

## Über das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen, II.

Von E. GESZTELYI (Debrecen)

### Einleitung

Wir haben in [1] das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen durch Zurückführung auf gewöhnliche Stieltjes-Integrale von Zahlfunktionen definiert.

Hier werden wir das Stieltjes-Integral der Operatorfunktion  $f(\lambda)$  bezüglich der Operatorfunktion  $g(\lambda)$  unmittelbar als den Grenzwert der Summe

$$\sum_i f(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})]$$

definieren. Die Konvergenz ist naturgemäß im Sinne der Operatorenrechnung zu verstehen [2]. Wir beschäftigen uns im § 1. mit den wichtigsten Eigenschaften des Integrals. Im Satz 1. wird die Existenz des Integrals bewiesen falls  $f(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  eine stetige Operatorfunktion, und  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  eine Zahlfunktion von beschränkter Schwankung ist. Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des bekannten entsprechenden klassischen Satzes. Man sieht auf Grund von Satz 1., daß das in [1] eingeführte Integral als Spezialfall des hier eingeführten Integrals entsteht.

Wir haben in [1] den Begriff einer Operatorfunktion von beschränkter Schwankung definiert. Es wird hier — im § 2. — dieser Begriff in Verbindung mit der allgemeineren Definition des Integrals weiter verallgemeinert. Wir zeigen, daß man mit Hilfe der eingeführten Begriffe mehrere Sätze aus der klassischen Theorie des Stieltjes'schen Integrals auf Operatorfunktionen überführen kann.

### § 1. Die allgemeine Definition des Stieltjes-Integrals von Operatorfunktionen

Definition 1. Es seien  $f(\lambda)$  und  $g(\lambda)$  im reellen endlichen Intervall  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$  erklärte Operatorfunktionen. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)})[g(\lambda_i^{(n)}) - g(\lambda_{i-1}^{(n)})] = a$$

unabhängig von der Wahl der Zahlen

$$(1) \quad \alpha = \lambda_0^{(n)} < \lambda_1^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)} = \beta \quad (n=1, 2, \dots)$$

und

$$(2) \quad \lambda_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq \lambda_i^{(n)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

bei der einzigen Voraussetzung

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, n} (\lambda_i^{(n)} - \lambda_{i-1}^{(n)}) = 0,$$

so sagt man, daß die Operatorfunktion  $f(\lambda)$  bezüglich der Operatorfunktion  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  integrierbar ist. Der Operator  $a$  heißt das Stieltjes-Integral von  $f(\lambda)$  bezüglich  $g(\lambda)$ , in Zeichen:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) [g(\lambda_i^{(n)}) - g(\lambda_{i-1}^{(n)})].$$

Die Konvergenz ist naturgemäß im Sinne der Operatorenrechnung zu verstehen ([2]).

*Bemerkung.* Diese Definition des Integrals ist offenbar viel allgemeiner als die Definition des Integrals in [1] (und auch in [2]).

In der Theorie des gewöhnlichen Stieltjes-Integrals beweist man die Existenz des Integrals jeder stetigen Funktion bezüglich Funktionen beschränkter Schwankung. Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung dieses klassischen Satzes.

**Satz 1.** *Ist die Operatorfunktion  $f(\lambda)$  im Intervall  $[\alpha, \beta]$  stetig, ist ferner  $\varphi(\lambda)$  eine Zahlfunktion die in  $[\alpha, \beta]$  von beschränkter Schwankung ist, so ist  $f(\lambda)$  integrierbar in  $[\alpha, \beta]$  bezüglich  $\varphi(\lambda)$  und es gilt*

$$(4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\varphi(\lambda) = p^{-1} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda) \right\},$$

wobei  $p \neq 0$  ein Operator ist mit der Eigenschaft, daß die parametrische Funktion  $pf(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$  im Bereich  $D: \{\alpha \leq \lambda \leq \beta; 0 \leq t < \infty\}$  stetig ist. Das Integral

$$(5) \quad F(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda)$$

ist für jedes feste  $t \geq 0$  ein gewöhnliches Stieltjes-Integral. Die Funktion  $F(t)$  ist im Intervall  $0 \leq t < \infty$  stetig.

