Шрейерово расширение квазигрупп

Ф. ФЕНЬВЕШ (Дебрецен)*)

§ 1. Введение

В настоящей работе решается проблема шрейерового расширения в случае любых квазигрупп. Работа присоединяется к исследованиям Альберта [2] о расширении луп. В дальнейшем увидим, что полученные результаты можно считать обобщением прежних результатов в этом направлении.

Ниже введём обозначения и понятия, а также основные факты, имеющие место относительно тех понятий, которыми будем пользоваться в работе.

Квазигруппа $(G, \cdot)$называется I-квазигруппой, если она обладает идемпотентом, т. е. таким элементом p, что $pp=p$. Квазигруппа с единицей называется лупой.

Из перестановок (взаимно однозначные отображения на себя) $(G, \cdot)$ самыми важными будут следующие: при любом $g(\in G)$ обозначим отображения $xL_g \overset{\text{def}}{=} g\cdot x$ и $xR_g \overset{\text{def}}{=} x\cdot g$ $(x\in G)$ через L_g и R_g. L_g^{-1} и R_g^{-1} означают обратные перевтановки к L_g и R_g. Значит, xL_g^{-1} и xR_g^{-1} означают соответственно элементы y и z из G, для которых выполняется соответственно $yL_g=x$ и $zR_g=x$. Для обозначения элементов xL_g^{-1} и xR_g^{-1} будем пользоваться также символами $g\backslash x$ и x/g.

Однозначное отображение φ квазигруппы $(\mathcal{G}, \cdot)$ на квазигруппу $(G, \circ)$ называем гомоморфизмом, если для любого элемента g, h $(\in\mathcal{G})$ выполняется $(g\cdot h)\varphi = g\varphi\circ h\varphi$. Ясно, что тогда также $(xL_y^{-1})\varphi = x\varphi L_{y\varphi}^{-1}$ и $(xR_y^{-1})\varphi = x\varphi R_{y\varphi}^{-1}$.

$(K, \circ)$ называется изотопом $(G, \cdot)$ (символически: $(G, \cdot)\simeq(K, \circ)$), если существуют такие взаимнооднозначные отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ квазигруппы $(G, \cdot)$ на квазигруппу $(K, \circ)$, что для всех $x, y(\in G)$ выполняется $x\varphi_1\circ y\varphi_2 = (x\cdot y)\varphi_3$. Если $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3$ тогда общее отображение называется изоморфизмом (символически: $(G, \cdot)\cong(K, \circ)$). Другим специальным случаем изотопизма является главный изотопизм, при котором $K=G$ и φ_3 является тождественным отображением.

Если некоторый главный изотоп $(G, \circ)$ квазигруппы $(G, \cdot)$ является I-квазигруппой, то $(G, \circ)$ называется главным I-изотопом.

---

*) F. Fenyves (Debrecen)

§ 2. Нормальные подквазигруппы

Пусть $(\mathscr{G}, \cdot)$ и $(G, \circ)$ — две квазигруппы и имеет место гомоморфизм $\varphi:(\mathscr{G}, \cdot)\to(G, \circ)$. Если $(G, \circ)$ имеет идемпотент p, то множество тех элементов g из $(\mathscr{G}, \cdot)$, для которых выполняется $g\varphi=p$, называется (одним) ядром гомоморфизма φ и обозначим через Γ_p. Если же $(G, \circ)$ не имеет идемпотентов, тогда говорим, что гомоморфизм φ не имеет ядра.

Теорема 1. *Пусть φ какое-либо гомоморфное отображение квазигруппы $(\mathscr{G}, \cdot)$ на I-квазигруппу $(G, \circ)$. Тогда (любое) ядро Γ_p гомоморфизма φ является такой подквазигруппой квазигруппы $(\mathscr{G}, \cdot)$, которая для произвольных элементов $x, y\in\mathscr{G}$ и любого фиксированного элемента h $(\in\Gamma_p)$ удовлетворяет следующим равенствам:*

$$(+)\begin{cases}(i) & xR_h^{-1}\cdot\Gamma_p=\Gamma_p\cdot xL_h^{-1},\\ (ii) & (\Gamma_p\cdot xL_h^{-1})y=\Gamma_p[(xy)L_h^{-1}],\\ (iii) & x(yR_h^{-1}\cdot\Gamma_p)=[(xy)R_h^{-1}]\Gamma_p.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $g_1, g_2\in\Gamma_p$. Тогда $(g_1 g_2)\varphi=(g_1\varphi)\circ(g_2\varphi)=$ $=p\circ p=p$, то-есть $g_1\cdot g_2\in\Gamma_p$. Пусть теперь $g_1\cdot x=g_2$. Тогда $(g_1\varphi)\circ(x\varphi)=$ $=g_2\varphi$, то-есть $p\circ(x\varphi)=p$, откуда $x\varphi=p$, значит $x\in\Gamma_p$. Точно так же $y\cdot g_1=$ $=g_2\Rightarrow y\in\Gamma_p$. Значит $(\Gamma_p,\cdot)$ является подквазигруппой в $(\mathscr{G}, \cdot)$.

Пусть h произвольный фиксированный элемент Γ_p.

