Zur Spektraltheorie hypoelliptischer Differentialoperatoren

Von HANS TRIEBEL (Jena)

In der vorliegenden Arbeit werden Eigenwertverteilungen selbstadjungierter hypoelliptischer Differentialoperatoren mit reinem Punktspektrum betrachtet. Ferner wird untersucht, wann sich die inversen Operatoren als Integraloperatoren schreiben lassen und welche Eigenschaften die Kerne dieser Integraloperatoren besitzen.

Im Teil I werden Einbettungssätze für die Räume

$$W^{l_1 \dots l_s}_{\substack{n_1 \dots n_s \\ p_1 \dots p_s}}(\Omega)$$

von SLOBODECKIJ und IL'IN ([6]) hergeleitet. Im Abschnitt 1 werden für $\Omega = R_n$ die Resultate unter Verwendung der Fouriertransformation und des Lemmas von HAUSDORFF und YOUNG erzielt. Dabei beschränke ich mich auf solche Sätze, die bei den späteren Untersuchungen Verwendung finden. Daß man mit der benutzten Methode wesentlich allgemeinere Resultate gewinnen kann, ist für den Fall der Sobolewschen Räume in [9] gezeigt worden. Das Fortsetzungsverfahren von FICHTENHOLZ gestattet die Gewinnung entsprechender Sätze für beschränkte Gebiete Ω durch Zurückführung auf den Fall des Gebietes R_n, (Abschnitt 2). Die Resultate des ersten Teils stimmen teilweise mit entsprechenden Ergebnissen von Il'in [6] überein. Jedoch scheint die hier benutzte Beweismethode wesentlich einfacher zu sein, wofür man allerdings Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches der Sätze in Kauf zu nehmen hat. Diese Einschränkungen spielen bei der Anwendung der Resultate auf hypoelliptische Operatoren keine Rolle. Im Teil II werden hypoelliptische Differentialoperatoren der Form

$$Au = \sum_{i=1}^{s} A_i u + Bu$$

im einem Gebiet $\Omega \subset R_n$ betrachtet. Ω hat dabei „würfelförmige" Struktur, d.h $\Omega = \prod_{i=1}^{s} \Omega_i$, $\Omega_i \subset R_{n_i}$, $n_1 + \dots + n_s = n$, Ω_i beschränkt. A_i ist im Gebiet Ω_i streng elliptisch und formal selbstadjungiert, während

$$Bu = \sum b_\alpha(x) D^\alpha u$$

formal selbstadjungiert ist. Im Abschnitt 4 wird untersucht, wann A im Raum

$L_2(\Omega)$ ein selbstadjungierter, bzw. wesentlich selbstadjungierter Operator mit reinem Punktspektrum ist. Im Abschnitt 5 wird die Verteilung der Eigenwerte untersucht. Daraus gewinnt man Aussagen über die Existenz Greenscher Funktionen und ihrer Zugehörigkeit zu Funktionenräumen, (Abschnitt 6). Im anschließenden Abschnitt 7 werden allgemeinere hypoelliptische Operatoren betrachtet, deren Definition über quadratische Formen erfolgt. Die Resultate des zweiten Teils der Arbeit stellen Verallgemeinerungen von Sätzen aus [10] dar.

I. Einbettungssätze

1. **Einbettungssätze für den n-dimensionalen Raum.** Der n-dimensionale reelle euklidische Raum wird mit R_n bezeichnet. Ist a eine beliebige reelle Zahl, so wird

$$a=[a]+\{a\}, \quad [a] \quad \text{ganz}, \quad 0 \leqq \{a\} < 1,$$

gesetzt.

$\varrho=(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$, $\varrho_i \geqq o$, wird als Multiindex bezeichnet,

$$[\varrho]=([\varrho_1], \ldots, [\varrho_n]),$$

$|\varrho|=\sum_{i=1}^{n} \varrho_i$, entsprechend $|[\varrho]|=\sum_{i=1}^{n} [\varrho_i]$. Wie üblich wird

$$D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D^{[\varrho]}=D_1^{[\varrho_1]} \ldots D_n^{[\varrho_n]}$$

geschrieben, wobei $x=(x_1, \ldots, x_n)$ ein allgemeiner Punkt des R_n ist. $L_p(R_n)$, $1 \leqq p < \infty$, (bzw. $L_p(\Omega)$) ist die Gesamtheit der im R_n (bzw. im Gebiet Ω) komplexen, meßbaren Funktionen, deren Beträge zur p-ten Potenz integrierbar sind. L_p wird in der üblichen Weise normiert, (Bezeichnung $\| \; \|_{L_p}$). (Entsprechend $L_\infty(R_n)$ bzw. $L_\infty(\Omega)$).

$C(R_n)$ bzw. $C(\bar{\Omega})$, (Ω ist ein offenes Gebiet, $\bar{\Omega}$ sein Abschluß) ist die Gesamtheit der komplexen und im R_n bzw. in $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen, $C(R_n)$ bzw. $C(\bar{\Omega})$ wird in der üblichen Weise normiert.

$C_0^\infty(R_n)$ (bzw. $C_0^\infty(\Omega)$) ist die Gesamtheit der komplexen, im R_n (bzw. im Gebiet Ω) unendlich oft differenzierbaren finiten Funktionen.

Definition 1. *Ist ϱ ein Multiindex und $1 \leqq p \leqq \infty$, so wird für $u \in C_0^\infty(R_n)$*

$$\|u\|_{L_p,\varrho}=\|D^{[\varrho]}u\|_{L_p}+\|u\|_{L_p}+\sum_{i=1}^{n} \sup_{\substack{x\in R_n\\ x_i\neq 0}} \frac{\|D^{[\varrho]}u-T_{x_i}D^{[\varrho]}u\|_{L_p}}{|x_i|^{\{\varrho_i\}}}$$

(1)

$$\|u\|_{C_\varrho}=\|D^{[\varrho]}u\|_{C}+\|u\|_{C}+\sum_{i=1}^{n} \sup_{\substack{x\in R_n\\ x_i\neq 0}} \frac{\|D^{[\varrho]}u-T_{x_i}D^{[\varrho]}u\|_{C}}{|x_i|^{\{\varrho_i\}}}$$

gesetzt. Dabei ist T_{x_i} der Verschiebungsoperator in x_i-Richtung, d.h.

$$T_{x_i}f(y_1, \ldots, y_n)=f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i+x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n).$$

(Ist $\{\varrho_i\}=o$, so entfällt der entsprechende Term in der Definition der Normen $\|u\|_{L_p,\varrho}$ und $\|u\|_{C_\varrho}$).

Die Bezeichnungen $\| \ \|_{L_{p,\varrho}}$ und $\| \ \|_{C_\varrho}$ werden auch für Grenzelemente von Fundamentalfolgen in der entsprechenden Metrik beibehalten. (Sind sämtliche $\varrho_i < 1$, so sind die Normen (1) Verallgemeinerungen der üblichen Normierungen hölderstetiger Funktionen. Setzt man nämlich $\varrho = (\lambda, \ldots, \lambda)$, $0 < \lambda < 1$, so sind die Normen $\|u\|_{C_\varrho}$ und

$$\|u\|_C + \sup_{x,y \in R_n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

äquivalent, wie man durch elementare Abschätzungen zeigen kann.)

Definition 2. *Sind n_i, $i = 1, \ldots, s$, natürliche Zahlen und ist*

$$n = \sum_{i=1}^{s} n_i, \quad \textit{so wird für} \quad x \in R_n = \prod_{i=1}^{s} R_{n_i}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(s)}, \ldots, x_{n_s}^{(s)})$$

geschrieben. $D^{\varkappa}_{x^{(j)}}$ bedeutet, daß nur Ableitungen nach $x_1^{(j)}, \ldots, x_{n_j}^{(j)}$ auftreten. Sind l_j nicht negative ganze Zahlen und $1 \leqq p_j \leqq \infty$, $(j = 1, \ldots, s)$, so ist

$$W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}(R_n) = \{u(x) \mid D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u \in L_{p_i}(R_n) \textit{ im Sinne der Distributionen}, \ |\varkappa_i| \leqq l_i, \ i = 1, \ldots, s\}.$$

$$\|u\|_{W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\varkappa_i| \leqq l_i} \|D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u\|_{L_{p_i}}.$$

Ist $p_1 = \ldots = p_s = p$, so wird

$$W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}} = W^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, p}$$

geschrieben.

Hilfssatz 1. *$W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}(R_n)$ ist ein separabler Banachraum,*

$$C_0^\infty(R_n) \textit{ ist dicht in } W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}.$$

Beweis. Für $v \in W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}$ und $\varphi \in C_0^\infty(R_n)$ ist nach Definition 2

$$\int_{R_n} D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} v \cdot \varphi \, dx = (-1)^{|\varkappa_i|} \int_{R_n} v D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} \varphi \, dx, \qquad 0 \leqq |\varkappa_i| \leqq l_i.$$

Daraus folgt aber sofort, daß eine Fundamentalfolge in der Metrik $W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}$ einen Grenzwert besitzt, der ebenfalls zu $W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}$ gehört, so daß $W^{l_1 \ldots l_s}_{\substack{n_1 \ldots n_s \\ p_1 \ldots p_s}}$ ein Banachraum ist. Ist u ein Element dieses Raumes und u_ε eine Mittelfunktion im Sinne von Sobolew ([7], S. 24), so gilt

$$(D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u)_\varepsilon = D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u_\varepsilon \qquad ([7] \text{ S. } 42),$$

so daß

$$D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u_\varepsilon \xrightarrow[L_{p_i}]{} D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0, \qquad |\varkappa_i| \leqq l_i,$$

gilt und somit u durch u_ε in der Metrik $W^{l_1 \dots l_s}_{\substack{n_1 \dots n_s \\ p_1 \dots p_s}}$ approximiert wird. Ist

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 & \text{für} \quad t \geqq 2 \end{cases}, \quad 0 \leqq \chi(t) \leqq 1,$$

$\chi(t)$ unendlich oft differenzierbar im Intervall $[0, \infty)$, so wird u_ε (ε fest) durch $u_\varepsilon \chi\left(\frac{|x|}{j}\right)$ für $j \to \infty$ approximiert. Daraus folgt der Hilfssatz.

