Beitrag zu der Arbeit „Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III"

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit $\lambda_1 \geqq 1$. $M(\{\lambda_n\})$ bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$\sum a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ mit

$$\sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\nu(x)} \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \right) dx \leqq 1 \tag{2}$$

in $[0, 1]$ fast überall besteht, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit natürlichen Werten gebildet ist. Für eine Folge $\{a_n\}_1^N$ wird

$$I(\{\lambda_n\}; c_1, \ldots, c_N) = \sup \int_0^1 (\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|)^2 \, dx$$

gesetzt, wobei das Supremum für alle in $[0, 1]$ orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit (2) gebildet wird. Für eine unendliche Folge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| = \lim_{N \to \infty} I(\{\lambda_n\}; a_1, \ldots, a_N).$$

Man kann die folgende Behauptung beweisen:

Satz. *Es sei* $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ *gilt dann und nur dann, wenn* $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| < \infty$.

Aus den Resultaten der im Titel zitierten Arbeit [1]) folgt, daß $M(\{\lambda_n\})$ mit der Norm $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\|$ ein Banachraum ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir gewisse Vorbereitungen.

Offensichtlich gilt

$$I(\{\lambda_n\}; c_1 + d_1, \ldots, c_N + d_N) \leqq I(\{\lambda_n\}; c_1, \ldots, c_N) + I(\{\lambda_n\}; d_1, \ldots, d_N). \tag{3}$$

[1]) K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen III, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 127—157.

Hilfssatz I. *Es sei $I(\{\lambda_n\}; c_1, \ldots, c_N) \geqq 8\sqrt{2}$. Dann gibt es ein in* [0, 1] *orthonormiertes System von Treppenfunktionen derart, daß*

$$\sup \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\nu(x)} \psi_k(x) \psi_k(t) \right| dt \right) dx \leqq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit natürlichen Werten $1 \leqq \nu(x) \leqq N$ gebildet ist, und

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer einfachen Menge $E(\subseteqq [0, 1])$ mit mes $(E) \geqq 1/4$ *besteht.*

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe loc. cit. 1), Hilfssatz X.)

Hilfssatz II. *Es sei $I(\{\lambda_n\}; c_1, \ldots, c_N) \geqq 8\sqrt{2}$ und $\alpha > 1$. Dann gibt es ein in* [0, 1] *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\bar{\psi}_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N)$ derart, daß*

$$\sup \int_0^1 \frac{2}{\lambda_{\nu(x)}} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\nu(x)} \bar{\psi}_k(x) \bar{\psi}_k(t) \right| dt \leqq 1$$

gilt, wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit natürlichen Werten $1 \leqq \nu(x) \leqq N$ gebildet ist, und

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \bar{\psi}_i(x) + \ldots + c_j \bar{\psi}_j(x)| \geqq \sqrt{\alpha}$$

in einer einfachen Menge $\bar{E}(\subseteqq [0, 1]$ mit mes $(\bar{E}) \geqq 1/4\alpha$ *besteht.*

Für die Funktionen

$$\bar{\psi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha}\, \psi_n(\alpha x) & (0 \leqq x \leqq 1/\alpha), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n = 1, \ldots, N)$ sind alle Bedingungen des Hilfssatzes II erfüllt, wobei $\psi_n(x)$ die im Hilfssatz I erwähnten Funktionen bezeichnen.

Hilfssatz III. *Es sei $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Ist für eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ $I(\{\lambda_n\}; \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) \geqq 8\sqrt{2}$, dann gibt es ein in* [0, 1] *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit* (2) *derart, daß*

$$\overline{\lim_{i, j \to \infty}} \left| \sum_{n=i}^{j} a_n \varphi_n(x) \right| = \infty \tag{4}$$

fast überall gilt.