Для доказательства равенства (i) сначала покажем, что $xR_h^{-1}\cdot\Gamma_p\subseteq\Gamma_p\cdot xL_h^{-1}$. Для произвольного элемента $xR_h^{-1}\cdot g$ $(\in xR_h^{-1}\cdot\Gamma_p)$ существует такой $y(\in\mathscr{G})$, что $xR_h^{-1}\cdot g=y\cdot xL_h^{-1}$. Отсюда $(xR_h^{-1}\varphi)\circ(g\varphi)=(y\varphi)\circ(xL_h^{-1}\varphi)$. Так как $g\varphi=p$, то имеет место $(x\varphi R_{h\varphi}^{-1})\circ p=(y\varphi)\circ(x\varphi L_{h\varphi}^{-1})\Rightarrow(x\varphi R_p^{-1})\circ p=(y\varphi)\circ$ $\circ(x\varphi L_p^{-1})$, то-есть $x\varphi=y\varphi\circ(x\varphi L_p^{-1})$, откуда $y\varphi=p$, тоесть $y\in\Gamma_p$. Точно так же получается, что $\Gamma_p\cdot xL_h^{-1}\subseteq xR_h^{-1}\cdot\Gamma_p$, значит $xR_h^{-1}\cdot\Gamma_p=\Gamma_p\cdot xL_h^{-1}$.

(ii) Для произвольного элемента $(g\cdot xL_h^{-1})y$ $(\in(\Gamma_p\cdot xL_h^{-1})y)$ существует такой z $(\in\mathscr{G})$, что выполняется $(g\cdot xL_h^{-1})y=z[(xy)L_h^{-1}]$. Отсюда, переходя к гомоморфному образу $(g\cdot xL_h^{-1})\varphi\circ y\varphi=z\varphi\circ[(xy)L_h^{-1}]\varphi$, $(g\varphi\circ x\varphi L_p^{-1})\circ y\varphi=$ $=z\varphi\circ[(xy)\varphi L_p^{-1}]$, $x\varphi\circ y\varphi=z\varphi\circ[(x\varphi\circ y\varphi)L_p^{-1}]\Rightarrow z\varphi=p$, то-есть $z\in\Gamma_p$. Значит $(\Gamma_p\cdot xL_h^{-1})y\subseteq\Gamma_p[(xy)L_h^{-1}]$. Точно так же можно показать, что $\Gamma_p[(xy)L_h^{-1}]\subseteq$ $\subseteq(\Gamma_p\cdot xL_h^{-1})y$, так действительно выполняется (ii).

(iii) Для произвольного элемента $x(yR_h^{-1}\cdot g)$ $(\in x(yR_h^{-1}\cdot\Gamma_p))$ существует такой t $(\in\mathscr{G})$, что $x(yR_h^{-1}\cdot g)=[(xy)R_h^{-1}]t$. Отсюда, пользуясь тем, что $h\varphi=$ $=g\varphi=p$, получается следующее: $x\varphi\circ(y\varphi R_p^{-1}\circ p)=[(xy)\varphi R_p^{-1}]\circ t\varphi$, $x\varphi\circ y\varphi=$ $=[(x\varphi\circ y\varphi)R_p^{-1}]t\varphi\Rightarrow t\varphi=p$, то-есть $t\in\Gamma_p$. Значит $x(yR_h^{-1}\Gamma_p)\subseteq(xy)R_h^{-1}\Gamma_p$. Точно так же получается, что $(xy)R_h^{-1}\Gamma_p\subseteq x(yR_h^{-1}\Gamma_p)$, то-есть выполняется (iii).

Подквазигруппа $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппы $(\mathscr{G}, \cdot)$ называется нормальной подквазигруппой, если удовлетворяет условию $(+)$.

Если $(\Gamma,\cdot)$ является нормальной подквазигруппой квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$, то множество $x'\Gamma\overset{\text{def}}{=}xR_h^{-1}\cdot\Gamma$ $(=\Gamma\cdot xL_h^{-1})$, $(x\in\mathscr{G}, h\in\Gamma)$ назовём смежным классом по Γ, порождённым x. Ясно, что все смежные классы по Γ дают разбиение $\mathscr{G}$ на непересекающиеся подмножества. Множество $\mathscr{G}/\Gamma$ смежных классов по Γ, которое является I-квазигруппой относительно операции

$$(x'\Gamma)\cdot(y'\Gamma) = (xy)'\Gamma$$

(напр. Γ идемпотент), называется факторквазигруппой квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$ по нормальной подквазигруппе $(\Gamma,\cdot)$. Имеет место теорема о гомоморфизмах квазигрупп.

Теорема 2. *Если $(\Gamma,\cdot)$ нормальная подквазигруппа квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$, тогда $x\to x'\Gamma$ $(x\in\mathscr{G})$ является (естественным) гомоморфизмом квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$ на I-квазигруппу $(\mathscr{G}/\Gamma,\cdot)$. Наоборот, если Γ является ядром гомоморфизма φ квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$ на квазигруппу $(G,\circ)$, тогда $x'\Gamma\to x\varphi$ $(x\in\mathscr{G})$ является изоморфным отображением фактоквазигруппы $(\mathscr{G}/\Gamma,\cdot)$ на $(G,\circ)$.*

Доказательство. Ясно, что отображение ψ, заданное равенством $x\psi\overset{\mathrm{def}}{=}x'\Gamma$ $(x\in\mathscr{G})$, является гомоморфным отображением квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$ на факторквазигруппу $(\mathscr{G}/\Gamma,\cdot)$.

С другой стороны, если I-квазигруппа $(G,\circ)$ является гомоморфным образом квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$ при отображении φ, и Γ — (одно) ядро отображения φ, то $(\mathscr{G}/\Gamma,\cdot)\cong(G,\circ)$, где изоморфизм определяется отображением $x'\Gamma\to x\varphi$ $(x\in\mathscr{G})$.