**BEWEIS.** Es ist zu beweisen, daß die Folge der Operatoren

$$(6) \quad a_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) [\varphi(\lambda_i^{(n)}) - \varphi(\lambda_{i-1}^{(n)})] \quad (n=1, 2, \dots)$$

konvergiert, falls die Zahlen  $\lambda_i^{(n)}$  und  $\xi_i^{(n)}$  die Eigenschaften (1), (2) und (3) haben, und der Grenzwert von (6) von der Wahl dieser Zahlen unabhängig ist.

Es sei  $p \neq 0$  ein beliebiger Operator für den die parametrische Funktion  $pf(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$  in  $D$  stetig ist. (Es gibt einen solchen Operator  $p \neq 0$ , da  $f(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig ist.) Dann sind die Funktionen

$$(7) \quad \begin{aligned} \{F_n(t)\} &= pa_n = \sum_{i=1}^n pf(\xi_i^{(n)}) [\varphi(\lambda_i^{(n)}) - \varphi(\lambda_{i-1}^{(n)})] = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}, t) [\varphi(\lambda_i^{(n)}) - \varphi(\lambda_{i-1}^{(n)})] \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

offenbar in  $0 \leq t < \infty$  stetig. Wir werden die fastgleichmäßige Konvergenz in  $[0, \infty)$  der Funktionenfolge (7) beweisen, d. h. wir werden beweisen, daß die Folge (7) in jedem geschlossenen Intervall  $0 \leq t \leq T$  gleichmäßig konvergiert. Es folgt die gleichmäßige Stetigkeit aus der Stetigkeit von  $f(\lambda, t)$  im geschlossenen Gebiet  $D_T: \{\alpha \leq \lambda \leq \beta, 0 \leq t \leq T\}$ . Ist folglich ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es ein  $\delta > 0$  so, daß die Ungleichung

$$(8) \quad |f(\lambda', t) - f(\lambda'', t)| < \frac{\varepsilon}{V(\alpha, \beta)}$$

für jedes  $t \in [0, T]$  gilt, falls  $|\lambda' - \lambda''| < \delta$  ist, wo  $V(\alpha, \beta) = \text{tot. var. } \varphi(\lambda)$  d. h. die Totalvariation von  $\varphi(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  ist. (Man kann voraussetzen, daß  $\varphi(\lambda)$  nicht konstant ist, also  $V(\alpha, \beta) > 0$  ist.) Nach (3) können wir ein  $N > 0$  finden so, daß

$$(9) \quad |\lambda_i^{(n)} - \lambda_{i-1}^{(n)}| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gilt für  $n > N$ . Ist nun  $\lambda_{i-1}^{(n)} \leq \lambda \leq \lambda_i^{(n)}$ , so folgt wegen  $\lambda_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq \lambda_i^{(n)}$  aus (9)

$$|\xi_i^{(n)} - \lambda| \leq |\lambda_i^{(n)} - \lambda_{i-1}^{(n)}| < \delta.$$

Es gilt also nach (8)

$$(10) \quad |f(\xi_i^{(n)}, t) - f(\lambda, t)| < \frac{\varepsilon}{V(\alpha, \beta)} \quad (\lambda_{i-1}^{(n)} \leq \lambda \leq \lambda_i^{(n)})$$

für jedes  $t \in [0, T]$ .

Die Funktion  $F(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi$  ist für jedes  $t \geq 0$  erklärt, da  $f(\lambda, t)$  für jedes feste  $t$  in  $\lambda$  stetig ist, also das (gewöhnliche) Stieltjes-Integral von  $f$  bezüglich  $\varphi$  existiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_n(t) - F(t) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}, t) [\varphi(\lambda_i^{(n)}) - \varphi(\lambda_{i-1}^{(n)})] - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}, t) \int_{\lambda_{i-1}^{(n)}}^{\lambda_i^{(n)}} d\varphi(\lambda) - \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}^{(n)}}^{\lambda_i^{(n)}} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}^{(n)}}^{\lambda_i^{(n)}} [f(\xi_i^{(n)}, t) - f(\lambda, t)] d\varphi(\lambda). \end{aligned}$$

