, darum wird der Begriff der tangenten Linienelemente einen anderen Sinn haben. Wir geben die folgende

Definition. *Eine Kurve im engeren Sinne im $\mathfrak{M}_n$-Raum ist eine einparametrige Folge $(x^i(t), v^i(t))$ der erweiterten Linienelemente, für die*

$$x^i = x^i(t), \quad \frac{dx^i}{dt} = b^i_j(x(t), v(t))\, v^j(t) \tag{8. 1}$$

besteht. Eine Kurve im weiteren Sinne ist eine einparametrige Folge der erweiterten Linienelemente.

Bemerkung. Existiert im $\mathfrak{M}_n$-Raum der Pseudotensor b^i_j bzw. a^i_j nicht, so können im Raume selbstverständlich nur die Kurven im weiteren Sinne definiert werden.

Auf Grund der Transformationsformel (5. 3) folgt, daß $b^i_j v^j$ ein gewöhnlicher Vektor ist. Die v^j bestimmen nämlich, wie wir das schon in § 3 gezeigt haben, einen verallgemeinerten Vektor. Auf Grund von (5. 2) kann (8. 1) in der äquivalenten Form

$$x^k = x^k(t), \quad v^k = a^k_i(x(t), v(t))\, \frac{dx^i}{dt} \tag{8. 2}$$

angegeben werden. Eine wichtige Bemerkung ist das folgende:

Eine Kurve im engeren Sinn ist — falls nicht Singularitäten vorhanden sind — durch $x^i(t)$ bestimmt.

Auf Grund von (8. 1) ist nämlich

$$\frac{dx^i}{dt} = b^i_j(x(t), v(t))\, v^j(t) \tag{8. 3}$$

für $v^i(t)$ ein Gleichungssystem mit n Unbekannten. Ist (8. 3) bezüglich v^i unlösbar, so bezeichnen wir $x^i(t)$ als eine Kurve mit Singularitäten.

Jetzt können wir schon die autoparallelen Kurven definieren. Die autoparallelen Kurven sind diejenigen Mannigfaltigkeiten (8. 2), für die

$$\omega^k(d) \equiv D\left(a^k_i\,(x(t), v(t))\, \frac{dx^i}{dt}\right) = 0 \tag{8. 4}$$

gültig ist. (8. 4) bestimmt ein Differentialgleichungssystem für $\dfrac{dx^i}{dt}$.

Die Bogenlänge einer Kurve im engeren bzw. im weiteren Sinne, wenn der Raum metrisch ist, ist durch

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\gamma_{ik}(x(\tau), v(\tau))\, \frac{dx^i}{d\tau}\, \frac{dx^k}{d\tau}}\, d\tau \tag{8. 5}$$

definiert. Ist (8. 2) gültig, so folgt aus (6. 2):

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ik}(x(\tau), v(\tau))\, v^i(\tau)\, v^k(\tau)}\, d\tau. \tag{8. 5a}$$

Die Extremalkurven können durch die Variation von (8. 5) bestimmt werden. Setzen wir für die variierte Kurve

$$x^{*i}(t) = x^i(t) + \varepsilon\xi^i(t), \tag{8.6}$$

so muß man für die Anwendbarkeit der Euler—Lagrangeschen Differentialgleichungen noch die Abhängigkeit des Feldes $v^i(t)$ der erweiterten Linienelemente von ε, x^i und $\frac{dx^i}{dt} \equiv \dot{x}^i$ bestimmen. Für die Kurven im erweiterten Sinne kann $v^i(t)$ auch von $x^i(t)$ und $x^{i*}(t)$ unabhängig vorausgesetzt werden, für die Kurven im engeren Sinne ist die Abhängigkeit von v^i von x^i und $\dot{x}^i$ durch die Formeln (8. 2) bestimmt. Die Lösung von (8. 2) gibt die Form

$$v^i = v^i(x, \dot{x}), \qquad v^{*i} = v^i(x^*, \dot{x}^*),$$

wo x^{*i}, $\dot{x}^{*i}$ durch (8. 6) bestimmt sind. Die zum Bogenlänge (8. 5) gehörenden Variationsproblem hat somit die Form:

$$\delta \int_{t_0}^{t} \sqrt{\gamma_{ik}(x, v(x, \dot{x}))\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt = 0,$$

wo $\gamma_{ik}(x, v)$ durch (6. 2) bestimmt ist.

