Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe (II)

Von HANS-JOACHIM ROSSBERG (Berlin)

Das Ziel des zweiten Teils dieser Arbeit ist eine Verschärfung des Satzes 1 aus Teil I (siehe [4]) und die Herleitung einiger Folgerungen. Auch bei der Abfassung von Teil II habe ich von Herrn Professor A. RÉNYI einen wesentlichen Hinweis erhalten, wofür ich ihm an dieser Stelle danken möchte.

Lemma 2. Die Zahlen $B>0$ und $\eta>0$ seien beliebig gewählt, für den Index $k(n)$ gelte $k\to\infty$, $n-k\to\infty$; dann gibt es eine Zahl $n_0(\eta, B)$, so daß für die Verteilungsdichte $g_k(x)$ von ζ_k für $n\geqq n_0$ gleichmäßig im Intervall $|y|\leqq B$

$$|S_k g_k(M_k+S_k y)-\varphi(y)|<\eta$$

gilt, wo $\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}$ die Dichte der Normalverteilung ist.

BEWEIS. Bekanntlich gilt

$$g_k(x)=\binom{n}{k}ke^{-(n-k+1)x}(1-e^{-x})^{k-1} \tag{10}$$

Mit der Abkürzung

$$g_n(y)=1-e^{-S_k y}=S_k y(1+o(1))$$

gilt

$$\frac{1-e^{-M_k-S_k y}}{1-e^{-M_k}}=1+\frac{g_n(y)}{e^{M_k}-1},$$

und aus

$$\int\limits_{n+1-k}^{n+1}\frac{dx}{x}\leqq M_k\leqq\int\limits_{n-k}^{n}\frac{dx}{x}$$

folgt $e^{M_k}=\frac{n+\theta}{n+\theta-k}$, wo $|\theta|<1$. In Teil I hatten wir $S_k=\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}\,(1+o(1))$ gefunden. Bildet man den Logarithmus von

$$A_1(y)=\left(\frac{1-e^{-M_k-S_k y}}{1-e^{-M_k}}\right)^{k-1}e^{-(n-k+1)S_k y}=\left(1+\frac{g_n(y)}{e^{M_k}-1}\right)^{k-1}(1-g_n(y))^{n-k+1},$$

so findet man hiernach

$$A_1(y)\to e^{\frac{-y^2}{2}},$$

und zwar gleichmäßig für $|y| \leqq B$. Die Stirlingsche Formel liefert schließlich

$$A_2 = S_k \binom{n}{k} k e^{-(n-k+1)M_k} (1 - e^{-M_k})^{k-1} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Wegen $S_k g_k(M_k + S_k y) = A_1 A_2$ ist damit die Behauptung bewiesen.

Durch die Funktion

$$U_{hk}(x, y) = P\{\xi_h < x, \xi_k < y\} - P\{\xi_h < x\} P\{\xi_k < y\}$$

läßt sich eine Rechteckfunktion $u_n(D)$ definieren, die jedem Rechteck D der Form $a \leqq x < b$, $p \leqq y < q$ $(-\infty \leqq a < b \leqq \infty, \ -\infty \leqq p < q \leqq \infty)$ den Wert

$$u_n(D) = U_{hk}(b, q) - U_{hk}(a, q) - U_{hk}(b, p) + U_{hk}(a, p) =$$

$$= P\{a \leqq \xi_h < b, p \leqq \xi_k < q\} - P\{a \leqq \xi_h < b\} P\{p \leqq \xi_k < q\} \tag{11}$$

zuordnet. Bekanntlich ist die Totalvariation TU_{hk} von $U_{hk}(x, y)$ die obere Grenze der Summen

$$\sum_j |u_n(D_j)|, \tag{12}$$

wobei alle Zerlegungen der $\xi_h - \xi_k$-Ebene in endlich viele Rechtecke der angegebenen Art zur Konkurrenz zugelassen sind. Wie wir sogleich sehen werden, sind die in Satz 1 auftretenden Ranggrößen auch in dem wesentlich stärkeren Sinne der „Konvergenz in Variation" asymptotisch unabhängig voneinander. Wir weisen darauf hin, daß die Sätze 2 und 3 ebenso wie Satz 1 auch für die „oberen" Randglieder gelten.