Ist nun  $n > N$ , so folgt aus (10) und aus bekannten Abschätzungen für das Stieltjes-Integral

$$\begin{aligned} |F_n(t) - F(t)| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{\lambda_{i-1}^{(n)}}^{\lambda_i^{(n)}} [f(\xi_i^{(n)}, t) - f(\lambda, t)] d\varphi(\lambda) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}^{(n)}}^{\lambda_i^{(n)}} |f(\xi_i^{(n)}, t) - f(\lambda, t)| dV(\alpha, \lambda) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{V(\alpha, \beta)} V(\lambda_{i-1}^{(n)}, \lambda_i^{(n)}) = \varepsilon, \\ &\quad (t \in [0, T]). \end{aligned}$$

Damit haben wir die fastgleichmäßige Konvergenz von  $F_n(t)$  bewiesen. Daraus folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion  $F(t)$ , da die Funktionen  $F_n(t)$  stetig sind. Wir haben also bewiesen, dass die Folge der Operatoren  $a_n$  gegen den Operator  $p^{-1}\{F(t)\}$  strebt. Der Operator

$$p^{-1}\{F(t)\} = p^{-1}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda)\right\}$$

hängt nicht von der Wahl des Operators  $p$  ab, denn — wie es in [2] bewiesen ist — hat eine Folge von Operatoren höchstens einen Grenzwert. Damit haben wir den Satz 1. bewiesen.

Man kann leicht die folgenden Sätze verifizieren:

**Satz 2.** Existieren die Integrale  $\int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda)$  und  $\int_{\alpha}^{\beta} f_2(\lambda) dg(\lambda)$  so existiert auch

das Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} [f_1(\lambda) + f_2(\lambda)] dg(\lambda)$  und es gilt

$$(11) \quad \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(\lambda) + f_2(\lambda)] dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda) + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(\lambda) dg(\lambda).$$

**Satz 3.** Wenn  $f(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  bezüglich  $g_1(\lambda)$  und  $g_2(\lambda)$  integrierbar ist, so ist in diesem Intervall  $f(\lambda)$  auch bezüglich  $g_1(\lambda) + g_2(\lambda)$  integrierbar, und es gilt

$$(12) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d[g_1(\lambda) + g_2(\lambda)] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg_1(\lambda) + \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg_2(\lambda).$$

**Satz 4.** Ist  $c$  ein beliebiger Operator, so gelten die Gleichungen

$$(13) \quad \int_{\alpha}^{\beta} cf(\lambda) dg(\lambda) = c \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda)$$

$$(14) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d[cg(\lambda)] = c \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda)$$

falls die Integrale existieren.

Diese Sätze kann man ebenso beweisen, wie man die entsprechenden Sätze für gewöhnliche Funktionen verifiziert.

Wir haben in [1] (Satz 8. S. 315) den Satz über die partielle Integration in einem speziellen Fall (unter anderem bei der Voraussetzung der Stetigkeit) bewiesen. Wir können hier diesen Satz ohne besonderen Bedingungen einfacher beweisen dank der allgemeineren Definition des Integrals.

**Satz 5.** Ist  $f(\lambda)$  integrierbar bezüglich  $g(\lambda)$ , so ist auch  $g(\lambda)$  integrierbar bezüglich  $f(\lambda)$ , und es gilt

$$(15) \quad \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) df(\lambda) = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda).$$

Den BEWEIS werden wir Wort für Wort wie im Klassischen führen. Es seien  $\lambda_i^{(n)}$  und  $\xi_i^{(n)}$  mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= g(\xi_1^{(n)})[f(\lambda_1^{(n)}) - f(\lambda_0^{(n)})] + g(\xi_2^{(n)})[f(\lambda_2^{(n)}) - f(\lambda_1^{(n)})] + \dots + g(\xi_n^{(n)})[f(\lambda_n^{(n)}) - f(\lambda_{n-1}^{(n)})] = \\ &= f(\lambda_n^{(n)})g(\xi_{n+1}^{(n)}) - f(\lambda_0^{(n)})g(\xi_0^{(n)}) - \sum_{i=0}^n f(\lambda_i^{(n)})[g(\xi_{i+1}^{(n)}) - g(\xi_i^{(n)})], \end{aligned}$$