Satz 1. *Für einen Multiindex ϱ wird*

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_n) = (\varrho_1^{(1)}, \dots, \varrho_{n_1}^{(1)}, \varrho_1^{(2)}, \dots, \varrho_{n_2}^{(2)}, \dots, \varrho_1^{(s)}, \dots, \varrho_{ns}^{(s)}),$$

$$|\varrho|_j = \sum_{r=1}^{n_j} \varrho_r^{(j)}$$

gesetzt. $n = n_1 + \dots + n_s$, n_i *natürliche Zahlen.*

(a) *Ist*

$$\infty \geqq p \geqq 2 \geqq p_r \geqq 1, \quad r = 1, \dots, s+1,$$

und gibt es Zahlen $\beta_r > o$ *mit* $\sum_{r=1}^{s+1} \beta_r = 1$ *und*

$$\frac{1}{n_r}(l_r \beta_r - |\varrho|_r) > \sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j} - \frac{1}{p}, \qquad r = 1, \dots, s, \tag{2}$$

so ist

$$\|u\|_{L_{p,\varrho}} \leqq c \, \|u\|^{\beta_{s+1}}_{L_{p_{s+1}}} \prod_{j=1}^{s} \Big(\sum_{|\varkappa_j| = l_j} \|D^{\varkappa_j}_{x^{(j)}} u\|_{L_{p_j}} + \|u\|_{L_{p_j}} \Big)^{\beta_j} \tag{3}$$

für

$$u \in W^{l_1 \dots l_s}_{\substack{n_1 \dots n_s \\ p_1 \dots p_s}} \cap L_{p_{s+1}}, \qquad l_r \geqq 0 \text{ und ganz.}$$

(b) *Ist*

$$2 \geqq p_r \geqq 1, \quad r = 1, \dots, s+1,$$

und gibt es Zahlen $\beta_r > 0$ *mit* $\sum_{r=1}^{s+1} \beta_r = 1$ *und*

$$\frac{1}{n_r}(l_r \beta_r - |\varrho|_r) > \sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j}, \qquad r = 1, \dots, s, \tag{4}$$

so ist

$$\|u\|_{C_\varrho} \leqq c \, \|u\|^{\beta_{s+1}}_{L_{p_{s+1}}} \prod_{j=1}^{s} \Big(\sum_{|\varkappa_j| = l_j} \|D^{\varkappa_j}_{x^{(j)}} u\|_{L_{p_j}} + \|u\|_{L_{p_j}} \Big)^{\beta_j} \tag{5}$$

für

$$u \in W^{l_1 \dots l_s}_{\substack{n_1 \dots n_s \\ p_1 \dots p_s}} \cap L_{p_{s+1}}, \qquad l_r \geqq o \text{ und ganz.}$$

BEWEIS. Nach Hilfssatz 1 ist es ausreichend, $\varphi \in C_0^\infty(R_n)$ zu betrachten.

(a) Man kann sich auf $p < \infty$ beschränken, da die Behauptung für $p = \infty$ aus (b) folgt.

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R_n} e^{-i(x,\xi)} \varphi(x) \, dx$$

ist die Fouriertransformierte von $\varphi(x)$.

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_{n_2}^{(2)}, \dots, \xi_1^{(s)}, \dots, \xi_{n_s}^{(s)}) \in R_n.$$

Setzt man

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1, \quad i = 1, \dots, s+1,$$

und

$$|\xi|_j^2 = \sum_{r=1}^{n_j} |\xi_r^{(j)}|^2, \qquad j = 1, \dots, s,$$

so ist

$$\int_{R_n} |\widehat{\varphi}|^{p'} \left(1 + \prod_{j=1}^{s} |\xi|_j^{|\varrho|_j}\right)^{p'} d\xi =$$

$$(6) \qquad = \int_{R_n} |\widehat{\varphi}|^{p'\beta_{s+1}} \prod_{r=1}^{s} |\widehat{\varphi}|^{p'\beta_r} (1 + |\xi|_r^{l_r})^{p'\beta_r} \frac{\left(1 + \prod_{j=1}^{s} |\xi|_j^{|\varrho|_j}\right)^{p'}}{\prod_{r=1}^{s} (1 + |\xi|_r^{l_r})^{\beta_r p'}} d\xi \leqq$$

$$\left(\int_{R_n} |\widehat{\varphi}|^{p'_{s+1}} d\xi\right)^{\frac{p'\beta_{s+1}}{p'_{s+1}}} \prod_{i=1}^{s} \left(\int_{R_n} |\widehat{\varphi}|^{p'_i} (1 + |\xi|_i^{l_i})^{p'_i} d\xi\right)^{\frac{\beta_i p'}{p'_i}} \left(\int_{R_n} \prod_{r=1}^{s} \frac{(1 + |\xi|_r^{|\varrho|_r})^{p'q}}{(1 + |\xi|_r^{l_r})^{\beta_r p' q}} d\xi\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dabei ist

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j'}$$

und

$$\frac{1}{q} = 1 - p' \sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j'}.$$

(Falls $q = \infty$ ist, hat man die Rechnung zu modifizieren). Nach (2) ist

$$l_r \beta_r - |\varrho|_r > n_r \left(\sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j} - \frac{1}{p}\right) = n_r \left(\frac{1}{p'} - \sum_{j=1}^{s+1} \frac{\beta_j}{p_j'}\right) = \frac{n_r}{p' q},$$

also

$$(l_r \beta_r - |\varrho|_r) p' q > n_r,$$

so daß das letzte Integral in der Formel (6) konvergiert. Aus $\widehat{D_j \varphi} = \xi_j \widehat{\varphi}$ und den entsprechenden Formeln für höhere Ableitungen folgt

$$(7) \qquad \sum_{|\varkappa| = l_j} |\widehat{D^{\varkappa}_{x^{(j)}} \varphi}| = \sum_{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_{n_j} = l_j} |\xi_1^{(j)}|^{\varkappa_1} \dots |\xi_{n_j}^{(j)}|^{\varkappa_{n_j}} |\widehat{\varphi}| \geqq c \left(\sum_{r=1}^{n_j} |\xi_r^{(j)}|\right)^{l_j} |\widehat{\varphi}| \geqq$$

$$\geqq c |\xi|_j^{l_j} |\widehat{\varphi}|, \qquad c > 0 \quad [1]$$

[1]) Sämtliche unwesentlichen Konstanten werden mit den Buchstaben c oder K bezeichnet.

Entsprechend ist für den im Satz genannten Multiindex ϱ

$$|\widehat{D^{[\varrho]}\varphi}| = |\xi_1^{(1)}|^{[\varrho_1^{(1)}]} \dots |\xi_{n_s}^{(s)}|^{[\varrho_{n_s}^{(s)}]} |\widehat{\varphi}| \leqq (|\xi_1^{(1)}| + \dots + |\xi_{n_1}^{(1)}|)^{|[\varrho]|_1} \dots$$

$$\dots (|\xi_1^{(s)}| + \dots + |\xi_{n_s}^{(s)}|)^{|[\varrho]|_s} |\widehat{\varphi}| \leqq c \prod_{j=1}^{s} |\xi|_j^{|[\varrho]|_j} |\widehat{\varphi}| \leqq c \left(1 + \prod_{j=1}^{s} |\xi|_j^{|\varrho|_j}\right) |\widehat{\varphi}|.$$

Berücksichtigt man

$$\widehat{T_{x_j} D^{[\varrho]}\varphi} = e^{i x_j \xi_j} \widehat{D^{[\varrho]}\varphi}$$

und

$$\frac{|1 - e^{i x_j \xi_j}|}{|x_j|^{\{\varrho_j\}}} \leqq c |\xi_j|^{\{\varrho_j\}},$$

so folgt wie oben

$$\frac{1}{|x_j|^{\{\varrho_j\}}} |\widehat{T_{x_j} D^{[\varrho]}\varphi} - \widehat{D^{[\varrho]}\varphi}| \leqq c \left(1 + \prod_{j=1}^{s} |\xi|_j^{|\varrho|_j}\right) |\widehat{\varphi}|. \tag{9}$$

(6) und die Abschätzungen (7), (8) und (9) führen zu

$$\frac{\|\widehat{D^{[\varrho]}\varphi} - \widehat{T_{x_i} D^{[\varrho]}\varphi}\|_{L_{p'}}^{p'}}{|x_i|^{p'\{\varrho_i\}}} + \|\widehat{D^{[\varrho]}\varphi}\|_{L_{p'}}^{p'} + \|\widehat{\varphi}\|_{L_{p'}}^{p'} \leqq$$

$$\leqq c \|\widehat{\varphi}\|_{L_{p'_{s+1}}}^{\beta_{s+1} p'} \prod_{i=1}^{s} \Big(\|\widehat{\varphi}\|_{L_{p'_i}} + \sum_{|\varkappa_i| = l_i} \|\widehat{D_{x^{(i)}}^{\varkappa_i} \varphi}\|_{L_{p'_i}}\Big)^{\beta_i p'}.$$

Aus dieser Abschätzung und dem Lemma von Hausdorff und Young ([8]), folgt (3) für $u = \varphi \in C_0^\infty(R_n)$. Für beliebiges

$$u \in W_{\substack{n_1 \dots n_s \\ p_1 \dots p_s}}^{l_1 \dots l_s} \cap L_{p_{s+1}}$$

folgt die Behauptung (a) durch Grenzübergang, da $C_0^\infty(R_n)$ dicht in $W_{\substack{n_1 \dots n_s \\ p_1 \dots p_s}}^{l_1 \dots l_s} \cap L_{p_{s+1}}$ liegt. Dabei hat man $u \in L_{p,\varrho}$ ebenfalls als Grenzelement einer Fundamentalfolge in der Metrik $\| \ \|_{L_{p,\varrho}}$ aufzufassen.