Satz 2. Wenn $\frac{h}{k} \to 0$, so besteht die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} TU_{hk} = 0.$$

Beweis. Die am Anfang des Beweises von Satz 1 angegebenen Formeln erlauben den Schluß, daß auch für die Funktion $U_{hk}(x, y)$ die Darstellung

$$U_{hk}(x, y) = Q_{hk}(F(x), F(y))$$

gilt, wobei Q_{hk} nur von n, h und k, nicht aber von F abhängt. Daher gilt für die Funktion

$$R_{hk}(x, y) = P\{\zeta_h < x, \zeta_k < y\} - P\{\zeta_h < x\} P\{\zeta_k < y\}$$

entsprechend

$$R_{hk}(x, y) = Q_{hk}(1 - e^{-x}, 1 - e^{-y}).$$

Folglich gehört zu jeder Zerlegung Z der $\xi_h - \xi_k$-Ebene in Rechtecke D_j eine Zerlegung Z' der $\zeta_h - \zeta_k$-Viertelebene (NB: $\zeta_k \geqq \zeta_h \geqq 0$) in ebenso viele Rechtecke D'_j, so daß

$$\sum_1^N |u_n(D_j)| = \sum_1^N |r_n(D'_j)|,$$

wo r_n die mit Hilfe von R_{hk} in der oben angegebenen Weise konstruierte Rechteckfunktion bezeichnet.

Daraus folgt

$$TU_{hk} \leqq TR_{hk},$$

und es genügt wiederum, den Spezialfall der ζ zu behandeln.

Lemma 3. Wenn $h \to \infty$, $\frac{h}{k} \to 0$, $n-k \to \infty$, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} TR_{hk} = 0.$$

Beweis. Aus der Verteilungsdichte (10) der Ranggröße ζ_k können wir schnell die Verteilungsdichte der Differenz $\zeta_k - \zeta_h$ herleiten. Wegen $P\{\zeta_k - \zeta_h < x\} = P\{\zeta_k < x | \zeta_h = 0\}$ hat diese nämlich dieselbe Verteilung wie die Ranggröße $\zeta_{k-h}^{(n-h)}$ aus einer Variationsreihe vom Umfang $n-h$ mit der Grundverteilung $1-e^{-x}$; ihre Dichte $g_{hk}(x)$ erhält man daher, indem man in (10) n und k durch $n-h$ bzw. $k-h$ ersetzt. Nach (1) ist somit die Funktion $R_{hk}(x, y)$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial^2 R_{hk}(x, y)}{\partial x \, \partial y} = \big(g_{hk}(x-y) - g_k(y)\big) g_h(x) = g_{hk}(x, y) - g_k(y) g_h(x) = W_n(x, y)$$

($g_{kh}(x, y)$ sei die Dichte des Vektors (ζ_h, ζ_k)). Für die abzuschätzende Totalvariation besteht hiernach die Darstellung ([2], Nr. 41 und 42)

$$TR_{hk} = \iint_D |W_n(x, y)| \, dx \, dy,$$

wo mit D die Viertelebene $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ bezeichnet ist.

Es sei die Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, die Zahl $C > 1$ dagegen so groß, daß für alle $c \geqq C$

(13) $$4c\big(1 - \Phi(c)\big) \leqq \varepsilon$$

gilt; daraus folgt

$$\Phi(C) - \Phi(-C) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen $\underline{x}_n = M_h - CS_h$, $\bar{x}_n = M_h + CS_h$, $\underline{y}_n = M_k - CS_k$, $\bar{y}_n = M_k + CS_k$. Dann gilt nach (5) für $n \geqq N(\varepsilon)$ zugleich

$$P\{\underline{x}_n \leqq \zeta_h < \bar{x}_n\} > 1 - \varepsilon$$

und

$$P\{\underline{y}_n \leqq \zeta_k < \bar{y}_n\} > 1 - \varepsilon.$$

D_n bezeichne das Rechteck $\underline{x}_n \leqq x \leqq \bar{x}_n$, $\underline{y}_n \leqq y \leqq \bar{y}_n$. Dann gilt für $n \geqq N(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$\iint_{D-D_n} |W_n(x, y)| \, dx \, dy < 2P\{\zeta_h \notin \langle \underline{x}_n, \bar{x}_n \rangle\} + 2P\{\zeta_k \notin \langle \underline{y}_n, \bar{y}_n \rangle\} < 4\varepsilon.$$

Es bleibt uns folglich noch die Abschätzung des Integrals

$$J_n = \iint_{D_n} |W_n(x, y)| \, dx \, dy$$

übrig. Wie wir aus Teil I wissen, gilt

$$\frac{S_h}{S_{hk}} < 2\sqrt{\frac{h}{k}} \to 0, \quad \frac{S_k}{S_{hk}} \to 1. \tag{14}$$