wo  $\xi_0^{(n)} = \alpha$  und  $\xi_{n+1}^{(n)} = \beta$  ist. Da aus (1), (2), (3)  $\xi_i^{(n)} \leq \lambda_i^{(n)} \leq \xi_{i+1}^{(n)}$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, n} (\xi_{i+1}^{(n)} - \xi_i^{(n)}) = 0$  folgt, hat man nach der Voraussetzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\lambda_i^{(n)})[g(\xi_{i+1}^{(n)}) - g(\xi_i^{(n)})] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda).$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i^{(n)})[f(\lambda_i^{(n)}) - f(\lambda_{i-1}^{(n)})] &= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \\ &- \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) df(\lambda). \end{aligned}$$

**Satz 6.** Wenn die Operatorfunktion  $f(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig ist, dann existieren die Integrale  $\int_{\alpha}^{\beta} f d\varphi$ ,  $\int_{\alpha}^x f d\varphi$ ,  $\int_x^{\beta} f d\varphi$  ( $x \in [\alpha, \beta]$ ) und es gilt

$$(16) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\varphi(\lambda) = \int_{\alpha}^x f(\lambda) d\varphi(\lambda) + \int_x^{\beta} f(\lambda) d\varphi(\lambda),$$

wobei  $\varphi(\lambda)$  eine beliebige Zahlfunktion ist, die in  $[\alpha, \beta]$  eine beschränkte Schwankung hat.

BEWEIS. Da die Funktion  $f(\lambda)$  auch in  $[\alpha, x]$  und  $[x, \beta]$  stetig ist, und ebenso die Zahlfunktion  $\varphi(\lambda)$  auch in  $[\alpha, x]$  und  $[x, \beta]$  von beschränkter Schwankung ist, so folgt auf Grund von Satz 1.:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^x f(\lambda) d\varphi(\lambda) + \int_x^{\beta} f(\lambda) d\varphi(\lambda) &= p^{-1} \left\{ \int_{\alpha}^x f(\lambda, t) d\varphi(\lambda) + \int_x^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda) \right\} = \\ &= p^{-1} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t) d\varphi(\lambda) \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\varphi(\lambda). \end{aligned}$$

## § 2. Operatorfunktionen von beschränkter Schwankung

Wir haben in [1] den Begriff einer Operatorfunktion von beschränkter Schwankung erklärt. Wir werden hier diesen Begriff in Verbindung mit der allgemeineren Definition des Integrals noch weiter verallgemeinern.

**Definition 2.** Die Operatorfunktion  $g(\lambda)$  heißt eine Funktion von beschränkter Schwankung im Intervall  $[\alpha, \beta]$ , falls jede in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktion  $f(\lambda)$  bezüglich  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  integrierbar ist.

*Bemerkung.* Ist die Zahlfunktion  $\varphi(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  eine Funktion von beschränkter Schwankung in gewöhnlichem Sinne, so ist sie eine Funktion von beschränkter Schwankung auch im Sinne der Definition 2. Es ist nämlich nach Satz 1. jede in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktion bezüglich  $\varphi(\lambda)$  integrierbar.

**Satz 7.** Ist die Operatorfunktion  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig, und ist  $\varphi(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  eine Zahlfunktion von beschränkter Schwankung, so ist auch die Operatorfunktion

$$(1) \quad G(\lambda) = \int_{\alpha}^{\lambda} g(\mu) d\varphi(\mu)$$

eine Funktion von beschränkter Schwankung. Es gilt für jede in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktion  $f(\lambda)$  die Formel

$$(2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dG(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) g(\lambda) d\varphi(\lambda).$$

Wir bemerken, daß die Funktion  $G(\lambda)$  nach Satz 6. in  $[\alpha, \beta]$  definiert ist. Wir beweisen zuerst den folgenden