§ 3. Проблема расширения и её упрощение

Этот параграф содержит с одной стороны основные понятия теории расширений (как напр. расширение, шрейерово расширение, эквивалентное шрейерово расширение, шрейерово произведение), с другой стороны здесь докажем теорему 3., с помощью которой описание расширений можно свести к определению подходящих шрейеровых расширений.

Определение 1. Под расширением квазигруппы $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\circ)$ подразумеваем такую квазигруппу $(\mathscr{G},\cdot)$, для которой $(\Gamma,\cdot)$ является нормальной подквазигруппой и выполяется $(\mathscr{G},\cdot)/(\Gamma,\cdot)\simeq(G,\circ)$.

Определение 2. Если квазигруппа $(\Gamma,\cdot)$ является (одним) ядром некоторого гомоморфного отображения квазигруппы $(\mathscr{G},\cdot)$ на I-квазигруппу $(G,\cdot)$, тогда скажем, что $(\mathscr{G},\cdot)$ является шрейеровым расширением $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$.

Теорема 3. *Пусть $(\Gamma,\cdot)$ и $(G,\circ)$ две квазигруппы. Для того, чтобы квазигруппа $(\mathscr{G},\cdot)$ была расширением $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\circ)$, необходимо и достаточно, чтобы $(\mathscr{G},\cdot)$ была шрейеровым расширением $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$, где $(G,\cdot)$ является некоторым главным I-изотопом $(G,\circ)$.*

Доказательство. Пусть $(\mathscr{G},\cdot)$ расширение $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\circ)$. Тогда из выполнения изотопии $(\mathscr{G},\cdot)/(\Gamma,\cdot)\simeq(G,\circ)$ (так как любой изотоп квазигруппы изоморфен с некоторым главным изотопом квазигруппы) следует изоморфизм $(\mathscr{G},\cdot)/(\Gamma,\cdot)\cong(G,\cdot)$, где $(G,\cdot)$ вполне определённый I-изотоп квазигруппы $(G,\circ)$. На основании этого изоморфизма и теоремы о гомоморфизмах квазигрупп уже видно, что $(\mathcal{G}, \cdot)$ является шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$.

Наоборот, пусть $(G, \cdot)$ некоторый главный I-изотоп квазигруппы $(G, \circ)$ и пусть $(\mathcal{G}, \cdot)$ является шрейеровым расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$. Тогда $(\Gamma, \cdot)$ является (одним) ядром гомоморфизма $(\mathcal{G}, \cdot) \to (G, \cdot)$, и так по теореме о гомоморфизмах $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \cong (G, \cdot)$, откуда на основании изотопии $(G, \cdot) \simeq (G, \circ)$ получается $(\mathcal{G}, \cdot)/(\Gamma, \cdot) \simeq (G, \circ)$. Значит $(\mathcal{G}, \cdot)$ является расширением $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$.

Замечание. На основании теоремы 3. ясно, что расширения $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \circ)$ ни что иное, как шрейеровые расширения $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$, где $(G, \cdot)$ пробегает все главные I-изотопы квазигруппы $(G, \circ)$.

Значит на основании этого замечания в дальнейших исследованиях достаточно ограничиваться только нахождением шрейеровых расширений квазигруппы I-квазигруппой.

Определение 3. Пусть квазигруппа $(\mathcal{G}, \cdot)$ и $(\mathcal{H}, \circ)$ — шрейеровые расширения квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ I-квазигруппой $(G, \cdot)$. Мы скажем, что эти два расширения эквивалентны между собой, если существует изоморфное отображение $(\mathcal{G}, \cdot)$ на $(\mathcal{H}, \circ)$, которое тождественно на Γ и индуцирует также тождественное отображение G.

Определение 4. Пусть $(G, \cdot)$ и $(\Gamma, \cdot)$ — группоиды. Пусть задана для каждой пары элементов $a, b \in G$ одна (бинарная) операция $\underset{a,b}{\square}$ на Γ. Множество всех упорядоченных пар $\langle a, \alpha\rangle$ $(a \in G, \alpha \in \Gamma)$, где $\langle a, \alpha\rangle = \langle b, \beta\rangle$ тогда и только тогда, если $a = b$ и $\alpha = \beta$, является группоидом относительно операции

$$\langle a, \alpha\rangle \square \langle b, \beta\rangle = \langle ab, \alpha \underset{a,b}{\square} \beta\rangle$$

и называется (одним) шрейеровым произведением $(G, \cdot)$ и $(\Gamma, \cdot)$, и обозначим через $G \square \Gamma$.

Определение 5. Шрейерово произведение $G \square \Gamma$ I-квазигруппы $(G, \cdot)$ и квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ называется шрейеровым произведением с К-свойством, если выполняются следующие условия:

(1) Γ квазигруппа относительно всех операций $\underset{a,b}{\square}$, встречающихся в определении $G \square \Gamma$,

(2) для некоторого идемпотента p из $(G, \cdot)$ существует такой элемент $\lambda \in \Gamma$, что для всех элементов $\alpha, \beta \in \Gamma$ выполняется

$$\lambda \backslash (\alpha\beta) = \lambda \backslash \alpha \underset{p,p}{\square} \lambda \backslash \beta.$$

Если в дальнейшем будем говорить о шрейеровом произведении $G \square \Gamma$ с К-свойством, то всегда предполагаем, что p и λ из условия (2) вполне определённые фиксированные элемента G и Γ соответственно.