Bezeichnen wir mit Q das Quadrat $|u| \leqq C$, $|v| \leqq C$, so erhalten wir infolge der zweiten Beziehung (14)

$$J_n = \iint_Q |S_{hk} g_{hk}(M_{hk} + S_k v - S_h u) - S_k g_k(M_k + S_k v)| \, S_h g_h(M_h + S_h u) \, du \, dv + o(1).$$

Das Lemma 2, in dem jetzt $B = 2C$, $\eta = 2(1 - \Phi(B))$ gesetzt wird, verhilft uns nun wegen (13) zu der Ungleichung

$$J_n < \iint_Q \left| \varphi\left(\frac{S_k}{S_{hk}} v - \frac{S_h}{S_{hk}} u\right) - \varphi(v) \right| \varphi(u) \, du \, dv + 4\varepsilon.$$

Durch die Geraden

$$S_h u = (S_k \pm S_{hk}) v,$$

die wir auch in der Form

$$v = \frac{S_h}{2S_k}(1 + o(1))u, \quad v = \frac{2S_k}{S_h}(1 + o(1))u$$

aufschreiben können, wird Q in vier Teilgebiete $Q_1, \ldots, Q_4$ geteilt, die sich wegen (14) für genügend große n nur wenig von den 4 Quadranten unterscheiden, in die Q durch die Koordinationsachsen geteilt wird. In jedem Q_i $(i = 1, \ldots, 4)$ wechselt die Funktion

$$\varphi\left(\frac{S_k}{S_{kh}} v - \frac{S_h}{S_{hk}} u\right) - \varphi(v) = \Psi(u, v)$$

ihr Vorzeichen nicht. Für Q_1 gilt daher z. B.

$$\iint_{Q_1} |\Psi(u, v)| \varphi(u) \, du \, dv = \int_o^C du \, \varphi(u) \int_o^C \Psi(u, v) \, dv + o(1) =$$

$$= \int_o^C du \, \varphi(u) \left[\frac{S_{hk}}{S_k}\left(\Phi\left(\frac{S_k}{S_{kh}} C - \frac{S_h}{S_{nk}} u\right) - \Phi\left(-\frac{S_h}{S_{hk}} u\right)\right) - (\Phi(C) - \Phi(o))\right] + o(1) <$$

$$< \left[\frac{S_{hk}}{S_k} \Phi\left(\frac{S_k}{S_{kh}} C\right) - \Phi(C)\right] [\Phi(C) - \Phi(o)] + \left[\Phi(o) - \frac{S_{hk}}{S_k} \Phi\left(-\frac{S_h}{S_{hk}} C\right)\right] + o(1) \to o.$$

Da sich die Integrale über Q_2, Q_3, Q_4 ebenso auswerten lassen, ist damit das Lemma 3 bewiesen.

Wie beim Beweis des Satzes 1 befreien wir uns jetzt von den Voraussetzungen $h \to \infty$, $n - k \to \infty$, indem wir zunächst die Funktion $R_{hl}(x, y)$ für $h \to \infty$, $\frac{h}{l} \to 0$, $n - l \to \infty$ betrachten. $k(n)$ sei wieder eine Zahlenfolge, für die $\frac{h}{k} \to 0$, $n - k \to \infty$,

$k<l$. Aus der schon in Teil I benutzten Darstellung

$$R_{hl}(x,y)=\int_0^y P\{\zeta_l<y|\zeta_k=u\}\,d_u R_{hk}(x,u)$$

gewinnen wir die Formel

$$\left|\frac{\partial^2 R_{hl}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right|\leqq\int_0^\infty g_{kl}(y|u)\left|\frac{\partial^2 R_{hk}(x,u)}{\partial x\,\partial u}\right|du, \tag{15}$$

wo $g_{kl}(y|u)$ die Verteilungsdichte von ζ_l unter der Bedingung $\zeta_k=u$ bezeichnet, für die natürlich $g_{kl}(y|u)=0$ für $y\leqq u$ gilt. Der Integrand $J(u,x,y)$ von (15) ist sowohl bezüglich u als auch bezüglich y im Intervall $(0,\infty)$ integrierbar. Wegen $\int_0^\infty g_{kl}(y|u)\,dy=1$ konvergiert auch das Integral

$$\int_0^\infty du\int_0^\infty dy\,J(u,x,y)=\int_0^\infty\left|\frac{\partial^2 R_{hk}(x,u)}{\partial x\,\partial u}\right|du. \tag{16}$$

Daher sind die Integrationen auf der linken Seite von (16) vertauschbar, und man erhält aus (15) und (16)

$$\int_0^\infty\left|\frac{\partial^2 R_{hl}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right|dy\leqq\int_0^\infty\left|\frac{\partial^2 R_{hk}(x,u)}{\partial x\,\partial u}\right|du,$$

woraus $TR_{hl}\leqq TR_{hk}$ folgt. Dieses Resultat führt nun wiederum durch analoge Überlegungen zum vollständigen Beweis des Satzes.