(b) Der Beweis verläuft analog. Es sei wieder $\varphi \in C_0^\infty(R_n)$. Aus

$$D^{[\varrho]}\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R_n} e^{i(x,\xi)} \widehat{D^{[\varrho]}\varphi}\, d\xi$$

und (8) folgt

$$|D^{[\varrho]}\varphi| \leqq c \int_{R_n} \left(1 + \prod_{i=1}^{s} |\xi|_i^{|\varrho|_i}\right) |\widehat{\varphi}|\, d\xi. \tag{10}$$

Entsprechend ist nach (9)

$$\frac{|D^{[\varrho]}\varphi - T_{x_i} D^{[\varrho]}\varphi|}{|x_i|^{\{\varrho_i\}}} \leqq c \int_{R_n} \left(1 + \prod_{i=1}^{s} |\xi|_i^{|\varrho|_i}\right) |\widehat{\varphi}|\, d\xi. \tag{11}$$

Ferner ist

$$|\varphi| \leqq c \int_{R_n} |\widehat{\varphi}|\, d\xi. \tag{12}$$

Die zu (6) analoge Abschätzung lautet

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&\int_{R_n}\left(1+\prod_{j=1}^{s}|\xi|_j^{|\varrho|_j}\right)|\Phi|\,d\xi=\int_{R_n}|\Phi|^{\beta_{s+1}}\prod_{i=1}^{s}(1+|\xi|_i^{l_i})^{\beta_i}\prod_{i=1}^{s}\frac{1+|\xi|_i^{|\varrho|_i}}{(1+|\xi|_i^{l_i})^{\beta_i}}\,d\xi\leqq\\
&\leqq\left(\int_{R_n}|\Phi|^{p'_{s+1}}\,d\xi\right)^{\frac{\beta_{s+1}}{p'_{s+1}}}\prod_{i=1}^{s}\left(\int_{R_n}(1+|\xi|_i^{l_i})^{p'_i}|\Phi|^{p'_i}\,d\xi\right)^{\frac{\beta_i}{p'_i}}\left(\int_{R_n}\prod_{i=1}^{s}\frac{(1+|\xi|_i^{|\varrho|_i})^q}{(1+|\xi|_i^{l_i})^{\beta_i q}}\,d\xi\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

dabei ist

$$\sum_{j=1}^{s+1}\frac{\beta_j}{p'_j}=1-\frac{1}{q}.$$

Aus (4) folgt

$$l_r\beta_r-|\varrho|_r>n_r\sum_{j=1}^{s+1}\frac{\beta_j}{p_j}=n_r\left(1-\sum_{j=1}^{s+1}\frac{\beta_j}{p'_j}\right)=\frac{n_r}{q},$$

so daß das letzte Integral in (13) konvergiert. Dann folgt aber (5) aus (13), (10), (11) und (12) wie oben. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *ϱ ist ein Multiindex wie im Satz* 1.

(a) *Ist* $1\leqq q\leqq 2\leqq p$ *und*

$$\tau=1-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{l_j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{|\varrho|_j}{l_j}>o,$$

so ist für jedes ε, $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$,

$$\|u\|_{L_{p,\varrho}}\leqq\varepsilon\|u\|_{W^{l_1\dots l_s}_{n_1\dots n_s,q}}+c\varepsilon^{-\frac{1-\tau}{\tau}}\|u\|_{L_q}$$

für $u\in W^{l_1\dots l_s}_{n_1\dots n_s,q}$ *mit einer von* u *und* ε *unabhängigen positiven Konstanten* $c=c(\varepsilon_0)$.

(b) *Ist* $q\leqq 2$ *und*

$$\tau=1-\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{l_j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{|\varrho|_j}{l_j}>o.$$

so ist für jedes ε, $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$,

$$\|u\|_{C_\varrho}\leqq\varepsilon\,\|u\|_{W^{l_1\dots l_s}_{n_1\dots n_s,q}}+c\varepsilon^{-\frac{1-\tau}{\tau}}\|u\|_{L_q}$$

für $u\in W^{l_1\dots l_s}_{n_1\dots n_s,q}$ *mit einer von* u *und* ε *unabhängigen positiven Konstanten* $c=c(\varepsilon_0)$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist es wieder ausreichend, den Satz für $u\in C_0^\infty(R_n)$ zu beweisen.

(a) Aus

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{l_j}\left(|\varrho|_j+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)n_j\right)<1$$

folgt, daß es positive Konstanten $\beta_1,\dots,\beta_{s+1}$ mit $\sum_{j=1}^{s+1}\beta_j=1$ gibt, so daß

$$\beta_r>\frac{|\varrho|_r}{l_r}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\frac{n_r}{l_r},\qquad r=1,\dots,s,$$

ist. Also ist (2) mit $p_j=q$ erfüllt. Aus (3) erhält man

$$\|u\|_{L_{p,\varrho}} \leqq K\left(\|u\|_{L_q}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{|\varkappa_j|=l_j}\|D^{\varkappa_j}_{x^{(j)}}u\|_{L_q}\right). \tag{14}$$

Setzt man

$$u(x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},x_1^{(2)},\ldots,x_{n_2}^{(2)},\ldots,x_1^{(s)},\ldots,x_{n_s}^{(s)}) =$$
$$= v(c_1x_1^{(1)},\ldots,c_1x_{n_1}^{(1)},c_2x_1^{(2)},\ldots,c_2x_{n_2}^{(2)},\ldots,c_sx_1^{(s)},\ldots,c_sx_{n_s}^{(s)}),$$

$$c_1^{l_1}=c_2^{l_2}=\ldots=c_s^{l_s}=c>0, \tag{15}$$

so ist

$$D^{[\varrho]}u = D^{[\varrho]}v\cdot c_1^{|[\varrho]|_1}\ldots c_s^{|[\varrho]|_s} \tag{16}$$

und

$$\frac{|D^{[\varrho]}u-T_{z_i}D^{[\varrho]}u|}{|z_i|^{\{\varrho_i\}}} = c_1^{|[\varrho]|_1}\ldots c_{k(i)}^{|[\varrho]|_k+\{\varrho_i\}}\ldots c_s^{|[\varrho]|_s}\frac{|D^{[\varrho]}v-T_{c_kz_i}D^{[\varrho]}v|}{|c_kz_i|^{\{\varrho_i\}}}, \tag{17}$$

wobei $k=k(i)$ so gewählt werden muß, das $z_i=z_j^{(k)}$ mit einem passenden j ist. Nach entsprechender Transformation der Integrationsvariablen folgt aus (14) und (16) bzw. (17)

$$\|D^{[\varrho]}v\|_{L_q}c_1^{|[\varrho]|_1-\frac{n_1}{p}}\ldots c_s^{|[\varrho]|_s-\frac{n_s}{p}} \leqq \tag{18}$$
$$\leqq K\left(c_1^{-\frac{n_1}{q}}\ldots c_s^{-\frac{n_s}{q}}\|v\|_{L_q}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{|\varkappa_j|=l_j}\|D^{\varkappa_j}_{x^{(j)}}v\|_{L_q}c_j^{l_j}c_1^{-\frac{n_1}{q}}\ldots c_s^{-\frac{n_s}{q}}\right),$$

$$\sup_{z\in R_n}\frac{1}{|z_i|^{\{\varrho_i\}}}\|D^{[\varrho]}v-T_{z_i}D^{[\varrho]}v\|_{L_q}c_1^{|[\varrho]|_1-\frac{n_1}{p}}\ldots c_{k(i)}^{|[\varrho]|_k+\{\varrho_i\}-\frac{n_k}{p}}\ldots c_s^{|[\varrho]|_s-\frac{n_s}{p}} \leqq \tag{19}$$
$$\leqq K\left(c_1^{-\frac{n_1}{q}}\ldots c_s^{-\frac{n_s}{q}}\|v\|_{L_q}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{|\varkappa_j|=l_j}\|D^{\varkappa_j}_{x^{(j)}}v\|_{L_q}c_j^{l_j}c_1^{-\frac{n_1}{q}}\ldots c_s^{-\frac{n_s}{q}}\right)$$
$$\text{für}\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Verwendet man (15) und setzt man zur Abkürzung

$$\tau_{[\varrho]} = 1-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\sum_{r=1}^{s}\frac{n_r}{l_r}-\sum_{r=1}^{s}\frac{|[\varrho]|_r}{l_r} \geqq \tau_\varrho = \tau,$$

so folgt aus (18)

$$\|D^{[\varrho]}v\|_{L_p} \leqq K(c^{\tau_{[\varrho]}-1}\|v\|_{L_p}+c^{\tau_{[\varrho]}}\|v\|_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}}).$$

Setzt man noch

$$Kc^{\tau_{[\varrho]}} = \varepsilon,$$

so ist

$$Kc^{\tau_{[\varrho]}-1} = K'\varepsilon^{-\frac{1-\tau_{[\varrho]}}{\tau_{[\varrho]}}} \leqq c(\varepsilon_0)\varepsilon^{-\frac{1-\tau}{\tau}}\quad\text{für}\quad\varepsilon\leqq\varepsilon_0.$$

Zusammen mit den entsprechenden Abschätzungen, die nach dem gleichen Verfahren aus (19) folgen, erhält man die Behauptung (a). (b) Der Beweis verläuft vollkommen analog. Man hat lediglich in den obigen Überlegungen $p=\infty$ zu setzen und Satz 1 (b) statt Satz 1 (a) zu verwenden.

2. Einbettungssätze für beschränkte Gebiete. Wie in der Einleitung schon angekündigt, werden die Einbettungssätze für beschränkte Gebiete auf die entsprechenden Sätze für das Gebiet R_n zurückgeführt.

DEFINITION 3. *n_i, $i=1, \dots, s$, sind natürliche Zahlen, $n=\sum_{i=1}^{s} n_i$. $\Omega_i \subset R_{n_i}$ sind beschränkte Gebiete, die zur Klasse C^{l_i} (l_i gegebene natürliche Zahlen), $i=1, \dots, s$, gehören* [2])

$$\Omega = \prod_{i=1}^{s} \Omega_i \subset R_n.$$

Für den Multiindex

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_n) = (\varrho_1^{(1)}, \dots, \varrho_{n_1}^{(1)}, \varrho_1^{(2)}, \dots, \varrho_{n_2}^{(2)}, \dots, \varrho_1^{(s)}, \dots, \varrho_{n_s}^{(s)})$$

wird wie früher

$$|\varrho|_i = \sum_{j=1}^{n_i} \varrho_j^{(i)}$$

geschreiben.

$$H = \left\{ u(x) | D^\varrho u \in C(\bar{\Omega}), \sum_{i=1}^{s} \frac{|\varrho|_i}{l_i} \leqq 1, \quad \varrho_i \geqq 0 \text{ und ganz; } i = 1, \dots, s \right\}.$$

$W^{l_1 \dots l_s}_{n_1 \dots n_s, q}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von H in der Metrik

$$\|u\|_{W^{l_1 \dots l_s}_{n_1 \dots n_s, q}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\varkappa_i| \leqq l_i} \|D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u\|_{L_q(\Omega)}, \qquad 1 \leqq q \leqq \infty.$$

Ferner wird in Analogie zur Definition 1 für einen Multiindex ϱ (mit nicht notwendig ganzzahligen Komponenten), mit

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{|\varrho|_i}{l_i} \leqq 1, \quad \text{für} \quad u \in H$$

$$\|u\|_{L_{p,\varrho}(\Omega)} = \|D^{[\varrho]} u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{\substack{x \in R_n \\ x_i \neq 0}} \frac{\|D^{[\varrho]} u - T_{x_i} D^{[\varrho]} u\|_{L_p(\Omega_{x_i})}}{|x_i|^{\{\varrho_i\}}} \tag{20}$$

und

$$\|u\|_{C_\varrho(\Omega)} = \|D^{[\varrho]} u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{\substack{x \in R_n \\ x_i \neq 0}} \frac{\|D^{[\varrho]} u - T_{x_i} D^{[\varrho]} u\|_{C(\bar{\Omega}_{x_i})}}{|x_i|^{\{\varrho_i\}}} \tag{21}$$

gesetzt, sofern die entsprechenden Ausdrücke endlich sind. $\Omega_{x_i} = \Omega \cap \{-x_i + \Omega\}$, d.h. Ω_{x_i} ist der Durchschnitt von Ω mit dem um den Vektor $(0, \dots, 0, -x_i, 0, \dots, 0)$ verschobenen Gebiet Ω.