**Hilfssatz.** Es sei  $p \neq 0$  ein Operator, für den die Funktion  $pf(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$  in  $D: \{\alpha \leq \lambda \leq \beta, 0 \leq t < \infty\}$  stetig ist; es sei  $q \neq 0$  ein Operator für den die Funktion  $qg(\lambda) = \{g(\lambda, t)\}$  in  $D$  stetig ist; ferner sei  $\varphi(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  eine Zahlfunktion von beschränkter Schwankung. Ist ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es ein  $\delta > 0$  so, daß

$$(3) \quad \left| pq \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i) - f(\mu)] g(\mu) d\varphi(\mu) \right| \leq \varepsilon \frac{V(\lambda_{i-1}, \lambda_i)}{V(\alpha, \beta)}$$

ist, falls

$$(4) \quad 0 \leq \lambda_i - \lambda_{i-1} < \delta$$

und

$$(5) \quad \alpha \leq \lambda_{i-1} \leq \xi_i \leq \lambda_i \leq \beta$$

gelten, wobei  $V(\xi, \eta) = \text{tot. var. } \varphi(\mu)$  ist.  
 $\xi \leq \mu \leq \eta$

**BEWEIS DES HILFSSATZES.** Wir erhalten auf Grund von Satz 4. (oder Satz 1.)

$$(6) \quad \begin{aligned} \{A\} &= pq \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i) - f(\mu)] g(\mu) d\varphi(\mu) = \\ &= \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [pf(\xi_i) - pf(\mu)] qg(\mu) d\varphi(\mu) = \\ &= \left\{ \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i, t) - f(\mu, t)] * g(\mu, t) d\varphi(\mu) \right\}, \end{aligned}$$

wo  $*$  das Faltungsprodukt bezeichnet, also

$$[f(\xi_i, t) - f(\mu, t)] * g(\mu, t) = \int_0^t [f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)] g(\mu, t - \tau) d\tau$$

ist. Da die Funktion

$$F(\mu, \tau) = [f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)] g(\mu, t - \tau)$$

für jedes feste  $t > 0$  im Bereich  $D_t: \{\lambda_{i-1} \leq \mu \leq \lambda_i; 0 \leq \tau \leq t\}$  stetig ist, und  $\varphi(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$ , also auch in  $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$  eine Zahlfunktion von beschränkter Schwankung ist, so folgt nach dem Fubinischen Satz über die Vertauschung der Reihenfolge der Integration:

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} \int_0^t F(\mu, \tau) d\tau d\varphi(\mu) = \int_0^t \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} F(\mu, \tau) d\varphi(\mu) d\tau.$$

So erhalten wir aus (6)

$$(7) \quad A = \int_0^t \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)] g(\mu, t - \tau) d\varphi(\mu) d\tau.$$

Die stetige Funktion  $g(\mu, t - \tau)$  ist im geschlossenen Bereich  $D_t$  beschränkt, also gibt es ein  $K > 0$ , dass

$$(8) \quad |g(\mu, t - \tau)| \leq K$$

ist. Die stetige Funktion  $f(\mu, \tau)$  ist im geschlossenen Bereich  $D_t$  gleichmäßig stetig, d. h. zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  existiert eine Zahl  $\delta > 0$  derart, daß für jede Zahl  $\tau \in [0, t]$  die Ungleichung

$$(9) \quad |f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{tKV(\alpha, \beta)}$$

gilt, falls

$$(10) \quad |\xi_i - \mu| < \delta$$

ist. (Wir können hier annehmen, daß die Funktion  $\varphi(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  nicht konstant, also  $V(\alpha, \beta) > 0$  ist.) Erfüllt sich die Ungleichung (4) für dieses  $\delta$ , so erfüllt sich wegen (5) auch die Ungleichung (10), falls  $\lambda_{i-1} \leq \mu \leq \lambda_i$  ist. Gilt die Ungleichung (4), so gilt also auch die Ungleichung (9). So folgt also nach bekannten Abschätzungen aus der Theorie des Stieltjes-Integrals für jedes feste  $\tau \in [0, t]$  die Ungleichung

$$(11) \quad \left| \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)] g(\mu, t - \tau) d\varphi(\mu) \right| \leq \\ \leq \max_{\lambda_{i-1} \leq \mu \leq \lambda_i} |f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)| |g(\mu, t - \tau)| V(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \leq \frac{\varepsilon}{t} \frac{V(\lambda_{i-1}, \lambda_i)}{V(\alpha, \beta)}$$