Der Satz 2 versetzt uns in die Lage, auf sehr einfache Weise eine Aussage über die Verteilungsfunktion der Linearkombination $c_h\xi_h+c_k\xi_k$ zu machen, durch die ein Resultat von Gartštein [1] wesentlich verallgemeinert wird. Es gilt nämlich

Satz 3. Wenn $\frac{h}{k}\to 0$, so besteht für

$$\tau_n=\sup_x\left|P\{c_h\xi_h+c_k\xi_k<x\}-\int_{-\infty}^{\infty}P\{c_k\xi_k<x-u\}\,dP\{c_h\xi_h<u\}\right|$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=0$$

welche Werte auch immer die reellen (von n abhängigen) Koeffizienten c_h und c_k annehmen mögen.

Beweis. Zunächst können wir uns leicht an Hand der Gleichung (11) davon überzeugen, daß Satz 2 auch für die Funktionenfolge

$$\hat U_{hk}(x,y)=P\{c_h\xi_h<x,\,c_k\xi_k<y\}-P\{c_h\xi_h<x\}\,P\{c_k\xi_k<y\}$$

gilt, gleichgültig, ob die Koeffizienten c_h und c_k positiv oder negativ sind, denn jede

Approximationssumme (der Gestalt (12)) für TU_{hk} ist gleich einer solchen für $T\hat{U}_{hk}$ und umgekehrt.

In der $c_h\xi_h - c_k\xi_k$-Ebene wird durch die Bedingung $c_h\xi_h + c_k\xi_k < x$ eine Halbebene H_x definiert, und es ist

$$P\{c_h\xi_h + c_k\xi_k < x\} = \iint_{H_x} dP\{c_h\xi_h < u, c_k\xi_k < v\} =$$

$$= \iint_{H_x} d\hat{U}_{hk}(u,v) + \iint_{H_x} d\big[P\{c_h\xi_h < u\}P\{c_k\xi_k < v\}\big].$$

Das zweite Integral ist aber gleich der im Satz angegebenen Faltung. Daraus folgt

$$\tau_n \leqq T\hat{U}_{hk}.$$

Auf Grund von Satz 2 folgt damit bereits die Behauptung.

Folgerung. Es gelte $\frac{h}{k} \to 0$; wenn für gewisse Zahlenfolgen $a_n > 0, b_h, b_k$ und beliebige Zahlen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ zugleich die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} P\{a_n A\xi_h + b_h < x\} = G_1(x), \quad \lim_{n\to\infty} P\{a_n B\xi_k + b_k < x\} = G_2(x)$$

bestehen, wo $G_1(x)$ und $G_2(x)$ Verteilungsfunktionen sind, von denen eine ausgeartet sein kann, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\{a_n(A\xi_h + B\xi_k) + b_h + b_k < x\} = G_1(x) * G_2(x).$$

Satz 4. *$f_h(u_1, \ldots, u_h), f_{kk'}(u_k, \ldots, u_{n-k'}), f_{h'}(u_{n-h'}, \ldots, u_n)$ $(n \geqq n_0 \geqq 3)$ seien beliebige Folgen von Borel-meßbaren Funktionen der angegebenen Argumente; wenn $\frac{h}{k} \to 0$, $\frac{h'}{k'} \to 0$, so gilt mit den Abkürzungen $f_h = f_h(\xi_1, \ldots, \xi_h)$, $f_{kk'} = f_{kk'}(\xi_k, \ldots, \xi_{n-k'})$ $f_{h'} = f_{h'}(\xi_{n-h'}, \ldots, \xi_n)$ für*

$$\omega_n = \sup_{x,y,z} |P\{f_h < x, f_{kk'} < y, f_{h'} < z\} - P\{f_h < x\}P\{f_{kk'} < y\}P\{f_{h'} < z\}|$$

die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$.