---

[2]) Ein beschränktes Gebiet $\omega \subset R_k$ gehört zur Klasse C^j, j natürliche Zahl, wenn es eine endliche Schar von Paaren konzentrischer Kugeln $K_r^{(1)}$, $K_r^{(2)}$, $r=1, \dots, N$; $\overline{K_r^{(1)}} \subset K_r^{(2)}$, gibt, so daß $\bigcup_{r=1}^{N} K_r^{(1)} \supset \partial\omega$ ist, ($\partial\omega$ Rand von ω), und jede Kugel $K_r^{(2)}$ eineindeutig und j mal stetig differenzierbar auf ein Gebiet im R_k abgebildet werden kann, wobei $K_r^{(2)} \cap \partial\omega$ in ein Ebenenstück übergeht. $K_r^{(2)} \cap \partial\omega$ soll dabei nicht leer und einfach zusammenhängend sein.

In den Formeln (20) und (21) wird $\| \|_{L_p,\varrho}$ bzw. $\| \|_{C_\varrho}$ statt $\| \|_{L_p,\varrho(\Omega)}$ und $\| \|_{C\varrho(\Omega)}$ geschrieben, wenn keine Verwechslungsmöglichkeiten bestehen. Ferner werden diese Bezeichnungen auch für Grenzelemente beibehalten.

Wenn für eine Fundamentalfolge in der Metrik $\| \|_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}}$ aus H bekannt ist, daß sie in der Metrik $\| \|_{L_q}$ eine Nullfolge ist, so ist sie auch in der Metrik $\| \|_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}}$ eine Nullfolge, so daß die Vervollständigung von H in der Metrik $\| \|_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}}$ so erfolgen kann, daß

$$W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$$

gilt.

Ergänzung 1. In der Definition 3 ist nur von beschränkten Gebieten die Rede. Die Betrachtungen dieses Abschnitts lassen sich aber auf spezielle unbeschränkte Gebiete ausdehnen. Sind die Gebiete Ω_i (oder einige dieser Gebiete) unbeschränkt, so hat man zu fordern, daß Ω_i im Sinne von BROWDER ([2], S. 28), gleichmäßig zu C^{l_i} gehört. Ferner hat man in die Gesamtheit H nur solche Funktionen aufzunehmen, die neben den genannten Differenzierbarkeitseigenschaften für hinreichend große $|x|$ identisch verschwinden.

Hilfssatz 2. *Ist Ω das Gebiet aus Definition 3 und $u(x) \in H$, so gibt es eine Fortsetzung $\tilde{u}(x)$ von $u(x)$, so daß $\tilde{u}(x)$ im R_n definiert ist, dort die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie $u(x)$ besitzt und für große Werte von $|x|$ identisch verschwindet. Ferner ist*

(22) $$\|\tilde{u}\|_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}(R_n)} \leqq c\,\|u\|_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,q}(\Omega)}$$

mit einer von u unabhängigen positiven Konstanten c.

BEWEIS. Ω_i kann man durch Paare konzentrischer Kugeln

$$K^{(1)}_{r,i}, K^{(2)}_{r,i}, r = 1, \ldots, N_i, \quad (i = 1, \ldots, s), \qquad \overline{K^{(1)}_{r,i}} \subset K^{(2)}_{r,i},$$

so überdecken, $\bigcup_{r=1}^{N_i} K^{(1)}_{r,i} \supset \Omega_i$, daß diese Überdeckung eine Fortsetzung der in der Fußnote 2 angegebenen Überdeckung des Randes $\partial\Omega_i$ ist, (die eventuell neu hinzukommenden Kugelpaare sollen ganz im Innern von Ω_i liegen). Ist $K^{(2)}_{r,i} \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$, so kann man es so einrichten, daß die in der Fußnote beschriebene Abbildung

$$y^{(i)} = f^{(i)}_r(x^{(i)})$$

$K^{(2)}_{r,i} \cap \Omega_i$ in ein Gebiet $y^{(i)}_{n_i} > o$ und $K^{(2)}_{r,i} \cap \partial\Omega_i$ in ein Stück der Ebene $y^{(i)}_{n_i} = o$ überführt.

Die Gebiete $\prod_{i=1}^{s} K^{(1)}_{r_i,i}$ überdecken $\partial\Omega$, wobei man sich auf solche Gebiete beschränken kann, für die $K^{(2)}_{r_i,i} \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$ gilt für mindestens ein i. O. B. d. A. sei $K^{(2)}_{r_i,i} \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, k \leqq s$.

(23) $$y^{(i)} = f^{(i)}_{r_i}(x^{(i)}), \qquad i = 1, \ldots, s,$$

bildet $\prod_{i=1}^{s} K^{(2)}_{r_i,i} \cap \Omega$ auf ein Gebiet

$$y^{(1)}_{n_1} > 0, \ldots, y^{(s)}_{n_s} > o$$

ab, wobei $\prod_{i=1}^{s} K_{r_i,i}^{(2)} \cap \partial\Omega$ in Stücke der Ebenen $y_n^{(j)}=o$, $j=1, \ldots, k$, übergeht. Ist $\chi_{r_1 \ldots r_s}(x) \in C_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{s} K_{r_i,i}^{(1)}\right)$ eine Zerlegung der Einheit ([5], S. 4), d. h. $\sum_{r_j} \chi_{r_1 \ldots r_s}(x)=1$ für $x \in \Omega$, so wird $\chi_{r_1 \ldots r_s}(x)u(x)$, $u(x) \in H$, durch (23) in den y-Raum transformiert: $v(y)$. Diese Funktion besitzt die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie $u(x)$. Nach dem Verfahren von Fichtenholz ([3], S. 550), kann man $v(y)$ so über die Ebenen $y_{n_j}^{(j)}=0, j=1, \ldots, k$, fortsetzen, daß die Fortsetzung $\tilde{v}(y)$ außerhalb des Bildes von $\prod_{i=1}^{s} K_{r_i,i}^{(1)}$ identisch verschwindet, die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie $v(y)$ besitzt und daß

$$\|\tilde{v}\|_{W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}(R_n)} \leqq c\,\|v\|_{W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}} \left(R_n \cap \{y_{n_j}^{(j)} > 0, \quad j=1, \ldots, k\}\right)$$

gilt. $c>0$, unabhängig von v.

Transformation auf die Variablen x_i, Berücksichtigung der Wahl von $\chi_{r_1 \ldots r_s}(x)$, Addition sämtlicher Funktionen $\tilde{u}_{r_1 \ldots r_s}(x)$, die auf diese Weise entstehen und Verwendung der letzten Abschätzung führen zum Beweis des Hilfssatzes.

Ergänzung 2. Der Hilfssatz 2 bleibt richtig, wenn Ω_i im Sinne von Ergänzung 1 gleichmäßig zu C^{l_i} gehören.

Der nachfolgende Satz ist die Übertragung von Satz 2 auf beschränkte Gebiete.

Satz 3. *ϱ ist ein Multiindex wie im Satz* 1. *Ω ist ein Gebiet im Sinne der Definition* 3.

(a) *Ist* $1 \leqq q \leqq 2 \leqq p$ *und*

$$\tau = 1-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{l_j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{|\varrho|_j}{l_j} > 0,$$

so ist für jedes ε, $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$,

$$\|u\|_{L_{p,\varrho}(\Omega)} \leqq \varepsilon\,\|u\|_{W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}(\Omega)} + c\varepsilon^{-\frac{1-\tau}{\tau}}\|u\|_{L_q(\Omega)}$$

für $u \in W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}(\Omega)$ *mit einer von* u *und* ε *unabhängingen positiven Konstanten* $c=c(\varepsilon_0)$.

(b) *Ist* $q \leqq 2$ *und*

$$\tau = 1-\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{l_j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{|\varrho|_j}{l_j} > o,$$

so ist für jedes ε, $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$,

$$\|u\|_{C_\varrho(\Omega)} \leqq \varepsilon\,\|u\|_{W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}(\Omega)} + c\varepsilon^{-\frac{1-\tau}{\tau}}\|u\|_{L_q(\Omega)}$$

für $u \in W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}(\Omega)$ *mit einer von* u *und* ε *unabhängigen positiven Konstanten* $c=c(\varepsilon_0)$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Hilfssatz 2 und Satz 2. Nach Definition 3 kann man sich auf Funktionen $u(x)$ aus H beschränken. Setzt man u im Sinne des Hilfssatzes 2 fort, so ist

$$\tilde{u} \in W_{n_1 \ldots n_s,q}^{l_1 \ldots l_s}(R_n),$$

wie man sofort durch Betrachtung der Mittelfunktionen $\tilde{u}_\delta$, $\delta > 0$, $u_\delta \in C_0^\infty(R_n)$, und durch anschließenden Grenzübergang $\delta \to o$ in der Metrik $\| \;\|_{W^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, q}(R_n)}$ feststellt. Für $\tilde{u}$ gilt Satz 2. Daraus folgt aber unter Berücksichtigung von (22) der Satz.

Ergänzung 3. Satz 3 bleibt richtig, wenn Ω_i im Sinne der Ergänzung 1 gleichmäßig zu C^{l_i} gehört.