§ 4. Описание шрейеровых расширений

В этом параграфе докажем, что шрейеровые произведения $G\square\Gamma$ с К-свойством исчерпывают все шрейеровые расширения $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$, где расширения сами являются квазигруппами. Естественно, для того, чтобы шрейеровые произведения можно было считать шрейеровым расширением, понадобится одно отображение вложения, то-есть одно подходящее гомоморфное отображение. Наша теорема формулируется так:

Теорема 4. *Пусть $(G,\cdot)$ I-квазигруппа и $(\Gamma,\cdot)$ произвольная квазигруппа. Тогда шрейерово произведение $G\square\Gamma$ с К-свойством является (одним) шрейеровым расширением $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$, по вложению $\alpha\to\langle p,\lambda\backslash\alpha\rangle$ квазигруппы $(\Gamma,\cdot)$ в $G\square\Gamma$ и гомоморфизму $\langle a,\alpha\rangle\to a$ квазигруппы $G\square\Gamma$ на $(G,\cdot)$. Любое шрейерово расширение $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$ эквивалентно с шрейеровым расширением, полученным из некоторого шрейерового произведения $G\square\Gamma$ с К-свойством.*

Доказателсьтво. Рассмотрим уравнение вида $\langle a,\alpha\rangle\square\langle x,\xi\rangle=\langle b,\beta\rangle$. Пусть x является решением уравнения $ax=b$ и пусть ξ — решение уравнения $\alpha\underset{a,x}{\square}\xi=\beta$. Тогда для этих x и ξ выполняетя

$$\langle a,\alpha\rangle\square\langle x,\xi\rangle=\langle ax,\alpha\underset{a,x}{\square}\xi\rangle=\langle b,\beta\rangle,$$

то-есть рассматриваемое уравнение разрешимо в $G\square\Gamma$. Ясно, что это уравнение имеет единственное решение в $G\square\Gamma$. Действительно, если

$$\langle a,\alpha\rangle\square\langle x_1,\xi_1\rangle=\langle b,\beta\rangle$$

и

$$\langle a,\alpha\rangle\square\langle x_2,\xi_2\rangle=\langle b,\beta\rangle,$$

тогда имеет место

$$ax_1=b;\quad ax_2=b$$

и

$$\alpha\underset{a,x_1}{\square}\xi_1=\beta;\quad \alpha\underset{a,x_2}{\square}\xi_2=\beta,$$

откуда следует $x_1=x_2$ и $\xi_1=\xi_2$. Точно так же можно доказать, что любое уравнение вида

$$\langle y,\eta\rangle\square\langle a,\alpha\rangle=\langle b,\beta\rangle$$

имеет в $G\square\Gamma$ одно и только одно решение. Значит $G\square\Gamma$ действительно является квазигруппой.

Очевидно, $\alpha\to\langle p,\lambda\backslash\alpha\rangle$ является изоморфным отображением квазигруппы $(\Gamma,\cdot)$ на шерейерово произведение $G\square\Gamma$ с К-свойством, и $\langle a,\alpha\rangle\to a$ является гомоморфным отображением $G\square\Gamma$ на $(G,\cdot)$, далее элементам вида $\langle p,\alpha\rangle$ и только им соответствует идемпотент p I-квазигруппы $(G,\cdot)$. Значит, $G\square\Gamma$ является одним шрейеровым расширением $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$.

Пусть теперь дано одно шрейерово расширение $(\mathscr{G},\cdot)$ квазигруппы $(\Gamma,\cdot)$ I-квазигруппой $(G,\cdot)$. Докажем, что это расширение эквивалентно с шрейеровым расширением, полученным из некоторого шрейерового произведения $G\square\Gamma$ с К-свойством.

Для любого элемента $a \in G$ рассмотрим такой элемент $g_a \in \mathscr{G}$, образом которого при гомоморфизме $(\mathscr{G}, \cdot) \to (G, \cdot)$ является a (образ элемента $g \in \mathscr{G}$ в G обозначим через g'). Пусть далее p означает образ $(\Gamma, \cdot)$.

Операции $\underset{a,b}{\square}$ $(a, b \in G)$, необходимые для образования шрейерового произведения $G \square \Gamma$ с К-свойством, определяем следующим соотношением:

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}(\alpha \underset{a,b}{\square} \beta), \qquad (\alpha, \beta \in \Gamma).$$

Ясно, что $\alpha \underset{a,b}{\square} \beta \in \Gamma$, потому что из-за $ab = (g_{a/p}\alpha)'(g_{b/p}\beta)' = [(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta)]' = [g_{(ab)/p}(\alpha \underset{a,b}{\square} \beta)]' = (g_{(ab)/p})'(\alpha \underset{a,b}{\square} \beta)' = [(ab)/p]\,(\alpha \underset{a,b}{\square} \beta)'$ имеет место $(\alpha \underset{a,b}{\square} \beta)' = p$. Покажем, что так получим шрейерого произведение $G \square \Gamma$ с К-свойством. Прежде всего убедимся, что Γ является квазигруппой относительно любой операции $\underset{a,b}{\square}$. Действительно, для любого γ и α имеет решение $\gamma = \alpha \underset{a,b}{\square} \beta$ относительно β в Γ. Пусть g — решение уравнения $(g_{a/p}\alpha)g = g_{(ab)/p}\gamma$ и пусть β — решение уравнения $g_{b/p}\beta = g$. Тогда $\beta \in \Gamma$, потому что из-за $(g_{a/p}\alpha)g = g_{(ab)/p}\gamma$, переходя к гомоморфному образу по $ag' = ab$, имеет место $g' = b$, так $\beta \in \Gamma$. Далее $(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}\gamma$, то-есть $\gamma = \alpha \underset{a,b}{\square} \beta$. $\gamma = \alpha \underset{a,b}{\square} \beta$ имеет единственное решение относительно β, для этого нужно показать, что существует только один такой элемент β, для которого