Beweis. Da die Ranggrößen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eine Markoffsche Kette bilden, ist die Zufallsgröße f_h unter der Bedingung $\{\xi_h = u, \xi_k = v\}$ unabhängig von dem Vektor $(f_{kk'}, f_{h'})$. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir daher, indem wir über die ganze $u-v$-Ebene integrieren,

$$P\{f_h < x, f_{kk'} < y, f_{h'} < z\} =$$

$$= \iint P\{f_h < x | \xi_h = u\} P\{f_{kk'} < y, f_{h'} < z | \xi_k = v) \, dP\{\xi_h < u, \xi_k < v\} =$$

$$= \iint P\{f_h < x | \xi_h = u\} P\{f_{kk'} < y, f_{h'} < z | \xi_k = v\} \, dU_{hk}(u,v) +$$

$$+ P\{f_h < x\} P\{f_{kk'} < y, f_{h'} < z\};$$

daraus folgt nach Satz 2

$$\sup_{x,y,z} |P\{f_h < x, f_{kk'} < y, f_{h'} < z\} - P\{f_h < x\} P\{f_{kk'} < y, f_{h'} < z\}| \leqq TU_{kk} \to 0. \tag{17}$$

Als Spezialfall entnehmen wir dieser Beziehung

$$\sup_{x,y} |P\{f_h < x, f_{kk'} < y\} - P\{f_h < x\} P\{f_{kk'} < y\}| \to 0. \tag{18}$$

Wir führen die schon in Teil I benutzten Zufallsgrößen $\bar{x}_i = -x_i$ ein, die die Verteilungsfunktion $\hat{F}(x) = 1 - F(-x+0)$ besitzen und auf die Variationsreihe $\bar{\xi}_{n+1-i} = -\xi_i$ führen ($i=1, \ldots, n$). Wir setzen diese neuen Ranggrößen in (18) ein. Beachten wir dann, daß zur Herleitung von (18) weder Voraussetzungen über F noch solche über die f benutzt wurden, sondern daß nur die Indizes h, h', k, k' gewissen Bedingungen unterworfen sind, so folgt aus (18)

$$\sup_{y,z} |P\{f_{kk'} < y, f_{h'} < z\} - P\{f_{kk'} < y\} P\{f_{h'} < z\}| \to 0.$$

Dieses Resultat ergibt zusammen mit (17) die Behauptung.

Satz 5. *Über die Indizes h, h', k, k' mögen dieselben Voraussetzungen wie in Satz 4 bestehen; dann gilt mit der Abkürzung $d_n = \xi_{n-h'} - \xi_h$ für*

$$\delta_n = \sup_{x,y} |P\{d_n < x, f_{kk'} < y\} - P\{d_n < x\} P\{f_{kk'} < y\}|$$

die Beziehung $\lim \delta_n = 0$.

BEWEIS.

Durch die Bedingung $\xi_{n-h'} - \xi_h < x$ wird eine Halbebene H_x in der $\xi_h - \xi_{n-h'}$-Ebene definiert. Für die Zahlen u_0 und v_0 gelte $0 < F(u_0) \leqq 1$, $0 \leqq F(v_0) < 1$, $v_0 - u_0 = x$ *). Dann gilt nach Satz 2

$$|P\{d_n < x, f_{kk'} < y\} - P\{d_n < x\} P\{f_{kk'} < y\}| =$$
$$= \left| \iint_{H_x} [P\{f_{kk'} < y | \xi_h = u, \xi_{n-h'} = v\} - P\{f_{kk'} < y\}] d[P\{\xi_h < u\} P\{\xi_{n-h'} < v\}] \right| + o(1)$$
$$\leqq P\{\xi_h > u_0\} + P\{\xi_{n-h'} < v_0\} + o(1).$$

Die beiden ersten Glieder aber verschwinden asymptotisch zufolge einer bekannten Eigenschaft von Ranggrößen. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die Sätze 4 und 5 gelten im Falle Var $x_1 < \infty$ auch, wenn man $f_{kk'}$ durch $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ ersetzt. Den Beweis dieses Resultats hat Verf. in [3] ausgeführt.

*) Der Fall, in dem Zahlen mit dieser Eigenschaft nicht existieren, ist trivial.

Literatur

[1] B. H. GARTŠTEĬN, Učenye Zapiski Ľvovskogo Univ. **22** (1953), 50—61.
[2] F. RIESS und SZ.—NAGY, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin*, 1956.
[3] H.-J. ROSSBERG, Die asymptotische Unabhängigkeit der kleinsten und größten Werte einer Stichprobe vom Stichprobenmittel, *Math. Nachr*, **28** (1965) 305—318.
[4] H.-J. ROSSBERG, Über das aymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe I. MTA Mat. Kut. Int. Közl. **8** (1963), 463—468.

(Eingegangen am 9. April 1966.)