Hilffssatz 3. *Die Normen* $\|u\|_{W^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, q}(\Omega)}$ *und*

$$\|u\|^*_{W^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, q}(\Omega)} \leqq \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\varkappa_i| = l_i} \|D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}} u\|_{L_q(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega)}$$

sind äquivalent. $u \in W^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, q}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt, $u \in H$ zu betrachten. Fixiert man $x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}$, so folgt nach Sobolew ([7], S. 73)

$$\sum_{0 < |\varkappa_1| < l_1} \|D^{\varkappa_1}_{x^{(1)}} u(x^{(1)}, x^{(2)} \ldots, x^{(s)})\|^q_{L_q(\Omega_1)} \leqq c \Big(\sum_{|\varkappa_1| = l_1} \|D^{\varkappa_1}_{x^{(1)}} u\|^q_{L_q(\Omega_1)} + \|u\|^q_{L_q(\Omega_1)} \Big).$$

Integration über $\Omega_2, \ldots, \Omega_s$ und Addition mit den entsprechenden Abschätzungen in denen $x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}$ ausgezeichnet sind, führen zum Beweis des Hilfssatzes.

Definition 4. (a) *Ist $\Omega \subset R_n$ ein beliebiges Gebiet, so ist* $\overset{\circ}{W}{}^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2}(\Omega)$ *die Vervollständigung von* $C_0^\infty(\Omega)$ *in der Metrik* $\| \;\|_{W^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2}}$.

(b) $\Omega_i \subset R_{n_i}$ *sind beschränkte Gebiete, die zur Klasse C^{2l_i} gehören, (n_i und l_i sind gegebene natürliche Zahlen, $i = 1, \ldots, s$).*

$$\Omega = \prod_{i=1}^{s} \Omega_i.$$

$$K = K(\Omega) = \left\{ u(x) \,\middle|\, D^\varrho u \in C(\bar{\Omega}) \text{ für } \sum_{i=1}^{s} \frac{|\varrho|_i}{2l_i} \leqq 1, D^\varkappa u \Big|_{\partial\Omega} \equiv 0 \text{ für } \sum_{i=1}^{s} \frac{|\varkappa|_i}{l_i} < 1 \right\},$$

(ϱ und $\varkappa$ Multiindizes im Sinne von Satz 1). $W^{2l_1 \ldots 2l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2, 0}(\Omega)$ *ist die Vervollständigung von K in der Metrik* $\|u\|_{W^{2l_1 \ldots 2l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2}}$.

(c) *Ist τ wie früher ein Multiindex mit nicht notwendig ganzzahligen Komponenten, so ist* $L_{p,\tau,0}(\Omega)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, $\sum_{i=1}^{s} \frac{|\tau|_i}{2l_i} \leqq 1$, *die Vervollständigung von K in der Metrik* $\| \;\|_{L_{p,\tau}}$, (20). *Entsprechend ist* $C_{\tau,0}(\Omega)$ *die Vervollständigung von K in der Metrik* $\| \;\|_{C_\varrho}$, (21).

Hilfssatz 4. (a) *Ist* $\Omega = \prod_{i=1}^{s} \Omega_i$, $\Omega_i \subset R_{n_i}$, Ω_i *beschränkt, so ist die lineare Hülle der Funktionen*

$$\prod_{i=1}^{s} v_i(x^{(i)}), \;\; v_i(x^{(i)}) \in C_0^\infty(\Omega_i),$$

in $\overset{\circ}{W}{}^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2}$ *eine dichte Menge. Ist* $w_i(x^{(i)}) \in \overset{\circ}{W}{}^{l_i}_{n_i, 2}(\Omega_i)$, *so gehört* $\prod_{i=1}^{s} w_i(x^{(i)})$ *zu* $\overset{\circ}{W}{}^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2}(\Omega)$.

(b) $\Omega=\prod_{i=1}^{s}\Omega_i$, $\Omega_i\subset R_{n_i}$ *beschränkte Gebiete, die zur Klasse* C^{2l_i+1} *gehören. Die lineare Hülle der Funktionen* $\prod_{i=1}^{s} v_i(x^{(i)})$ *mit*

$$D^{\varkappa_i}_{x^{(i)}}v_i(x^{(i)})\in C(\bar{\Omega}_i)\quad \text{für}\quad 0\leqq|\varkappa_i|\leqq 2l_i,$$

$$D^{\lambda_i}_{x^{(i)}}v_i(x^{(i)})|_{\partial\Omega_i}=0\quad \text{für}\quad 0\leqq|\lambda_i|\leqq l_i-1,$$

ist in $W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}(\Omega)$ *eine dichte Menge. Gehört* $w_i(x^{(i)})$ *zu* $W^{2l_i}_{n_i,2,0}(\Omega_i)$, $i=1,\ldots,s$, *so liegt*

$$\prod_{i=1}^{s} w_i(x^{(i)})\quad \textit{in}\quad W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}(\Omega).$$

Beweis. (a). Ist $w(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, so kann man Funktionen $\chi_i(x^{(i)})\in C_0^\infty(\Omega_i)$ finden, so daß $w(x)=w(x)\chi(x)$, $\chi(x)=\prod_{i=1}^{s}\chi_i(x^{(i)})$ ist. In einem beschränkten Gebiet ω, $\bar{\Omega}\subset\omega$, kann man $w(x)$ einschließlich sämtlicher Ableitungen bis zu einer vorgegebenen Ordnung beliebig gut durch Polynome $P_N(x)$ gleichmäßig approximieren. $\chi(x)P_N(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ approximiert ebenfalls $w(x)$. Daraus folgt die erste Behauptung. $w_i(x^{(i)})\in \overset{\circ}{W}{}^{l_i}_{n_i,2}(\Omega_i)$ kann man durch glatte Funktionen approximieren und damit auch $\prod_{i=1}^{s}w_i(x^{(i)})$.

(b) Betrachtet man im Gebiet Ω_r das Dirichletsche Problem mit verschwindenden Randwerten für den Operator $(-\Delta_{x^{(r)}})^{l_r}$, so sind die Eigenfunktionen $u_{j_r}(x^{(r)})$ in $\bar{\Omega}_r$ $2l_r$ mal stetig differenzierbar und sämtliche Ableitungen bis zu Ordnung l_r-1 einschließlich verschwinden am Rand. Das folgt aus den Sobolewschen Einbettungssätzen [7], S. 72, sowie den Theoremen 4 und 10 aus [2], (nach Voraussetzung gehört Ω_r zur Klasse C^{2l_r+1}). Somit ist der Operator

$$B=\sum_{i=1}^{s}(-\Delta_{x^{(i)}})^{l_i}$$

auf der linearen Hülle der Funktionen $\prod_{r=1}^{s}u_{j_r}(x^{(r)})$ wesentlich selbstadjungiert, sein Abschluß ist also selbstadjungiert. Andererseits ist B auf K symmetrisch. Daraus folgt, daß K im Abschluß der linearen Hülle der Funktionen $\prod_{r=1}^{s}u_{j_r}(x^{(r)})$ in der Metrik $\|Bu\|+\|u\|$ enthalten sein muß. Später wird gezeigt, daß die Normen $\|Bu\|+\|u\|$ und $\|u\|_{W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2}}$ äquivalent sind, (man vergleiche Fußnote 4). Daraus folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt wie beim Beweis von (a).

II. Hypoelliptische Differentialoperatoren

3. Voraussetzungen und vorbereitende Betrachtungen. Die nachstehend formulierten Voraussetzungen sollen (mit Ausnahme des letzten Abschnittes, wo gewisse Verallgemeinerungen betrachtet werden) bei den kommenden Überlegungen stets erfüllt sein. n_i und l_i sind natürliche Zahlen, $i=1, \ldots, s$, $n=\sum_{i=1}^{s} n_i$. $\Omega_i \subset R_{n_i}$ sind beschränkte Gebiete, die zur Klasse C^{4l_i} gehören. $x=(x_1, \ldots, x_n)=(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(s)}, \ldots, x_{n_s}^{(s)})$. D^α und $D^\alpha_{x^{(i)}}$ haben die gleiche Bedeutung wie früher. In Ω_i wird der streng elliptische und formal selbstadjungierte Differentialoperator der Ordnung $2l_i$

$$A_i = \sum_{|\alpha| \leqq 2l_i} a_\alpha^{(i)}(x^{(i)}) D^\alpha_{x^{(i)}}, \quad a_\alpha^{(i)}(x^{(i)}) \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega}_i),$$

(d. h., die komplexen Funktionen $a_\alpha^{(i)}$ besitzen in $\bar{\Omega}_i$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung $|\alpha|$ einschließlich) betrachtet. A_i formal selbstadjungiert bedeutet, daß für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_i)$

$$\sum_{|\alpha| \leqq 2l_i} a_\alpha^{(i)}(x^{(i)}) D^\alpha_{x^{(i)}} \varphi = \sum_{|\alpha| \leqq 2l_i} D^\alpha_{x^{(i)}} (\overline{a_\alpha^{(i)}} \varphi)$$

ist. Daraus folgt, daß die Funktionen $a_\alpha^{(i)}$ mit $|\alpha| = 2l_i$ reell sind. A_i heißt streng elliptisch, wenn für jeden Punkt $x^{(i)} \in \bar{\Omega}_i$ und für jeden reellen Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n_i})$

$$\sum_{|\alpha| = 2l_i} a_\alpha^{(i)}(x^{(i)}) \xi^\alpha \geqq c_i |\xi|^{2l_i}, \quad c_i > o,$$

gilt,

$$\xi^\alpha = \prod_{j=1}^{n_i} \xi_j^{\alpha_j}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}), \quad |\xi|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j^2.$$

Im Sinne von Browder ([2], S. 28) ist A_i wesentlich reell und somit regulär ([2], S. 44). Daraus folgt:

(a) A_i (betrachtet als Operator im Raum $L_2(\Omega)$) ist auf $\overset{\circ}{W}{}^{2l_i}_{n_i, 2, 0}(\Omega_i)$ selbstadjungiert und halbbeschränkt;

(b) für hinreichend große ξ existiert demzufolge $(A+\xi E)^{-1}$, E ist der Einheitsoperator, und ist vollstetig;

(c) für $u \in W^{2l_i}_{n_i, 2, 0}(\Omega_i)$ ist

$$((A_i + \xi E)u, u)_{L_2(\Omega_i)} \geqq c_i \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{l_i}_{n_i, 2}(\Omega_i)}, \quad c_i > o, \tag{24}$$

([2], S. 75—76). (24) läßt sich auch in der Form

$$((A_i + \xi E)u, u)_{L_2(\Omega_i)} \geqq c_i((-\Delta_{x^{(i)}})^{l_i} u + u, u)_{L_2(\Omega_i)} \tag{25}$$

schreiben, wie durch partielle Integration unter Verwendung von Hilfssatz 3 mit $s=1$ und $q=2$ folgt. Bezeichnet man die Eigenfunktionen von A_i mit $u_j^{(i)}(x^{(i)})$, $j=1, 2, \ldots$, und die Eigenwerte von A_i mit $\lambda_j^{(i)}$, also

$$A_i u_j^{(i)} = \lambda_j^{(i)} u_j^{(i)}, \quad (u_j^{(i)} \text{ orthogonal}), \tag{26}$$

und entsprechend die Eigenwerte von $(-\Delta_{x^{(i)}})^{l_i} + 1$ mit $v_j^{(i)}$, so folgt aus (25) nach dem Variationsprinzip von Courant

$$\lambda_j^{(i)} + \xi \geqq c_i v_j^{(i)}, \quad \xi \text{ hinreichend groß}, \ c_i > 0.$$

Aus dieser Abschätzung und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(v_j^{(i)})^\tau} < \infty \quad \text{für} \quad \tau > \frac{n_i}{2l_i}$$

([10], S. 329), erhält man

$$(27) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_j^{(i)}+\xi)^{\tau}} < \infty \quad \text{für} \quad \tau > \frac{n_i}{2l_i}.$$

(Da $(A_i+\xi E)^{-1}$ vollstetig ist, besitzt A_i ein reines Punktspektrum).