Wir erhalten also aus (7) und (11) die Ungleichung

$$(12) \quad |A| \cong \int_0^t \left| \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i, \tau) - f(\mu, \tau)] g(\mu, t - \tau) d\varphi(\mu) \right| d\tau \cong \\ \cong \int_0^t \frac{\varepsilon}{t} \frac{V(\lambda_{i-1}, \lambda_i)}{V(\alpha, \beta)} d\tau = \varepsilon \frac{V(\lambda_{i-1}, \lambda_i)}{V(\alpha, \beta)}$$

Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

BEWEIS DES SATZES 7. Da  $f(\lambda)g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig ist, so existiert nach Satz 1. das Integral

$$a = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)g(\lambda)d\varphi(\lambda)$$

Wir werden zeigen, daß

$$a_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)})[G(\lambda_i^{(n)}) - G(\lambda_{i-1}^{(n)})] \rightarrow a$$

falls  $n \rightarrow \infty$ . Auf Grund von Satz 6. erhalten wir (die oberen Indizes schreiben wir der Kürze halber nicht aus)

$$a_n - a = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(\lambda_i) - G(\lambda_{i-1})] - \int_{\alpha}^{\beta} f(\mu)g(\mu)d\varphi(\mu) = \\ = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \left[ \int_{\alpha}^{\lambda_i} g(\mu)d\varphi(\mu) - \int_{\alpha}^{\lambda_{i-1}} g(\mu)d\varphi(\mu) \right] - \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} f(\mu)g(\mu)d\varphi(\mu) = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i) - f(\mu)]g(\mu)d\varphi(\mu).$$

Aus der Stetigkeit von  $f(\lambda)$  und  $g(\lambda)$  folgt die Existenz von Operatoren  $p \neq 0, q \neq 0$  so, daß die Funktionen  $pf(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$  und  $qg(\lambda) = \{g(\lambda, t)\}$  in  $D$  stetig sind. Es sei nun ein  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann wähle man ein  $\delta > 0$  so, dass (3) gelte, falls  $\lambda_i - \lambda_{i-1} < \delta$  ist. Wir können eine Zahl  $N$  finden mit der Eigenschaft, dass  $\lambda_i - \lambda_{i-1} < \delta$  für jedes  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt, falls  $n > N$  ist, da  $\max_{i=1, \dots, n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \rightarrow 0$  ist. So erhalten wir unter Anwendung des Hilfssatzes:

$$|pqa_n - pqa| \cong \sum_{i=1}^n \left| pq \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} [f(\xi_i) - f(\mu)]g(\mu)d\varphi(\mu) \right| \cong \\ \cong \sum_{i=1}^n \varepsilon \frac{V(\lambda_{i-1}, \lambda_i)}{V(\alpha, \beta)} = \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß die Folge der Operatoren  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert, w. z. b. w.



**Satz 8.** Wenn die Operatorfunktionen  $g_1(\lambda)$  und  $g_2(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  von beschränkter Schwankung sind, dann ist auch  $c_1 g_1(\lambda) + c_2 g_2(\lambda)$  eine Operatorfunktion von beschränkter Schwankung für beliebige Operatoren  $c_1$  und  $c_2$ .

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus den Sätzen 3. und 4. Aus diesen Sätzen und aus Definition 2. folgt nämlich die Existenz des Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^n f(\lambda) d[c_1 g_1(\lambda) + c_2 g_2(\lambda)]$$

für jede stetige Funktion  $f(\lambda)$  und daher die Richtigkeit des Satzes.

*Bemerkung.* Wir haben in [1] gesagt, daß die Operatorfunktion  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  von beschränkter Schwankung ist, falls sie sich in der Form

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\lambda} g_k(\lambda) d\varphi_k(\mu) + g(\alpha)$$

darstellen läßt, wo die Operatorfunktionen  $g_k$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig sind, und die Zahlfunktionen  $\varphi_k$  in  $[\alpha, \beta]$  von beschränkter Schwankung sind.

Aus den Sätzen 7. und 8. folgt, dass  $g(\lambda)$  auch im Sinne der Definition 2. eine Funktion von beschränkter Schwankung ist.