Beweis des Hilfssatzes III. Durch vollständige Induktion definieren wir eine Indexfolge $(0 =) k(0) < \ldots < k(i) < \ldots$, ein in [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_i(\subseteqq [0, 1])$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (d. h. F_i ist die Vereinigung endlichvieler Intervalle) mit folgenden Eigenschaften:

Für jedes i gilt

$$\lambda_{n_{k(i)}+1}^{-1} + \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} (M(j)+1)\right) \leqq 1/8, \tag{5}$$

wobei

$$M(j) = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(j)}+1}^{n_{k(j+1)}} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt$$

ist.

Die Mengen F_i sind stochastisch unabhängig und für jedes i gilt

$$\text{mes}\,(F_i) \geqq 1/4i. \tag{6}$$

Es besteht

$$\sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\nu(x)} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt \right) dx \leqq 1/8, \tag{7}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit natürlichen Werten $1 \leqq \nu(x) \leqq n_{k(1)}$ gebildet ist.

Für jedes i gelten

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{r} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt = 1 \qquad (n_{k(i)} < r \leqq n_{k(i+1)}) \tag{8}$$

und

$$\sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=n_{k(i)}+1}^{\nu(x)} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \right) dx \leqq 3/4, \tag{9}$$

wobei das Supremum für alle meßbaren Funktionen $\nu(x)$ mit natürlichen Werten $n_{k(i)} < \nu(x) \leqq n_{k(i+1)}$ gebildet wird.

Für jedes i gilt

$$\max_{n_{k(i)} < p \leqq q \leqq n_{k(i+1)}} |a_p\,\varphi_p(x) + \dots + a_q\,\varphi_q(x)| \geqq \sqrt{i} \qquad (x \in F_i). \tag{10}$$

Es sei $n_{k(1)}$ die kleinste positive ganze Zahl mit $\lambda_{n_{k(1)}+1}^{-1} \leqq 1/8$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{8}\,\chi_n(8x) & (0 \leqq x \leqq 1/8), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \dots, n_{k(1)})$, wobei $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet. Dann gilt (7). Es sei $i_0(\geqq 0)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, dass die Indizes $k(i)$ $(i=1, \dots, i_0+1)$, die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k(i_0+1)})$ und die einfachen Mengen F_i $(i=1, \dots, i_0)$ schon definiert sind derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, (7), weiterhin (5) für $i=1, \dots, i_0+1$, (6), (8), (9) und (10) für $i=1, \dots, i_0$ erfüllt sind.

Dann können wir eine Zerlegung von [0, 1] in paarweise disjunkte Intervalle I_s $(s=1, \ldots, \sigma)$ angeben derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k(i_0+1)})$ in jedem I_s konstant ist und jede Menge F_i $(i=1, \ldots, i_0)$ die Vereinigung gewisser I_s ist. Die zwei Hälften von I_s bezeichnen wir mit I'_s bzw. mit I''_s. Wir wenden den Hilfssatz II mit der Folge $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_{k(i_0+1)+1}}$ mit $\alpha=\sqrt{i_0+1}$ und mit den Koeffizienten $0, \ldots, 0, a_{n_{k(i_0+1)}}+1, \ldots, a_{n_{k(i_0+1)+1}}$ an. Die entsprechenden Funktionen bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\bar{\psi}_n(x)$ $(n=n_{k(i_0+1)}+1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1})$, bzw. mit E. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)}+l}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I'_s; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{n_{k(i_0+1)}+l}(I''_s; x)$$

$(l=1, \ldots, n_{k(i_0+1)+1}-n_{k(i_0+1)})$ und

$$F_{i_0+1} = \left(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I'_s)\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I''_s)\right),$$

wobei in allgemeinen für ein endliches Intervall $I=[a, b]$

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a<x<b), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, und für eine Menge $H(\subseteqq [0, 1])$ $H(I)$ die Bildmenge von H bei der Transformation $y=(b-a)x+a$ bedeutet.