4. Selbstadjungierte hypoelliptische Differentialoperatoren. Betrachtet man im Gebiet $\Omega=\prod_{i=1}^{s} \Omega_i$, (die Gebiete Ω_i genügen den Voraussetzungen des Abschnitts 3), den Operator

$$\mathring{A} = \sum_{i=1}^{s} A_i = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\alpha_i| \leqq 2l_i} a_{\alpha_i}^{(i)}(x^{(i)}) D_{x^{(i)}}^{\alpha_i},$$

so ist $\mathring{A}$ (aufgefaßt als Operator in $L_2(\Omega)$) auf der linearen Hülle der Eigenfunktionen

$$(29) \qquad \prod_{i=1}^{s} u_{j_i}^{(i)}(x^{(i)})$$

wesentlich selbstadjungiert [3]). Von Interesse ist, wann $\mathring{A}+B$ mit

$$B=\sum b_\alpha(x) D^\alpha$$

auf der gleichen Menge wesentlich selbstadjungiert ist.

Satz 4. *Ω_i und A_i haben die im Abschnitt* 3 *angegebene Bedeutung.*

$$\Omega = \prod_{i=1}^{s} \Omega_i \subset R_n = \prod_{i=1}^{s} R_{n_i},\; x=(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(s)}, \ldots, x_{n_s}^{(s)}).$$

Für den Multiindex α wird wie üblich

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{n_1}^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(s)}, \ldots, \alpha_{n_s}^{(s)})$$

geschrieben.

$$|\alpha|_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^{(i)}.$$

Ist

$$B = \sum_{|\alpha:2l|<1} b_\alpha(x) D^\alpha, \qquad |\alpha:2l| = \sum_{i=1}^{s} \frac{|\alpha|_i}{2l_i}, \qquad b_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(\Omega),$$

(d. h., sämtliche Ableitungen von $b_\alpha(x)$ bis zur Ordnung $|\alpha|$ einschließlich sind in Ω stetig, während über das Verhalten am Rand von Ω nichts ausgesagt wird) und

$$b_\alpha(x) \in L_{q_\alpha}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \infty \geqq q_\alpha > \frac{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i}}{1-|\alpha:2l|}, \qquad q_\alpha \geqq 2,$$

---

[3]) Ein Operator heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn sein Abschluß selbstadjungiert ist.

formal selbstadjungiert, d. h.

$$\sum_{|\alpha:2l|<1} b_\alpha(x) D^\alpha \varphi = \sum_{|\alpha:2l|<1} D^\alpha\left(\overline{b_\alpha(x)}\varphi\right) \quad \text{für} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

so ist der Operator (betrachtet in $L_2(\Omega)$)

$$A = \sum_{i=1}^{s} A_i + B$$

auf K (Definition 4b*) wesentlich selbstadjungiert und auf $W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}$ selbstadjungiert.*

Beweis. 1. *Schritt.* Die lineare Hülle der Eigenfunktionen (29) des Operators $\mathring{A}$, (28), wird mit L bezeichnet. $L \subset W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}$ wie durch Approximation von $u^{(r)}_{j_r}(x^{(r)}) \in W^{2l_r}_{n_r,2,0}(\Omega_r)$ durch glatte Funktionen folgt. Die Operatoren A_i sind halbbeschränkt, so daß die Eigenwerte $\lambda^{(i)}_j + \xi_i$, ξ_i hinreichend groß, positiv sind. Es sei $u \in L$ und $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_s$.

$$\|\mathring{A}u + \xi u\|^2 = \|(\mathring{A} + \xi E) \sum_{j_r} u^{(1)}_{j_1}(x^{(1)}) \ldots u^{(s)}_{j_s}(x^{(s)})\|^2 = \tag{30}$$

$$= \sum_{j_r} (\lambda^{(1)}_{j_1} + \ldots + \lambda^{(s)}_{j_s} + \xi)^2 \|u^{(1)}_{j_1} \ldots u^{(s)}_{j_s}\|^2.$$

Es ist

$$c_1 \sum_{j_r} [(\lambda^{(1)}_{j_1} + \xi_1)^2 + \ldots + (\lambda^{(s)}_{j_s} + \xi_s)^2] \leqq \sum_{j_r} (\lambda^{(1)}_{j_1} + \ldots + \lambda^{(s)}_{j_s} + \xi)^2 \leqq \tag{31}$$

$$\leqq c_2 \sum_{j_r} [(\lambda^{(1)}_{j_1} + \xi_1)^2 + \ldots + (\lambda^{(s)}_{j_s} + \xi_s)^2],$$

$c_1, c_2 > 0$. Aus

$$\sum_{j_r} [(\lambda^{(1)}_{j_1} + \xi_1)^2 + \ldots + (\lambda^{(s)}_{j_s} + \xi_s)^2] \|u^{(1)}_{j_1} \ldots u^{(s)}_{j_s}\|^2_{L_2} = \sum_{j=1}^{s} \|A_j u + \xi_j u\|^2_{L_2},$$

$$\|A_j u + \xi_j u\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_{\substack{\Pi\, \Omega_i \\ i \neq j}} \prod_{i \neq j} dx^{(i)} \int_{\Omega_j} |A_j u + \xi_j u|^2 \, dx^{(j)} \geqq$$

$$\geqq c \int_{\substack{\Pi\, \Omega_i \\ i \neq j}} \prod_{i \neq j} dx^{(i)} \int_{\Omega_j} \sum_{0 \leqq |\varkappa_j| \leqq 2l_j} |D^{\varkappa_j}_{x^{(j)}} u|^2 \, dx^{(j)}$$

([2], S. 44), und den Formeln (30) und (31) folgt

$$c_1 \|u\|^2_{W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2}} \leqq \|\mathring{A}u + \xi u\|^2 \leqq c_2 \|u\|^2_{W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2}}, \quad u \in L. \;^{4)} \tag{32}$$

Da $\mathring{A}$ auf K symmetrisch ist, folgt aus dieser Formel wie im Hilfssatz 4b, daß $\mathring{A}$ auf $W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}$ selbstadjungiert und damit auf K wesentlich selbstadjungiert ist.

2. *Schritt.* Für $u \in K$ ist

$$\|Bu\|^2 \leqq c \sum_{|\alpha:2l|<1} \int_\Omega |b_\alpha|^2 |D^\alpha u|^2 \, dx \leqq c \sum_{|\alpha:2l|<1} \left(\int_\Omega |b_\alpha|^{q_\alpha} dx\right)^{2/q_\alpha} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha} dx\right)^{2/p_\alpha}$$

[4]) Diese Formel schließt auch die Lücke im Beweis des Hilfssatzes 4b, so daß dieser Hilfssatz ab jetzt verwendet werden darf.

mit
$$\frac{1}{p_\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{1}{q_\alpha}, \text{ also}$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_\alpha}\right)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{2l_i}-1+\sum_{i=1}^{s}\frac{|\alpha|_i}{2l_i}<0.$$
Aus Satz 3a folgt dann

$$\|Bu\|^2 \leqq \varepsilon\|u\|^2_{W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}}+c\|u\|^2_{L_2} \leqq \delta\|\mathring{A}u\|^2_{L_2}+c\|u\|^2_{L_2}, \tag{33}$$

wobei man $\delta<1$ erreichen kann.

Der Satz folgt aus Schritt 1, der letzten Abschätzung und dem bekannten Kriterium von KATO ([4], S. 163 und 164).

5. Eigenwerte und Eigenfunktionen hypoelliptischer Differentialoperatoren. Während im Satz 4 nur gefordert wurde, daß $b_\alpha(x)$ zu $C^{|\alpha|}(\Omega)$ gehört, soll ab jetzt stets
$$b_\alpha(x)\in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$$
gelten, d. h., sämtliche Ableitungen von $b_\alpha(x)$ bis zur Ordnung $|\alpha|$ einschließlich existieren und sind im Gebiet $\bar{\Omega}$ stetig.

Hilfssatz 5. *Ω und A haben die Bedeutung aus Satz 4. B sei wie dort formal selbstadjungiert und*
$$b_\alpha(x)\in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega}).$$

Dann gilt für $u\in K$ (und damit nach Grenzübergang auch für $u\in W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}$)
$$|(Bu,u)| \leqq \varepsilon\|u\|^2_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,2}}+c\|u\|^2_{L_2}, \qquad 1\geqq\varepsilon>0,\ \varepsilon \text{ beliebig.}$$

BEWEIS. 1. *Fall.* Für den Multiindex α, $\sum_{i=1}^{s}\frac{|\alpha|_i}{2l_i}<1$, existiere ein i mit $|\alpha|_i\geqq l_i$, o. B. d. A. sei $i=1$. Dann kann man einen Multiindex $\beta=(\beta_1^{(1)},\ldots,\beta_{n_1}^{(1)},0,\ldots,0)$, $\beta_j^{(1)}\leqq\alpha_j^{(1)}$, $|\beta|=|\beta|_1=l_1$, bestimmen. Für $u\in K$ ist
$$\left|\int_\Omega b_\alpha(x)\,D^\alpha u\cdot\bar{u}\,dx\right|=\left|\int_\Omega D^{\alpha-\beta}u\overline{D^\beta_{x^{(1)}}(\bar{b}_\alpha u)}\,dx\right|\leqq$$
$$\leqq\varepsilon\|D^\beta_{x^{(1)}}(\bar{b}_\alpha u)\|^2_{L_2}+c\|D^{\alpha-\beta}u\|^2_{L_2}\leqq\varepsilon\|u\|^2_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,2}}+c(\delta\|u\|^2_{W^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,2}}+c\|u\|^2_{L_2}),$$
$\varepsilon>o$, $\delta>o$, beliebig, da
$$\sum_{i=1}^{s}\frac{|\alpha-\beta|_i}{l_i}=\sum_{i=1}^{s}\frac{|\alpha|_i-|\beta|_i}{l_i}<1$$
gilt und somit Satz 3a anwendbar ist.