**Satz 9.** Ist die Operatorfunktion  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  von beschränkter Schwankung, so ist  $g(\lambda)$  auch in einem beliebigen Teilintervall von  $[\alpha, \beta]$  eine Operatorfunktion von beschränkter Schwankung. Ist ferner  $f(\lambda)$  eine beliebige in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktion, so gilt die Gleichung

$$(13) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\lambda) dg(\lambda) + \int_{\gamma}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda)$$

für willkürliches  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ .

BEWEIS. Die Funktionen

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{für } \alpha \leq \lambda \leq \gamma \\ f(\gamma) & \text{für } \gamma \leq \lambda \leq \beta \end{cases}$$

und

$$f_2(\lambda) = \begin{cases} f(\gamma) & \text{für } \alpha \leq \lambda \leq \gamma \\ f(\lambda) & \text{für } \gamma \leq \lambda \leq \beta \end{cases}$$

sind in  $[\alpha, \beta]$  stetig. Ist in der Tat  $p \neq 0$  ein Operator, für den die Funktion  $pf(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$  in  $D$  stetig ist, so ist auch die Funktion

$$pf_1(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda, t) & \text{für } \alpha \leq \lambda \leq \gamma \\ f(\gamma, t) & \text{für } \gamma \leq \lambda \leq \beta \end{cases}$$

in  $D$  stetig. Ähnlich beweist man die Stetigkeit von  $f_2(\lambda)$ . Dann existieren die Integrale  $\int_{\alpha}^{\beta} f_1 dg$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} f_2 dg$ . Folglich konvergiert die Summe

$$\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})]$$

gegen das Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda)$ . Diese Behauptung bleibt auch dann richtig, wenn man den Punkt  $\gamma$  bei jeder Einteilung des Intervalls  $[\alpha, \beta]$  als Teilungspunkt wählt. Wir können also annehmen, daß es zu jeder natürlichen Zahl  $n$  eine natürliche Zahl  $i_n \leq n$  gibt, für die  $\lambda_{i_n}^{(n)} = \gamma$  ist. Dann gilt (die oberen Indizes sind nicht ausgeschrieben)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{i_n} f_1(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] + \\ + \sum_{i=i_n+1}^n f_1(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{i_n} f_1(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] + f(\gamma)[g(\beta) - g(\gamma)] + \\ &\rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda) \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $f_1(\xi_i) = f(\xi_i)$  ist für  $i \leq i_n$ , so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i_n} f(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda) - f(\gamma)[g(\beta) - g(\gamma)].$$

Damit haben wir bewiesen, daß das Integral  $\int_{\alpha}^{\gamma} f(\lambda) dg(\lambda)$  existiert, und

$$(14) \quad \int_{\alpha}^{\gamma} f(\lambda) dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda) - f(\gamma)[g(\beta) - g(\gamma)]$$

ist.

Gleicherweise folgert man aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{i_n} f_2(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] + \\ + \sum_{i=i_n+1}^n f_2(\xi_i)[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})] &= f(\gamma)[g(\gamma) - g(\alpha)] + \sum_{k=1}^{\bar{n}} f_2(\bar{\xi}_k)[g(\bar{\lambda}_k) - g(\bar{\lambda}_{k-1})], \end{aligned}$$

wo  $\bar{\xi}_k = \xi_{i_n+k}$ ,  $\bar{\lambda}_k = \lambda_{i_n+k}$ ,  $\bar{n} = n - i_n$  sind, daß das Integral  $\int_{\gamma}^{\beta} f dg$  existiert, und

$$(15) \quad \int_{\gamma}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f_2(\lambda) dg(\lambda) - f(\gamma)[g(\gamma) - g(\alpha)]$$

gilt. Aus der Definition von  $f_1(\lambda)$  und  $f_2(\lambda)$  folgt  $f_1(\lambda) + f_2(\lambda) = f(\lambda) + f(\gamma)$ . Wir erhalten also aus (14) und (15)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\gamma} f(\lambda) dg(\lambda) + \int_{\gamma}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) &= \int_{\alpha}^{\beta} [f_1(\lambda) + f_2(\lambda)] dg(\lambda) - f(\gamma)[g(\beta) - g(\alpha)] = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [f(\lambda) + f(\gamma)] dg(\lambda) - f(\gamma)[g(\beta) - g(\alpha)] = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) + f(\gamma) \int_{\alpha}^{\beta} dg(\lambda) - f(\gamma)[g(\beta) - g(\alpha)] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda), \end{aligned}$$

da  $\int_{\alpha}^{\beta} dg(\lambda) = g(\beta) - g(\alpha)$  aus der Definition 1. sofort folgt. Damit haben wir die Gleichung (13) bewiesen.

