Über eine invariante Form der Bedingung für die Rekurrenz der kovarianten Ableitung eines beliebigen Tensors

Von A. JAKUBOWICZ und A. WĘGRZYNOWSKA (Szczecin).

§ 1. Einleitung

Es sei X_n ein Punktraum, in dem ein zweifach kovarianter, nicht verschwindender Tensor $T_{\lambda\mu}$ d.h. mit

(1. 1) $$T_{\lambda\mu} \not\equiv 0$$

existiert.

Wir stellen die Frage, wann dieser Raum ein L_n Raum werden kann, wobei die kovariante Ableitung des Tensors $T_{\lambda\mu}$ von vornherein als eine rekurrente Ableitung angegeben wird, d.h.

(1. 2) $$\nabla_\sigma T_{\lambda\mu} = K_\sigma T_{\lambda\mu}.$$

Es handelt sich somit um die Auflösung des Systems der (algebraischen) Gleichungen

(1. 3) $$\partial_\sigma T_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\lambda} T_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} T_{\lambda\alpha} = K_\sigma T_{\lambda\mu},$$

wo $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ $(\sigma, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ die unbekannten Komponenten des Objekts der parallelen Übertragung sind (das Feld K_σ sowie das Feld $T_{\lambda\mu}$ werden als angegeben betrachtet).

Ist der Tensor $T_{\lambda\mu}$ symmetrisch, d.h.

(1. 4) $$T_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

gilt ferner

(1. 5) $$\operatorname{Det}(T_{\lambda\mu}) \neq 0,$$

und sind gleichfalls die Übertragungsparameter $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ symmetrisch, d.h. es gilt

(1. 6) $$\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \qquad (\lambda, \sigma, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

so hat dieses Problem A. MOÓR in seiner Arbeit [1] gelöst und eine Formel für die gesuchten Parameter $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ bestimmt. Es gilt für $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$:

(1. 7) $$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = \tfrac{1}{2} T^{\alpha\mu}(\partial_\lambda T_{\sigma\alpha} + \partial_\sigma T_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha T_{\lambda\sigma}) - \tfrac{1}{2}(K_\lambda \delta^\mu_\sigma + K_\sigma \delta^\mu_\lambda - K_\alpha T^{\alpha\mu} T_{\lambda\sigma}),$$

wo $T^{\alpha\mu}$ den reziproken Tensor in bezug auf $T_{\alpha\mu}$ darstellt:

(1. 8) $$T_{\sigma\alpha} T^{\mu\alpha} = \delta^\mu_\sigma \qquad (\sigma, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Im Falle, in dem der Tensor $T_{\lambda\mu}$ schiefsymmetrisch ist, d.h.

$$T_{\mu\lambda} = -T_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n) \tag{1. 9}$$

besteht, ferner die Übertragungsparameter $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ nicht symmetrisch vorausgesetzt wurden, wurde das Problem ebenfalls von A. Moór in seiner Arbeit [2] gelöst. Die Resultate bezüglich der Type (1. 4) und (1. 9) sind im Satz 1 von [2] formuliert.

Für den Fall des zweidimensionalen Raumes X_2, bei beliebigem $T_{\lambda\mu}$, — der weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist, d.h.:

$$T_{[12]} \neq 0 \tag{1. 10}$$

und

$$T_{(\lambda\mu)} \neq 0, \tag{1. 11}$$

und wenn außerdem das gesuchte Objekt der parallelen Übertragung $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ beliebig aber nicht symmetrisch ist:

$$S^{\sigma}_{\mu\lambda} \neq 0, \tag{1. 12}$$

wo

$$S^{\mu}_{\sigma\lambda} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Gamma^{\mu}_{[\sigma\lambda]}, \tag{1. 13}$$

hat A. Moór in der Arbeit [2] die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Lösbarkeit des Systems der Gleichungen (1. 3) angegeben, deren Gestalt jedoch keinen invarianten Charakter besitzt.

In der vorliegenden Arbeit geben wir gewisse Bedingungen an, die notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Systems der Gleichungen (1. 3) für einen zweidimensionalen Raum sind. Unsere Untersuchungen stützen sich auf die Theorie der geometrischen Objekte, und sind in einer invarianten Gestalt formuliert.

Wir schreiben die Gleichungen (1. 3) in expliziter Form aus:

$$\begin{cases} 2T_{11}\Gamma^{1}_{\sigma 1} + 2T_{(12)}\Gamma^{2}_{\sigma 1} = \Phi_{\sigma 11} \\ T_{12}\Gamma^{1}_{\sigma 1} + T_{22}\Gamma^{2}_{\sigma 1} + T_{11}\Gamma^{1}_{\sigma 2} + T_{12}\Gamma^{2}_{\sigma 2} = \Phi_{\sigma 12} \\ T_{21}\Gamma^{1}_{\sigma 1} + T_{22}\Gamma^{2}_{\sigma 1} + T_{11}\Gamma^{1}_{\sigma 2} + T_{21}\Gamma^{2}_{\sigma 2} = \Phi_{\sigma 21} \\ 2T_{(12)}\Gamma^{1}_{\sigma 2} + 2T_{22}\Gamma^{2}_{\sigma 2} = \Phi_{\sigma 22} \end{cases} \tag{1. 14}$$

wo

$$\Phi_{\sigma\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial_{\sigma} T_{\alpha\beta} - K_{\sigma} T_{\alpha\beta}. \tag{1. 15}$$