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}\gamma.$$

Предположим, что такому условию удовлетворяют β_1 и β_2. Тогда

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta_1) = g_{(ab)/p}\gamma$$

и

$$(g_{a/p}\alpha)(g_{b/p}\beta_2) = g_{(ab)/p}\gamma,$$

так $g_{b/p}\beta_1 = g_{b/p}\beta_2$, то-есть $\beta_1 = \beta_2$. Точно так же можно показать, что операция $\underset{a,b}{\square}$ обратима также и слева. Теперь убедимся, что при удобном λ $(\in \Gamma)$ и для всех элементов $\alpha, \beta \in \Gamma$ выполняется

$$\lambda \backslash (\alpha\beta) = (\lambda \backslash \alpha) \underset{p,p}{\square} (\lambda \backslash \beta).$$

Действительно, в качество λ можно выбрать g_p, так как из-за $\alpha\beta = [g_p(g_p \backslash \alpha)][g_p(g_p \backslash \beta)] = g_p[(g_p \backslash \alpha) \underset{p,p}{\square} (g_p \backslash \beta)]$ будет $g_p \backslash (\alpha\beta) = (g_p \backslash \alpha) \underset{p,p}{\square} (g_p \backslash \beta)$.

Теперь элементу $g_{a/p}\alpha$, $(\alpha \in \Gamma)$ поставим в соответствие пару $\langle a, \alpha \rangle$. Покажем, что сопоставление $g_{a/p}\alpha \to \langle a, \alpha \rangle$ является изоморфным отображением $(\mathscr{G}, \cdot)$ на $G \square \Gamma$. Ясно, что каждый элемент из $\mathscr{G}$ имеет образ, ибо если $g \in \mathscr{G}$ и $g' = a$, то элемент α из соотношения $g = g_{a/p}\alpha$ является элементом Γ (так как из-за $g' = (g_{a/p}\alpha)' = g'_{a/p}\alpha'$ будет $\alpha' = p$), так $g \to \langle a, \alpha \rangle$. Далее, если образом g $(\in \mathscr{G})$ является $\langle a_i, \alpha_i \rangle$ $(i = 1, 2)$, тогда $g' = a_1$ и $g' = a_2$, так $a_1 = a_2$, поэтому из соотношения $g_{a_1/p}\alpha_1 = g_{a_2/p}\alpha_2$ следует $\alpha_1 = \alpha_2$, значит рассматриваемое отображение однозначо. Очевидно, любая пара $\langle a, \alpha \rangle$ является образом одного и только одного элемента из $\mathscr{G}$ (именно $g_{a/p}\alpha$). Так же легко убедиться, рассматриваемое отображение сохраняет операцию, так как если $g \to \langle a, \alpha \rangle$ и $h \to \langle b, \beta \rangle$, тогда $g = g_{a/p}\alpha$ и $h = g_{b/p}\beta$ $(g' = a,\ h' = b)$, так $gh = (g_{a/p}\alpha)(b_{b/p}\beta) = g_{(ab)/p}\alpha \underset{a,b}{\square} \beta)) \to \langle ab, \alpha \underset{a,b}{\square} \beta \rangle = \langle a, \alpha \rangle \square \langle b, \beta \rangle$.

Наконец покажем, что изоморфизм $g \to \langle a, \alpha \rangle$ является эквивалентностью. С одной стороны изоморфизм $(\mathscr{G}, \cdot) \to G \square \Gamma$ идентичен на Γ, ибо после вложения $\alpha \to \langle p, \lambda \backslash \alpha \rangle$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ в $G \square \Gamma$ заменим α парой $\langle p, \lambda \backslash \alpha \rangle$, и $\langle p, \lambda \backslash \alpha \rangle$ при изоморфизме $(\mathscr{G}, \cdot) \to G \square \Gamma$ является образом α (так как тогда $\alpha = g_p(g_p \backslash \alpha) \to \langle p, g_p \backslash \alpha \rangle$). С другой стороны, изоморфизм $(\mathscr{G}, \cdot) \to G \square \Gamma$ индуцирует тождественное отображение также для G, так как при гомоморфизме $(\mathscr{G}, \cdot) \to (G, \cdot)$ элементу $g = g_{a/p}\alpha$ соответствует a и элементу g, сопоставленному при изоморфизме $(\mathscr{G}, \cdot) \to G \square \Gamma$ элементу $\langle a, \alpha \rangle$, при гомоморфизме $G \square \Gamma \to$ $\to (G, \cdot)$ соответствует также a.

Этим теорема 4. доказана.

Для того, чтобы шрейерово расширение $G \square \Gamma$ квазигруппы $(\Gamma, \cdot)$ квазигруппой $(G, \cdot)$ обладало единицей, необходимо, чтобы $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \cdot)$ также обладали единицей, то есть были лупами.

Определение 6. Шрейерово произведение $G \square \Gamma$ с К-свойством лупы $(G, \cdot)$ и лупы $(\Gamma, \cdot)$ (единицы обозначим соответственно через e и ε) назовём обладающим L-свойством, если элемент $\eta \overset{\text{def}}{=} \lambda \backslash \varepsilon$ при любом $a \,(\in G)$ относительно операций $\underset{e,a}{\square}$ является левой, а относительно операций $\underset{a,e}{\square}$ является правой единицей.