Das Integral existiert für ein beliebiges Intervall  $[\alpha_1, \beta_1] \subseteq [\alpha, \beta]$ . Aus (14) folgt nämlich die Existenz des Integrals  $\int_{\alpha}^{\beta_1} f dg$  da  $\beta_1 \in [\alpha, \beta]$  ist. Aus (15) folgt die Existenz des Integrals  $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f dg$  wegen  $\alpha_1 \in [\alpha, \beta_1]$ . Damit haben wir den Satz 9 bewiesen.

**Satz 10.** Wenn für jede in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktion  $f(\lambda)$  die Gleichung

$$(16) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg_1(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg_2(\lambda)$$

gilt, wo  $g_1(\lambda)$  und  $g_2(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktionen sind, so unterscheiden sich  $g_1(\lambda)$  und  $g_2(\lambda)$  in einer Konstante, d. h. es gilt  $g_1(\lambda) - g_2(\lambda) = c$ .

BEWEIS. Aus (16) erhält man

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d[g_1(\lambda) - g_2(\lambda)] = 0.$$

Setzt man  $g(\lambda) = g_1(\lambda) - g_2(\lambda)$ , so ist die folgende Behauptung zu beweisen:

Gilt

$$(17) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dg(\lambda) = 0$$

für jede in  $[\alpha, \beta]$  stetige Operatorfunktion  $f(\lambda)$ , so ist  $g(\lambda) = c$  eine Konstante.

Wir werden die folgende Behauptung benützen:

Ist die Operatorfunktion  $g(\lambda)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig und von beschränkter Schwankung, so gilt die Formel:

$$(18) \quad \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) dg(\lambda) = \frac{g^2(\beta) - g^2(\alpha)}{2}$$

Das Integral (18) existiert, denn  $g(\lambda)$  ist einerseits stetig, andererseits von beschränkter Schwankung. Also ist die stetige Operatorfunktion  $g(\lambda)$  integrierbar bezüglich  $g(\lambda)$ . Dann gilt nach Satz 5.

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) dg(\lambda) = g(\beta)g(\beta) - g(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) dg(\lambda),$$

und daraus erhält man (18).

Die Formel (14) geht in unserem Fall (falls man  $\mu$  statt  $\gamma$  schreibt) in

$$\int_{\alpha}^{\mu} f(\lambda) dg(\lambda) = -f(\mu)[g(\beta) - g(\mu)]$$

über, da nach (17)  $\int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda) dg(\lambda) = 0$  ist. Setzt man  $f(\lambda) = g(\lambda)$ , so bekommt man

$$\int_{\alpha}^{\mu} g(\lambda) dg(\lambda) = -g(\mu)[g(\beta) - g(\mu)].$$

Wendet man die Formel (18) an, so erhält man die Gleichung

$$\frac{g^2(\mu) - g^2(\alpha)}{2} = -g(\mu)[g(\beta) - g(\mu)]$$

oder

$$(19) \quad g^2(\mu) - 2g(\mu)g(\beta) + g^2(\alpha) = 0.$$

Da wegen (17) und (18)  $g^2(\alpha) = g^2(\beta)$  ist, so geht (19) in

$$[g(\mu) - g(\beta)]^2 = 0$$

über. Also gilt  $g(\mu) = g(\beta)$  für jedes  $\mu \in [\alpha, \beta]$  d. h.  $g(\mu)$  ist konstant.

### Literatur

- [1] E. GESZTELYI, Über das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen, I. *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 307—322.  
 [2] J. MIKUSIŃSKI, *Operatorenrechnung*, Berlin, 1957.

(Eingegangen am 29. Dezember 1965.)