Die Matrix $\mathfrak{M}^*$ der Koeffizienten dieses linearen Systems der Gleichungen ist:

$$\mathfrak{M}^* \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0 \\ T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21} \\ 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{bmatrix}. \tag{1. 16}$$

Die adjungierte Matrix $\mathfrak{M}$ ist wie folgt:

$$\mathfrak{M} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{bmatrix} \Phi_{\sigma 11} & 2T_{11} & 2T_{(12)} & 0 & 0 \\ \Phi_{\sigma 12} & T_{12} & T_{22} & T_{11} & T_{12} \\ \Phi_{\sigma 21} & T_{21} & T_{22} & T_{11} & T_{21} \\ \Phi_{\sigma 22} & 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} \end{bmatrix}. \tag{1. 17}$$

§ 2. Grundsätzliche Objekte.

In diesem Paragraphen werden gewisse grundsätzliche Objekte bestimmt, welche wir für die Lösung des Problems brauchen werden.

Betrachten wir das Objekt

$$A \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{Det}(T_{\lambda\mu}). \tag{2. 1}$$

Das Objekt A ist bekanntlich eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht 2:

$$A' = Y^{-2}A, \tag{2. 2}$$

wo

$$Y \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{Det}(A_{\lambda}^{\lambda'}), \quad A_{\lambda}^{\lambda'} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \xi^{\lambda'}}{\partial \xi^{\lambda}}. \tag{2. 3}$$

Betrachten wir ferner das Objekt

$$\partial_\sigma A \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial A}{\partial \xi^\sigma}. \tag{2. 4}$$

Die Transformationsregel dieses Objekts lautet:

$$\partial_{\sigma'} A' = Y^{-2} A_{\sigma'}^{\sigma}(-2A\partial_\sigma \ln|Y| + \partial_\sigma A). \tag{2. 5}$$

Auf Grund von (2. 5) sehen wir, daß das Objekt (2. 4) kein geometrisches Objekt ist. Es kann jedoch leicht die Gruppeneigenschaft der Transformationsregel (2. 5) nachgewiesen werden. Wenn wir nun die Gesamtheit

$$\{A, \partial_\sigma A\} \tag{2. 6}$$

betrachten, so können wir auf Grund der Transformationsregel (2. 2) und (2. 5) feststellen, daß sie ein geometrisches, sog. halbzusammengesetztes Objekt ([4]) darstellt. Auf Grund der Regeln (2. 2) und (2. 5) sehen wir weiterhin, daß die gleichzeitigen Gleichheiten (in einem beliebigen festgewählten Raumpunkt X_n)

$$A = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma A = 0 \tag{2. 7}$$

einen invarianten Charakter haben. Betrachten wir nun das zweite Objekt:

$$\mathfrak{v} \stackrel{\text{df}}{=} 4T_{[12]}^2. \tag{2. 8}$$

Es ist gleichfalls bekannt, dass das Objekt $\mathfrak{v}$ im zweidimensionalen Raum eine Dichte vom Gewicht 2 darstellt:

$$\mathfrak{v}' = Y^{-2}\mathfrak{v}. \tag{2. 9}$$

Betrachten wir ferner das Objekt

$$\mathfrak{w} \stackrel{\text{df}}{=} A - \mathfrak{v}. \tag{2. 10}$$

Dies ist — ähnlich wie A und $\mathfrak{v}$ — eine Dichte vom Gewicht 2 also genügt es der Transformationsregel

$$\mathfrak{w}' = Y^{-2}\mathfrak{w}. \tag{2. 11}$$

Weiterhin nehmen wir in Betracht:

$$\partial_\sigma \mathfrak{w} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \xi^\sigma}. \tag{2. 12}$$

Wir beachten, daß auf Grund der Annahme (1. 10) $\mathfrak{w} \neq 0$ folgt, woraus sich auf Grund von (2. 10) ergibt, daß A und $\mathfrak{w}$ nicht gleichzeitig verschwinden können.

Analog, wie für das Objekt $\partial_\sigma A$, kann man beweisen, daß das Objekt $\partial_\sigma \mathfrak{w}$ dieselbe Transformationsregel

$$(2.13) \qquad \partial_{\sigma'} \mathfrak{w}' = Y^{-2} A^{\sigma}_{\sigma'}(-2\mathfrak{w}\partial_\sigma \ln |Y| + \partial_\sigma \mathfrak{w}),$$

besitzt, also kein geometrisches Objekt darstellt.

Jedoch, analog wie früher die Gesamtheit $\{A, \partial_\sigma A\}$, stellt die Gesamtheit $\{\mathfrak{w}, \partial_\sigma \mathfrak{w}\}$ bereits ein geometrisches (halbzusammengesetztes) Objekt dar. Auf Grund der Transformationsregeln (2. 11) und (2. 13) sehen wir, daß das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$(2.14) \qquad \mathfrak{w} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma \mathfrak{w} = 0$$

einen invarianten Charakter hat.