Теорема 5. *Пусть $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \cdot)$ — лупы. Любое шрейерово расширение в лупу лупы $(\Gamma, \cdot)$ лупой $(G, \cdot)$ эквивалентно с шрейеровым расширением, полученным из некоторого шрейерового произведения с L-свойством.* (Альберт [2], Theorem 6.)

Доказательство. По теореме 4 достаточно показать, что некоторое шрейеровое расширение $G \square \Gamma$ лупы $(\Gamma, \cdot)$ лупой $(G, \cdot)$ является лупой тогда и только тогда, если $G \square \Gamma$ с L-свойством.

Пусть $G \square \Gamma$ — лупа и обозначим единицу через $\langle e, \eta \rangle$. Тогда для любого элемента $\langle a, \alpha \rangle$ $(\in G \square \Gamma)$ выполняется

$$\langle e, \eta \rangle \square \langle a, \alpha \rangle = \langle ea, \eta \underset{e,a}{\square} \alpha \rangle = \langle a, \alpha \rangle$$

и

$$\langle a, \alpha \rangle \square \langle e, \eta \rangle = \langle ae, \alpha \underset{a,e}{\square} \eta \rangle = \langle a, \alpha \rangle.$$

Откуда следует с одной стороны $ea = ae = a$, с другой стороны $\eta \underset{e,a}{\square} \alpha = \alpha =$ $= \alpha \underset{a,e}{\square} \eta$. Значит e точно единица лупы $(G, \cdot)$ (и так её единственный идемпотент). η является левой единицей квазигруппы $(\Gamma, \underset{e,a}{\square})$, правой единицей квазигруппы $(\Gamma, \underset{a,e}{\square})$, в специальном случае η единица для $(\Gamma, \underset{e,e}{\square})$. Значит по (2) $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \lambda\eta$ является точно единицей $(\Gamma, \cdot)$.

Наоборот, если некоторое шрейерово произведение с К-свойством луп $(\Gamma, \cdot)$ и $(G, \cdot)$ (единица соответственно ε и e) такое, что элемент $\eta = \lambda \backslash \varepsilon$ является левой единицей относительно операций $\underset{e,a}{\square}$, правой единицей относительно операций $\underset{a,e}{\square}$ $(a \in G)$, то $G \square \Gamma$ является лупой и её единица точно $\langle e, \eta \rangle$. Теорема доказана.

§ 5. Критерий эквивалентности

По теореме 4 удалось поставить в соответствие каждому шрейеровому расширению хотя бы одно шрейерово произведение с К-свойством, с которым шрейеровое расширение эквивалентно. (Потому хотя бы одно, что выбор представителей g_a при доказательстве теоремы 4 был произвольным.) Но связь между шрейеровыми расширениями и шрейеровыми произведениями с К-свойством можем сделать взаимно однозначой тем, что, с одной стороны, эквивалентные шрейеровые расширения не будем считать различными, а с другой стороны, между шрейеровыми произведениями с К-свойством установим такое разбиение на классы, при котором те шрейеровые произведения с К-свойством попадают в один класс, которые соответствуют эквивалентным шрейеровым расширениям. Значит, речь идёт о том, чтобы установить необходимое условие того, чтобы два шрейеровых произведения с К-свойством были эквивалентны как шрейеровые расширения. Следующая теорема полностью решает поставленную задачу:

Теорема 6. *Пусть $(G,\cdot)$ — I-квазигруппа, а $(\Gamma,\cdot)$ — произвольная квазигруппа. Рассмотрим шрейеровое произведение с К-свойством $G\boxed{i}\Gamma$, соответствующее идемпотенту p из $(G,\cdot)$, как шрейеровое расширение $(\Gamma,\cdot)$ квазигруппой $(G,\cdot)$, полученное при вложении $\alpha\to\langle p,\lambda_i\backslash\alpha\rangle$ квазигруппы $(\Gamma,\cdot)$ в $G\boxed{i}\Gamma$ и при гомоморфизме $\langle a,\alpha\rangle\to a$ $G\boxed{i}\Gamma$ на $(G,\cdot)$ $(i=1,2)$. Тогда необходимое и достаточное условие эквивалентности шрейеровых расширений $G\boxed{1}\Gamma$ и $G\boxed{2}\Gamma$ существование таких отображений $a\to\gamma_1^a$ и $a\to\gamma_2^a$ G в Γ, для которых при перестановке $\Pi:\xi\to\xi\Pi\overset{\text{def}}{=}\lambda_1\backslash(\lambda_2\xi)$, $(\xi\in\Gamma)$ имеют место следующие условия:*

1. *Для операций $\underset{a,b}{\textcircled{i}}$ $(i=1,2)$, определённых соотношениями*

$$\gamma_i^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,\,p}{\boxed{i}}(\alpha\underset{a,b}{\textcircled{i}}\beta)=(\gamma_i^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{i}}\alpha)\underset{a,b}{\boxed{i}}(\gamma_i^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{i}}\beta),$$

выполняется

$$\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi=(\alpha\underset{a,b}{\textcircled{2}}\beta)\Pi,$$

2.
$$\gamma_1^p=\gamma_2^p\Pi.$$

Дополнение. *Если хотя бы для одного отображения $a\to\gamma_1^a$ существует такое отображение $a\to\gamma_2^a$, которое удовлетворяет условиям теоремы, тогда для каждого отображения $a\to\gamma_1^a$ существует такое отображение $a\to\gamma_2^a$, которое удовлетворяет условиям теоремы.*