Es sei $n_{k(i_0+2)}$ die kleinste natürliche Zahl mit $n_{k(i_0+2)}>n_{k(i_0+1)}$, für die (5) im Falle $i=i_0+2$ besteht. Es sei $J_1, \ldots, J_\varrho$ eine Zerlegung von [0, 1] in paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k(i_0+1)+1})$ in jedem J_r konstant ist. Die zwei Hälften von J_r bezeichnen wir mit J'_r bzw. mit J''_r. Wir setzen

$$\varphi_{n_{k(i_0+1)+1}+l}(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \chi_l(J'_r; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \chi_l(J''_r; x) \qquad (l=1, \ldots, n_{k(i_0+2)}-n_{k(i_0+1)+1}),$$

wobei $\chi_n(x)$ die n-te Haarsche Funktion bezeichnet.

Offensichtlich sind die einfachen Mengen F_i $(i=1, \ldots, i_0+1)$ stochastisch unabhängig und (6) ist auch für $i=i_0+1$ erfüllt; weiterhin sind für die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k(i_0+2)})$ (7), (8), (9) und (10) auch für $i=i_0+1$ erfüllt. Die Folge $\{k(i)\}_1^\infty$, das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ und die Mengenfolge $\{F_i\}_1^\infty$ ergibt sich durch Induktion.

Auf Grund von (5), (7), (8) und (9) ergibt sich durch einfache Rechnung (siehe loc. cit. [1]), Beweis des Hilfssatzes XI), daß für das System $\{\varphi_n(x)\}$ (2) erfüllt ist. Auf Grund von (10) erhalten wir, daß (4) in der Menge $\overline{\lim}_{i\to\infty} F_i$ besteht. Da die Mengen F s tochastisch unabhängig sind und (6) für jedes i besteht, ergibt sich unter Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\operatorname{mes}\left(\overline{\lim}_{i\to\infty} F_i\right)=1$ ist.

Damit haben wir Hilfssatz III bewiesen.

Hilfssatz IV. *Es sei $\lambda_n \to \infty$. $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ gilt dann und nur dann, wenn*

$$\lim_{m\to\infty} \Big(\lim_{N\to\infty} I(\{\lambda_n\}; \underbrace{0, \dots, 0}_{m}, a_{m+1}, \dots, a_N)\Big) = 0 \tag{11}$$

ist.

Dieser Hilfssatz ist bekannt. (Siehe loc. cit. [1]), Hilfssatz XII.)

Beweis des Satzes. Ist $\|\{a_n\};\{\lambda_n\}\| = \infty$, dann gibt es auf Grund von (3) eine Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit $I(\{\lambda_n\}; \underbrace{0, \dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geqq 8\sqrt{2}$ $(k=0, 1, \dots)$. Unter Anwendung des Hilfssatzes III ergibt sich $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$.

Es sei nun $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| < \infty$. Wäre (11) nicht erfüllt, dann existierte eine positive Zahl σ und eine Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$I(\{\lambda_n\}; \underbrace{0, \dots, 0}_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geqq \sigma.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\sigma \geqq 8\sqrt{2}$ annehmen. Unter Anwendung des Hilfssatzes III ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ mit (2) derart, daß (4) fast überall besteht. Für dieses System ist

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} |a_i\,\varphi_i(x) + \dots + a_j\,\varphi_j(x)|\Big)\, dx = \infty,$$

was aber $\|\{a_n\}; \{\lambda_n\}\| < \infty$ widerspricht. Also ist (11) erfüllt, woraus $\{a_n\} \in M(\{\lambda_n\})$ folgt.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Auf Grund des Satzes und des Hilfssatzes IV kann man auch die folgende Behauptung beweisen:

Ist $\lambda \to \infty$ $(n \to \infty)$ und $\{a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$, dann gibt es eine positive, nach 0 strebende Folge $\{\mu_n\}$ derart, daß $\{\mu_n a_n\} \notin M(\{\lambda_n\})$ gilt.

(Eingegangen am 27 Dezember 1965.)