2. *Fall.* Für den Multiindex α, $\sum_{i=1}^{s}\frac{|\alpha|_i}{2l_i}<1$, gelte $|\alpha|_i<l_i$ für $i=1,\ldots,s$. Für $u\in K$ werden die Funktionen $D^\beta u$, $\sum_{i=1}^{s}\frac{|\beta|_i}{2l_i}<1$, mit Null außerhalb Ω fortgesetzt,

(auch für diese Fortsetzungen werden die Bezeichnungen $D^\beta u$ beibehalten). Wegen $|\alpha|_i < l_i$ folgt durch partielle Integration

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R_n} e^{-i(x,\xi)} D^\alpha u(x)\, dx = \xi^\alpha \hat{u}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Ferner ist

$$|\xi^\alpha| \leqq c|\xi|_1^{|\alpha|_1} \dots |\xi|_s^{|\alpha|_s} \leqq c + \varepsilon(|\xi|_1^{2l_1} + \dots + |\xi|_s^{2l_s}).$$

Daraus folgt

$$\Big|\int_\Omega D^\alpha u \cdot b_\alpha \cdot \bar{u}\, dx\Big| = \Big|\int_{R_n} \widehat{D^\alpha u}\, \overline{\widehat{b_\alpha u}}\, d\xi\Big| \leqq \int_{R_n} |\xi^\alpha|\, |\hat{u}|\, |\widehat{b_\alpha u}|\, d\xi \leqq$$

$$\leqq \Big(\int_{R_n} |\xi^\alpha|\, |\hat{u}|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{R_n} |\xi^\alpha|\, |\widehat{b_\alpha u}|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \Big(\int_{R_n} [c|\hat{u}|^2 + \varepsilon(|\xi|_1^{2l_1}|\hat{u}|^2 + \dots + |\xi|_s^{2l_s}|\hat{u}|^2)]\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{R_n} [c|\widehat{b_\alpha u}|^2 + \varepsilon(|\xi|_1^{2l_1}|\widehat{b_\alpha u}|^2 + \dots +$$

$$+ |\xi|_s^{2l_s}|\widehat{b_\alpha u}|^2)]\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqq c\|u\|_{L_2}^2 + \varepsilon\|u\|^2_{W^{l_1 \dots l_s}_{n_1 \dots n_s, 2}}$$

Daraus folgt der Hilfssatz.

Hilfssatz 5 gibt die Möglichkeit, Aussagen über die Eigenwertverteilung des Operators A aus Satz 4 zu machen.

Satz 5. *Ist A der auf $W^{2l_1 \dots 2l_s}_{n_1 \dots n_s, 2, 0}(\Omega)$ definierte selbstadjungierte Operator aus Satz 4, wobei wie im Hilfssatz 5*

$$b_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$$

sein soll, so besitzt A ein reines Punktspektrum, seine Eigenwerte seien λ_i, $i = 1, 2, \dots$, und für hinreichend große ξ ist

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_i + \xi)^\varkappa} < \infty \quad \text{für} \quad \varkappa > \sum_{i=1}^s \frac{n_i}{2l_i}. \tag{34}$$

Beweis. Setzt man wie in Formel (28)

$$\mathring{A} = \sum_{i=1}^s A_i,$$

so folgt für $u \in K$ aus (24), daß für hinreichend große ξ_1

$$(\mathring{A}u + \xi_1 u, u) \geqq c\|u\|^2_{\mathring{W}^{l_1 \dots l_s}_{n_1 \dots n_s, 2}}$$

gilt. Hilfssatz 5 führt zu

$$(\mathring{A}u + Bu + \xi_2 u, u) \geqq c\|u\|^2_{\mathring{W}^{l_1 \dots l_s}_{n_1 \dots n_s, 2}} \geqq c'(\mathring{A}u + \xi_1 u, u). \tag{35}$$

(ξ_2 hinreichend groß). Grenzübergang zeigt, daß die letzte Formel auch für $u \in W^{2l_1 \dots 2l_s}_{n_1 \dots n_s, 2, 0}$ richtig ist. $\lambda_j^{(i)}$ sind die Eigenwerte von A_i, (26). Also sind

$$\sum_{i=1}^s \lambda_{j_i}^{(i)} + \xi_1 > o$$

die Eigenwerte des Operators $\mathring{A}+\xi E$. Es ist

$$\sum_{j_r} (\lambda_{j_1}^{(1)}+\ldots+\lambda_{j_s}^{(s)}+\xi_1)^{-\varkappa_1-\ldots-\varkappa_s} \leqq \sum_{j_r} (\lambda_{j_1}^{(1)}+\eta_1)^{-\varkappa_1}\ldots(\lambda_{j_s}^{(s)}+\eta_s)^{-\varkappa_s} =$$

$$= \prod_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{(i)}+\eta_i)^{-\varkappa_i}\right) < \infty$$

für $\varkappa_i > \frac{n_i}{2l_i}$ nach Formel (27). $\left(\eta_j, \xi_1=\sum_{j=1}^{s}\eta_j,\right.$ hinreichend groß gewählt$\left.\right)$. Aus dieser Abschätzung, Formel (35) und dem Variationsprinzip von Courant folgt der Satz.

Satz 6. *A ist wieder der auf* $W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}(\Omega)$ *definierte selbstadjungierte Operator aus Satz 5,* $u_i(x)$ *sind seine orthonormierten Eigenfunktionen,* λ_i *die zugehörigen Eigenwerte, d. h.*

$$Au_i=\lambda_i u_i, \quad (u_i, u_j)=\delta_{ij}.$$

Für den Multiindex ϱ *wird wie früher die Schreibweise*

$$\varrho=(\varrho_1,\ldots,\varrho_n)=(\varrho_1^{(1)},\ldots,\varrho_{n_1}^{(1)},\varrho_1^{(2)},\ldots,\varrho_{n_2}^{(2)},\ldots,\varrho_1^{(s)},\ldots,\varrho_{n_s}^{(s)}),$$

$$|\varrho|_i=\sum_{j=1}^{n_i}\varrho_j^{(i)}$$

verwendet.

(a) *Ist* $p\geqq 2$ *und*

$$\tau_{\varrho,p}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{2l_i}-\sum_{i=1}^{s}\frac{|\varrho|_i}{2l_i}>0,$$

so ist

$$\|u_i\|_{L_{p,\varrho}(\Omega)}\leqq c(\lambda_i+\xi)^{1-\tau_{\varrho,p}},\ \xi \text{ hinreichend groß.}$$

(b) *Ist*

$$\tau_\varrho=1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{2l_i}-\sum_{i=1}^{s}\frac{|\varrho|_i}{2l_i}>0,$$

so ist

$$\|u_i\|_{C_\varrho(\Omega)}\leqq c(\lambda_i+\xi)^{1-\tau_\varrho},\ \xi \text{ hinreichend groß.}$$

(Die Normen $\|\ \|_{L_{p,\varrho}(\Omega)}$ und $\|\ \|_{C_\varrho(\Omega)}$ wurden in der Definition 3, (20), (21), angegeben.)

Beweis. (a) Nach Satz 3a ist

$$\|u_i\|_{L_{p,\varrho}}\leqq \varepsilon\|u_i\|_{W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2}}+c\varepsilon^{-\frac{1-\tau_{\varrho,p}}{\tau_{\varrho,p}}}. \tag{36}$$

Aus den Abschätzungen (32) und (33) folgt

$$\|u_i\|_{W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}}\leqq c\|Au_i+\xi u_i\|\leqq c(\lambda_i+\xi),$$

ξ hinreichend groß. Aus dieser Abschätzung und (36) erhält man für

$$\varepsilon = \frac{1}{(\lambda_i + \xi)^{\tau_{\varrho,p}}}$$

die Behauptung (a).

(b) folgt analog aus Satz 3b.

6. Existenz und Eigenschaften Greenscher Funktionen. Wie in [10] kann man aus den Aussagen über Eigenwerverteilungen die Existenz Greenscher Funktionen herleiten, sowie Differenzierbarkeitseigenschaften gewinnen.

Satz 7. *A ist wieder der auf* $W^{2l_1 \dots 2l_s}_{n_1 \dots n_s, 2, 0}(\Omega)$ *definierte selbstadjungierte Operator. aus Satz* 5.

(a) *Ist* $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} < 2$, *so ist* $(A+\xi E)^{-1}$ *für hinreichend große* ξ *ein selbstadjungierter Hilbert—Schmidt Operator und gestattet somit die Darstellung*

$$[(A+\xi E)^{-1} f](x) = \int_{\Omega} G_\xi(x, y) f(y)\, dy, \quad G_\xi(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega), \quad f(y) \in L_2(\Omega) \tag{37}$$

(b) *Ist* $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} < 1$, *so gehört* $(A+\xi E)^{-1}$ *zur Spurklasse und in* (37) *ist*

$$G_\xi(x, y) \in \mathring{W}^{l_1 \dots l_s}_{2n_1 \dots 2n_s, 2}(\Omega \times \Omega). \tag{38}$$

(c) *Ist* $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} < 1$ *und für* $p \geqq 2$

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{l_i} \left(|\varrho|_i + n_i - \frac{2}{p} n_i \right) < 1$$

mit

$$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_{2n}) = (\varrho_1^{(1)}, \dots, \varrho_{2n_1}^{(1)}, \varrho_1^{(2)}, \dots, \varrho_{2n_2}^{(2)}, \dots, \varrho_1^{(s)}, \dots, \varrho_{2n_s}^{(s)}),$$

so ist

$$G_\xi(x, y) \in L_{p,\varrho,0}(\Omega \times \Omega).$$

(d) *Ist* $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} < 1$ *und* $\sum_{i=1}^{s} \frac{|\varrho|_i + n_i}{l_i} < 1$, *wobei* ϱ *die gleiche Bedeutung wie in* (c) *hat, so ist*

$$G_\xi(x, y) \in C_{\varrho,0}(\Omega \times \Omega).$$

(Die Räume $L_{p,\varrho,0}$ und $C_{\varrho,0}$ wurden in Definition 4c erklärt, wobei man jetzt n_i durch $2n_i$ zu ersetzen hat).