Доказательство. I. Пусть отображение $\mathscr{E}$ устанавливает эквивалентность $G\boxed{1}\Gamma\cong G\boxed{2}\Gamma$. Пусть $a\to\gamma_1^a$ одно произвольное отображение G в Γ, и пусть γ_2^a является второй компонентой элемента $\langle a,\gamma_1^a\rangle\mathscr{E}$. Докажем, что функции γ_1^a и γ_2^a удовлетворяют условиям теоремы. Для этого сначала отметим, что первая компонента $\langle a,\alpha\rangle\mathscr{E}$ совпадает с a, потому что $\mathscr{E}$ на G индуцирует тождественное отображение. С другой стороны, $\langle p,\lambda_1\backslash\alpha\rangle\mathscr{E}=\langle p,\lambda_2\backslash\alpha\rangle$ потому что $\mathscr{E}$ тождественное отображение на Γ. Если подставить $\lambda_1\alpha$ вместо α, то равенство имеет вид

$$\langle p,\alpha\rangle\mathscr{E}=\langle p,\lambda_2\backslash(\lambda_1\alpha)\rangle\overset{\text{def}}{=}\langle p,\alpha\Pi^{-1}\rangle,$$

с помощью этих двух замечаний и принимая во внимание решения ξ уравнения $\gamma_1^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{1}}\xi=\alpha$, получим соотношение

$$\langle a,\alpha\rangle\mathscr{E}=\langle a,\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{2}}\xi\Pi^{-1}\rangle$$

следующим образом:

$$\langle a,\alpha\rangle\mathscr{E}=(\langle a/p,\gamma_1^{a/p}\rangle\boxed{1}\langle p,\xi\rangle)\mathscr{E}=\langle a/p,\gamma_1^{a/p}\rangle\mathscr{E}\boxed{2}\langle p,\xi\rangle\mathscr{E}=$$
$$=\langle a/p,\gamma_2^{a/p}\rangle\boxed{2}\langle p,\xi\Pi^{-1}\rangle=\langle a,\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{2}}\xi\Pi^{-1}\rangle.$$

Используя только что доказанную формулу, с помощью операции $\underset{a,b}{\textcircled{1}}$, определённой соотношением

$$\gamma_1^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,\,p}{\boxed{1}}(\alpha\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta)=(\gamma_1^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{1}}\alpha)\underset{a,b}{\boxed{1}}(\gamma_1^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{1}}\beta),$$

на основании того, что $\mathscr{E}$ сохраняет операцию, получим:

$$\langle ab,\gamma_2^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,\,p}{\boxed{2}}(\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi)\Pi^{-1}\rangle=\langle ab,\gamma_1^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,\,p}{\boxed{1}}(\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi)\rangle\mathscr{E}=$$
$$=\langle ab,(\gamma_1^{a/b}\underset{a/p,\,p}{\boxed{1}}\alpha\Pi)\underset{a,b}{\boxed{1}}(\gamma_1^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{1}}\beta\Pi)\rangle\mathscr{E}=(\langle a,\gamma_1^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{1}}\alpha\Pi\rangle\boxed{1}\langle b,\gamma_1^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{1}}\beta\Pi\rangle)\mathscr{E}=$$
$$=\langle a,\gamma_1^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{1}}\alpha\Pi\rangle\mathscr{E}\boxed{2}\langle b,\gamma_1^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{1}}\beta\Pi\rangle\mathscr{E}=\langle a,\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{2}}\alpha\rangle\boxed{2}\langle b,\gamma_2^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{2}}\beta\rangle=$$
$$=\langle ab,(\gamma_2^{a/b}\underset{a/p,\,p}{\boxed{2}}\alpha)\underset{a,b}{\boxed{2}}(\gamma_2^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{2}}\beta)\rangle,$$

то-есть

$$\gamma_2^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,\,p}{\boxed{2}}(\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi)\Pi^{-1}=(\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{2}}\alpha)\underset{a,b}{\boxed{2}}(\gamma_2^{b/p}\underset{b/p,\,p}{\boxed{2}}\beta).$$

Это показавает, что относительно операции $\underset{a,b}{\textcircled{2}}$, определённой соотношением

$$\gamma_2^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,\,p}{\boxed{2}}(\alpha\underset{a,b}{\textcircled{2}}\beta)=(\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,\,p}{\boxed{2}}\alpha)\underset{a,b}{\boxed{2}}(\gamma_2^{b/p}\underset{b/p,p}{\boxed{2}}\beta),$$

имеет место

$$\alpha\underset{a,b}{\textcircled{2}}\beta=(\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi)\Pi^{-1},$$

то-есть

$$(\alpha\underset{a,b}{\textcircled{2}}\beta)\Pi=\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi.$$

Значит, для перестановки $\xi\to\xi\Pi=\lambda_1\backslash(\lambda_2\xi)$ выполняется

$$\alpha\Pi\underset{a,b}{\textcircled{1}}\beta\Pi=(\alpha\underset{a,b}{\textcircled{2}}\beta)\Pi.$$

Наконец, по уже раньше доказанной формуле $\langle p,\alpha\rangle\mathscr{E}=\langle p,\lambda_2\backslash(\lambda_1\alpha)\rangle$ и по определению γ_2^p ясно, что $\gamma_2^p=\lambda_2\backslash(\lambda_1\gamma_1^p)$, то-есть $\gamma_1^p=\gamma_2^p\Pi$.