Betrachten wir endlich die Objekte

$$(2.15) \qquad s \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\mathfrak{w}}{A},$$

$$(2.16) \qquad s_\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_\sigma s.$$

Da die Objekte $\mathfrak{w}$ und A Dichten vom Gewicht 2 darstellen, ist das Objekt s ein Skalar und das Objelet s_σ ein kovarianter Vektor. Folglich hat die Gleichung

$$(2.17) \qquad s_\sigma = 0$$

einen invarianten Charakter. Die Objekte $\{A, \partial_\sigma A\}$ und $\{\mathfrak{w}, \partial_\sigma \mathfrak{w}\}$ sowie der kovariante Vektor s_σ sind die grundlegenden Objekte zur Lösung des in der Einleitung gestellten Problems.

§ 3. Untersuchung des Ranges der Matrizen (1. 16) und (1. 17)

Wir wollen beweisen, daß bei den Annahmen (1. 10) und (1. 11) die Matrix (1. 16) den Rang $r_1 = 3$ besitzt. Durch direkte Berechnung der Determinante D der Matrix $\mathfrak{M}^*$ stellen wir fest, daß

$$(3.1) \qquad D \equiv 0$$

ist, also, daß r_1 jedenfalls die Ungleichung $r_1 \leqq 3$ erfüllt. Betrachten wir jetzt die Unterdeterminante

$$(3.2) \qquad D^3_1 = 4\,(T_{22})^2 T_{[12]}.$$

Diese ist von Null verschieden, was aus den Annahmen (1. 1) und (1. 10) hervorgeht, sowie aus der Feststellung in der Arbeit [5], welche behauptet, daß es stets ein solches Koordinatensystem gibt, in welchem alle nichttriviale Komponenten des nichtnullwertigen Tensors von Null verschieden sind.

Daraus folgt $r_1 = 3$. Um zu beweisen, daß das System der Gleichungen (1. 14) Lösungen hat, muß man nun beweisen, daß der Rang r_2 der adjungierten Matrix (1. 17) ebenfalls drei ist:

$$(3.3) \qquad r_2 = 3.$$

Zu diesem Zwecke berechnen wir die Unterdeterminante vierter Ordnung D^k ($k=2, 3, 4, 5$) der Matrix $\mathfrak{M}$, wo in D^k der obere Index die ausgestrichene Kolonne bezeichnet:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} D^2 = \dfrac{T_{(12)}}{T_{[12]}}(A\partial_\sigma \mathfrak{w} - \mathfrak{w}\partial_\sigma A) = \dfrac{T_{(12)}A^2 s_\sigma}{T_{[12]}}; \\[2ex] D^3 = \dfrac{T_{11}}{T_{[12]}}(A\partial_\sigma \mathfrak{w} - \mathfrak{w}\partial_\sigma A) = \dfrac{T_{11}A^2 s_\sigma}{T_{[12]}}; \\[2ex] D^4 = \dfrac{T_{22}}{T_{[12]}}(A\partial_\sigma \mathfrak{w} - \mathfrak{w}\partial_\sigma A) = \dfrac{T_{22}A^2 s_\sigma}{T_{[12]}}; \\[2ex] D^5 = \dfrac{T_{(12)}}{T_{[12]}}(A\partial_\sigma \mathfrak{w} - \mathfrak{w}\partial_\sigma A) = \dfrac{T_{(12)}A^2 s_\sigma}{T_{[12]}}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (3. 4) sieht man, daß (3. 3) in den folgenden Fällen besteht:

$$(3.5a)\qquad A=0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma A=0,$$

oder

$$(3.5b)\qquad \mathfrak{w}=0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma \mathfrak{w}=0,$$

oder

$$(3.5c)\qquad s_\sigma=0.$$

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung des Vorhandenseins einer kovarianten rekurrenten Ableitung des gegebenen nichtverschwindenden Tensors $T_{\lambda\mu}$ (falls dieser weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist) im zweidimensionalen Raum ist die folgende Alternative:*

$$A=0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma A=0, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{w}=0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma \mathfrak{w}=0, \quad \text{oder} \quad s_\sigma=0.$$

Literaturverzeichnis

[1] A. Moór, Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 81—93.
[2] A. Moór, Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Tensoren von rekurrenter kovarianter Ableitung", *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 59—62.
[3] S. Gołąb, Rachunek tensorowy, *Warszawa*, 1966.
[4] S. Gołąb, A. Jakubowicz, M. Kucharzewski, M. Kuczma, Sur l'objet géométrique représentent une direction munie d'un sens, *Ann. Polon. Math.* **15** (1964), 233—236.
[5] S. Gołąb, A. Jakubowicz, Über eine Frage die der Theorie der Tensoren zugrunde liegt, *Zeszyty Nauk. Uniw. Jagiello.* Prace Mat. **102** (1965) 17—19.

(Eingegangen am 5. Mai 1966.)