§ 9. Schlußbemerkungen

Im Finslerschen Raum, der unter unseren $\mathfrak{M}_n$-Räumen durch $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ gekennzeichnet ist, benützt man statt der partiellen Ableitung nach v^k immer die Operation

$$\|_k \overset{\text{def}}{=} F \frac{\partial}{\partial v^k}, \qquad F \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, v) v^i v^k},$$

wo F die Grundfunktion des Raumes bedeutet. Führen wir den Einheitsvektor

$$l^i \overset{\text{def}}{=} \frac{v^i}{F(x, v)} \tag{9.1}$$

ein, so gilt für eine Größe $T^{\cdots}_{\cdots}(x, v)$ die in den v^i homogen von nullter Or dnung ist

$$T^{\cdots}_{\cdots}\|_i = \frac{\partial T^{\cdots}_{\cdots}}{\partial l^i}. \tag{9.2}$$

Es ist nämlich auf Grund der vorausgesetzten Homogeneität nullter Ordnung:

$$T^{\cdots}_{\cdots}(x, v) \equiv T^{\cdots}_{\cdots}(x, l)$$

und nach einer partiellen Ableitung nach v^i folgt in Hinsicht auf (9. 1)

$$\frac{\partial T^{\cdots}_{\cdots}}{\partial v^i} = \frac{\partial T^{\cdots}_{\cdots}}{\partial l^k}\left(\frac{1}{F}\delta^k_i + v^k \frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{1}{F}\right)\right),$$

woraus (9. 2) wegen $v^k = Fl^k$ und wegen der Homogeneität unmittelbar folgt.

Die Grundfunktion F als homogenisierender Faktor, und der Einheitsvektor (9. 1) können mit der Operation (9. 2) zusammen auch in dem $\mathfrak{M}_n$-Raum eingeführt werden, doch ist (9. 2) nach dem Lemma 2 in § 4 nicht eine tensorielle Operation, nur wenn für Skalaren angewandt wird. Dementsprechend sind auch im $\mathfrak{M}_n$-Raum

$$l_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial v^i} = g_{ik}\, l^k$$

die kovarianten Komponenten des Einheitsvektors l^i, falls noch (6. 7) gilt.

Bezüglich der Krümmungstensoren bemerken wir, daß man im Wesentlichen die in § 7 angegebenen Krümmungstensoren erhalten würde, wenn man statt des verallgemeinerten Vektors X^i einen gewöhnlichen Vektor V^i mit dem Transformationsgesetz (2. 10a) gewählt hätten. Das invariante Differential von V^i wäre nämlich nach der Definition

$$\tilde{D}V^i \overset{\text{def}}{=} D(a^i_j\, V^j).$$

In der Formel (7. 5) würde also statt des verallgemeinerten Vektors X der verallgemeinerte Vektor $a^i_j V^j$ vorkommen, die Krümmungstensoren wären dieselben.

Bezüglich der autoparallelen Kurven bemerken wir, daß sie auch dann definiert weden können, falls a^i_j nicht existiert. In diesem Falle ist ihre Gleichung

$$\omega^i(d) \equiv \frac{dv^i}{dt} + L^{*\,i}_{j\,k}(x(t), v(t))v^j(t)v^k(t) = 0. \tag{9. 3}$$