II. Пусть $a\to\gamma_1^\alpha$ и $a\to\gamma_2^\alpha$ — два таких отображения G в Γ, которые удовлетворяют условиям теоремы. Определим отображение $\langle a,\alpha\rangle\to\langle a,\alpha\rangle\mathscr{E}$ следующим соотношением:

$$\langle a,\alpha\rangle\mathscr{E}=\langle a,\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,p}{\boxed{2}}\xi\Pi^{-1}\rangle,$$

где $\xi\Pi^{-1}=\lambda_2\backslash(\lambda_1\xi)$ и ξ является решением уравнения $\gamma_1^{a/p}\underset{a/p,p}{\boxed{1}}\xi=\alpha$. Докажем, что $\mathscr{E}$ является изоморфным отображением $G\boxed{1}\Gamma$ на $G\boxed{2}\Gamma$, а также покажем что $\mathscr{E}$ индуцирует на G тождественное отображение и на Γ является тождественным отображением. Ясно, что $\mathscr{E}$ однозначное отображение $G\boxed{1}\Gamma$ в $G\boxed{2}\Gamma$, далее любой элемент $\langle a,\alpha\rangle$ из $G\boxed{2}\Gamma$ является образом одного и только одного элемента из $G\boxed{1}\Gamma$ (именно образ того элемента $\langle a,\delta\rangle$, у которого вторая компонента $\delta=\gamma_1^{a/p}\underset{a/p,p}{\boxed{1}}\xi$, где ξ — решение уравнения $\alpha=\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,p}{\boxed{2}}\lambda_2\backslash(\lambda_1\xi)$). $\mathscr{E}$ сохраняет операцию, так как используя решения ϱ, σ и ν уравнений $\gamma_1^{a/p}\underset{b/p,p}{\boxed{1}}\varrho=\alpha$, $\gamma_1^{b/p}\underset{b/p,p}{\boxed{1}}\sigma=\beta$ и $\gamma_1^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,p}{\boxed{1}}\nu=\alpha\underset{a,b}{\boxed{1}}\beta$,

$$(\langle a,\alpha\rangle\mathscr{E})\boxed{2}(\langle b,\beta\rangle\mathscr{E})=\langle a,\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,p}{\boxed{2}}\varrho\Pi^{-1}\rangle\boxed{2}\langle b,\gamma_2^{b/p}\underset{b/p,p}{\boxed{2}}\sigma\Pi^{-1}\rangle=$$
$$=\langle ab,(\gamma_2^{a/p}\underset{a/p,p}{\boxed{2}}\varrho\Pi^{-1})\underset{a,b}{\boxed{2}}(\gamma_2^{b/p}\underset{b/p,p}{\boxed{2}}\sigma\Pi^{-1})\rangle=$$
$$=\langle ab,\gamma_2^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,p}{\boxed{2}}(\varrho\Pi^{-1}\underset{a,b}{\textcircled{2}}\sigma\Pi^{-1})\rangle=$$
$$=\langle ab,\gamma_2^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,p}{\boxed{2}}(\varrho\underset{a,b}{\textcircled{1}}\sigma)\Pi^{-1}\rangle=\langle ab,\gamma_1^{(ab)/p}\underset{(ab)/p,p}{\boxed{1}}(\varrho\underset{a,b}{\textcircled{1}}\sigma)\rangle\mathscr{E}=$$
$$=\langle ab,(\gamma_1^{a/b}\underset{a/p,p}{\boxed{1}}\varrho)\underset{a,b}{\boxed{1}}(\gamma_1^{b/p}\underset{b/p,p}{\boxed{1}}\sigma)\rangle\mathscr{E}=\langle ab,\alpha\underset{a,b}{\boxed{1}}\beta\rangle\mathscr{E}=$$
$$=(\langle a,\alpha\rangle\boxed{1}\langle b,\beta\rangle)\mathscr{E}.$$

Очевидно, $\mathscr{E}$ на G индуцирует тождественное отображение. С другой стороны, $\mathscr{E}$ на Γ является тождественным отображением, ибо, используя решение ξ уравнения $\gamma_1^p\underset{p,p}{\boxed{1}}\xi=\lambda_1\backslash\alpha$ из-за $\gamma_2^p\Pi=\gamma_1^p$,

$$\langle p,\lambda_1\backslash\alpha\rangle\mathscr{E}=\langle p,\gamma_2^p\underset{p,p}{\boxed{2}}\xi\Pi^{-1}\rangle=\langle p,\gamma_1^p\Pi^{-1}\underset{p,p}{\boxed{2}}\xi\Pi^{-1}\rangle=$$
$$=\langle p,[\lambda_2\backslash(\lambda_1\gamma_1^p)]\underset{p,p}{\boxed{2}}[\lambda_2\backslash(\lambda_1\xi)]\rangle=\langle p,\lambda_2\backslash[(\lambda_1\gamma_1^p)(\lambda_1\xi)]\rangle=$$
$$=\langle p,\lambda_2\backslash[\lambda_1(\gamma_1^p\underset{p,p}{\boxed{1}}\xi)]\rangle=\langle p,\lambda_2\backslash\alpha\rangle.$$

Наконец, и дополнение ясно, так как во II части доказательства говорилось о том, что если существуют два таких отображения, которые удовлетворяют условиям теоремы, тогда два расширения эквивалентны, а в I части доказали, что если два расширения эквивалентны, тогда для любого отображения $a\to\gamma_1^a$ существует такое отображение $a\to\gamma_2^a$, которое удовлетворяет условиям теоремы.

Литература

[1] A. A. Albert, Quasigroups I., *Trans. Amer. Math. Soc.* **54** (1943), 507—519.
[2] A. A. Albert, Quasigroups II., *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 401—419.
[3] R. H. Bruck, A survey of binery systems, *Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.*

(Поступило 30. 12. 1965)