Wir wollen jetzt eine Vergleichung zwischen der im vorigen festgelegten Geometrie und der Kawaguchi—Hokarischen Übertragungstheorie kurz: $K-H$-Theorie, angeben. Vor allem stellen wir fest, daß die Grundtransformationen der $K-H$-Theorie allgemeiner sind, als die unsrigen (vgl. [7], Formel (1)). Die Begründung der Übertragung ist in der $K-H$-Theorie zu der der Punkträume, bei uns aber zu der der Linienelementräume ähnlich. Das kommt in der Tatsache zum Ausdruck, daß in der $K-H$-Theorie ein Übertragungsparameter mit $(m+n)^3$ Komponenten vorkommt, während bei uns zwei Übertragungsparameter mit je n^3 (nicht immer verschiedenen, z. B. $M_{p\,q}^{\,i} = M_{q\,p}^{\,i}$) Komponenten existieren (vgl. [6] Formel (7) und unsere Formeln (3. 11), (3. 13) bzw. (4. 7)). Dementsprechend kommen bei uns zwei fundamentale kovariante Ableitungen ∇_k und $\overset{*}{\nabla}_k$ vor. Auch die Homogeneität der Grundtransformationen (1. 1) in den v^i deutet an den Richtungscharakter der Grundelemente v^i. Hingegen müßten wir aber für das invariante Differential der Pseudotensoren außer $M_i{}^j{}_k$ und $L_i{}^j{}_k$ noch ein Objekt, nämlich das a^i_k mit den Transformationsformeln (5. 1) benutzen.

In der $K-H$-Theorie können offensichtlich nur im Falle $m=n$ die Größen x^λ als die Bestimmungszahlen einer Richtung betrachtet werden. (Vgl. [6] Formel (1)). Somit ist unser Satz 1. in der allgemeinen $K-H$-Theorie nicht gültig. Der Satz 2. könnte aber auch in der $K-H$-Theorie formuliert werden, und das würde dort behaupten, daß gewisse Teile der Übertragungsparameter $\Gamma_A{}^B{}_C$ $(A, B, C=1, \ldots, m+n)$ in sich ein geometrisches Objekt bilden, mit denen man die Übertragung schon bestimmen kann, falls $m=n$ ist.

Die Untersuchungen des metrischen Falles, sowie die Torsionsgrößen fehlen noch in der allgemein $K-H$-Theorie.

Zum schluß wollen wir nochmals auf die Wichtigkeit der speziellen *Transformationen von der Form* (4. 8) hinweisen, die eine Untergruppe der Transformationen (1. 1) bilden und bezüglich welcher mehrere Eigenschaften der gewöhnlichen Linienelementräume gültig bleiben.

Zum Beispiel: Es ist bezüglich (4. 8) nach Satz 2. $M_p{}^i{}_q$ ein verallgemeinerter Tensor und $L^*{}_j{}^i{}_k$ ein differentiell-geometrisches Objekt; nach Lemma 2 ist $\frac{\partial}{\partial v^i}$ bzw. (9. 2) tensorielle Operation, die Relation (6. 7) ist eine invariante Relation, folglich bestehen auch die Relationen (6. 9). Auch $R^*{}_i{}^j{}_{kl}$ in der Formel (7. 6) ist ein Pseudotensor des $\mathfrak{M}_n$-Raumes.

Diese Tatsache zeigen daß die in v^i lineare Richtungstransformationen eine besondere Stellung haben, die aber doch allgemeiner ist als die durch $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ gekennzeichneten Transformationen der affinzusammenhängenden Linienelementräume.

Literatur

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 755—781.

[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Ind.* **79** (1934).

[3] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. Szeged,* **17** (1956), 85—120.

[4] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7—17.

[5] A. Kawaguchi, The Foundation of the theory of displacement, II., *Proc. Imp. Acad.* **10** (1934), 45—48.

[6] S. Hokari, Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, *J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ.* **3** (1935), 15—26.

[7] S. Hokari, Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, II., *J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ.* **4** (1935—36), 41—50.

[8] S. Gołąb, Über eine Art der Geometrie von Kawaguchi—Hokari, *Ann. Soc. Pol. Math.* **16** (1937), 25—30.

(Eingegangen am 27. November 1965.)