Beweis. (a) Aus (34) folgt, daß man im Fall (a) $\varkappa = 2$ setzen darf, also $(A+\xi E)^{-1}$ ein Hilbert—Schmidt Operator ist. Ferner gilt (37) mit

$$G_\xi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i + \xi} u_i(x) \overline{u_i(y)} \in L_2(\Omega \times \Omega),$$

wobei wie früher $u_i(x)$ die orthonormierten Eigenfunktionen des Operators A und λ_i die zugehörigen Eigenwerte sind.

(b) Nach (34) ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i+\xi} < \infty$$

und somit $(A+\xi E)^{-1}$ ein Operator der Spurklasse.

(39) $$G_\xi^N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(x)\overline{u_i(y)}}{\lambda_i+\xi} \in \mathring{W}^{l_1\ldots l_s}_{2n_1\ldots 2n_s,2}(\Omega\times\Omega),$$

da

$$u_i(x)\overline{u_i(y)} \in \mathring{W}^{l_1\ldots l_s}_{2n_1\ldots 2n_s,2}(\Omega\times\Omega)$$

nach Hilfssatz 4a ist. Bezeichnet man die Koordinaten des Gebietes $\Omega\times\Omega$ mit

$$(x,y) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) =$$
$$= (x_1^{(1)},\ldots,x_{n_1}^{(1)},\ldots,x_1^{(s)},\ldots,x_{n_s}^{(s)},y_1^{(1)},\ldots,y_{n_1}^{(1)},\ldots,y_1^{(s)},\ldots,y_{n_s}^{(s)}),$$

so wird vorübergehend

$$A_{(x)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\alpha_i|\leqq 2l_i} a_{\alpha_i}^{(i)}(x^{(i)})D_{x^{(i)}}^{\alpha_i} + \sum_{|\alpha:2l|<1} b_\alpha(x)D_x^\alpha$$

und

$$\bar{A}_{(y)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\alpha_i|\leqq 2l_i} \overline{a_{\alpha_i}^{(i)}(y^{(i)})}\,\overline{D_{y^{(i)}}^{\alpha_i}} + \sum_{|\alpha:2l|<1} \overline{b_\alpha}(y)\overline{D_y^\alpha}$$

gesetzt. Dann ist

$$J_{N,M} = \|G_\xi^N(x,y)-G_\xi^M(x,y)\|^2_{\mathring{W}^{l_1\ldots l_s}_{2n_1\ldots 2n_s,2}(\Omega\times\Omega)} \leqq c\Big[\int_\Omega \|G_\xi^N-G_\xi^M\|^2_{\mathring{W}^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,2}(\Omega^x)}\,dy +$$
$$+\int_\Omega \|G_\xi^N-G_\xi^M\|^2_{\mathring{W}^{l_1\ldots l_s}_{n_1\ldots n_s,2}(\Omega^y)}\,dx\Big],$$

(Ω^x bzw. Ω^y soll andeuten, daß über x bzw. y integriert wird). Dabei wurde benutzt, daß man diejenigen Funktionen, die gleichzeitig Ableitungen nach x und y enthalten durch Funktionen abschätzen kann, die nur Ableitungen nach x bzw. y enthalten [1] S. 75. (Man kann dies auch leicht unter Benutzung von Fouriertransformationen beweisen). Weiter folgt aus (35)

$$J_{N,M} \leqq c\big((A_{(x)}+\xi E)(G_\xi^N-G_\xi^M),\, G_\xi^N-G_\xi^M\big)_{L_2(\Omega\times\Omega)} +$$
$$+c\big((\bar{A}_{(y)}+\xi E)(G_\xi^N-G_\xi^M),\, G_\xi^N-G_\xi^M\big)_{L_2(\Omega\times\Omega)}.$$

Da

$$(A_{(x)}+\xi E)(G_\xi^N-G_\xi^M) = \sum_{i=M+1}^{N} u_i(x)\overline{u_i(y)}$$

(entsprechend für $\bar{A}_{(y)}+\xi E$) ist, folgt

$$J_{N,M} \leqq c\sum_{j=M+1}^{N} \frac{1}{\lambda_i+\xi} \to o \quad \text{für} \quad N,M\to\infty.$$

Daraus ergibt sich (38).

(c), (d). Aus (38) und Satz 3a bzw. Satz 3b folgen die Behauptungen (c) und (d), wenn man noch das Verhalten der Eigenfunktionen $u_i(x)$ am Rand von Ω berücksichtigt.

Satz 7 kann man verschärfen, wenn man nicht nur das Verhalten der Eigenwerte, Formel (34) benutzt, sondern auch die Aussagen über die Eigenfunktionen aus Satz 6.

Satz 8. *A ist wieder der auf $W^{2l_1\ldots 2l_s}_{n_1\ldots n_s,2,0}(\Omega)$ definierte selbstadjungierte Operator aus Satz 5. Mit $\varkappa$ wird ein Multiindex der Form*

$$\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2n}) = (\varkappa_1^{(1)}, \ldots, \varkappa_{2n_1}^{(1)}, \ldots, \varkappa_1^{(s)}, \ldots, \varkappa_{2n_s}^{(s)}), \quad |\varkappa|_i = \sum_{j=1}^{2n_i} \varkappa_j^{(i)},$$

bezeichnet. $G_\xi(x, y)$ ist die Greensche Funktion aus Satz 7.

(a) *Für $p \geqq 2$ und*

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2l_i}\left(|\varkappa|_i + \frac{2}{p'} n_i\right) < 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

ist

$$G_\xi(x, y) \in L_{p,\varkappa,0}(\Omega \times \Omega).$$

(b) *Für*

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2l_i}(|\varkappa|_i + 2n_i) < 1$$

ist

$$G_\xi(x, y) \in C_{\varkappa,0}(\Omega \times \Omega).$$

(Die Räume $L_{p,\varkappa,0}$ und $C_{\varkappa,0}$ wurden in Definition 4a erklärt, wobei man jetzt n_i durch $2n_i$ zu ersetzen hat).

Beweis. (a) Wegen $1 \leqq p' \leqq 2$ folgt $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} < 1$, also ist Satz 7a anwendbar. Mit

$$\varkappa = (\underbrace{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}_{\varrho}, \underbrace{\varkappa_{n+1}, \ldots, \varkappa_{2n}}_{\sigma}) = (\varrho, \sigma)$$

erhält man aus Satz 6a

$$\frac{1}{(\lambda_i+\xi)^p} \|D_x^{[\varrho]} u_i(x) D_y^{[\sigma]} u_i(y)\|^p_{L_p(\Omega\times\Omega)} \leqq c(\lambda_i+\xi)^{p(1-\tau_{[\varrho],p}-\tau_{[\sigma],p})},$$

falls $\tau_{[\varrho],p}$ und $\tau_{[\sigma],p}$ positiv sind. Das ist aber wegen

$$\tau_{[\varrho],p} \geqq 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{|\varkappa|_i}{2l_i} > \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{2}{p'}\right) \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{2l_i} > 0$$

(entsprechend für $\tau_{[\sigma],p}$) erfüllt.

$$\varphi_\varkappa = -1 + \tau_{[\varrho],p} + \tau_{[\sigma],p} =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{l_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{|[\varkappa]|_i}{2l_i} \geqq 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{l_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{|\varkappa|_i}{2l_i} > 0,$$

also ist

$$\frac{1}{(\lambda_i+\xi)^p} \|D_x^{[\varrho]} u_i D_y^{[\sigma]} \overline{u_i}\|^q_{L_p(\Omega\times\Omega)} \leqq \frac{c}{(\lambda_i+\xi)^{\varphi_\varkappa p}}.$$

Durch analoge Abschätzungen erhält man

$$\frac{1}{(\lambda_i+\xi)^p\,|x_k|^{(\varrho\varkappa)p}}\,\|D_x^{[\varrho]}u_i(x)\,D_y^{[\sigma]}\overline{u_i(y)}-T_{x_k}D_x^{[\varrho]}u_i(x)\,D_y^{[\sigma]}\overline{u_i(y)}\|_{L_p((\Omega\times\Omega)_{x_k})}^p \leqq$$
$$\leqq c(\lambda_i+\xi)^{p(1-\tau_{\varrho,p}-\tau_{\sigma,p})},$$

($(\Omega\times\Omega)_{x_k}$ ist in Definition 3 erklärt worden). Also ist

$$\left\|\frac{u_i(x)\overline{u_i(y)}}{\lambda_i+\xi}\right\|_{L_{p,\varkappa}} \leqq \frac{c}{(\lambda_i+\xi)^{\varphi_\varkappa}}.$$

Damit $G_\xi(\Omega\times\Omega)$ zu $L_{p,\varkappa}(\Omega\times\Omega)$ gehört ist nach (39) und der letzten Abschätzung hinreichend, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_i+\xi)^{\varphi_\varkappa}}<\infty$$

ist. Das ist aber nach (34) wegen

$$\varphi_\varkappa>\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{2l_i},$$

d. h.

$$-1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{l_i}+\sum_{i=1}^{s}\frac{|\varkappa|_i}{2l_i}<0$$

nach Voraussetzung erfüllt.

(b) wird vollkommen analog bewiesen, (man braucht in den obigen Rechnungen nur $p=\infty$ zu setzen).

Beispiel. Betrachtet man z. B. den Multiindex $\varkappa=(l_1, 0, \ldots, 0)$, so ist $\sum_{i=1}^{s}\frac{|\varkappa|_i}{2l_i}=\frac{1}{2}$, also

$$G_\xi(x, y)\in C_{\varkappa,0}(\Omega\times\Omega), \quad \text{falls} \quad \sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{l_i}<\frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Also ist

$$G_\xi(x, y)\in C_{2n_1\ldots 2n_s,0}^{l_1\ldots l_s}(\Omega\times\Omega),$$

falls $\sum_{i=1}^{s}\frac{n_i}{l_i}<\frac{1}{2}$ ist. (Dabei wird $C_{2n_1\ldots 2n_s,0}^{l_1\ldots l_s}(\Omega\times\Omega)$ in naheliegender Weise analog zu $W_{2n_1\ldots 2n_s,2,0}^{l_1\ldots l_s}(\Omega\times\Omega)$ definiert).

7. Verallgemeinerte hypoelliptische Differentialoperatoren. Betrachtet man die Beweise der Sätze 5 bis 8, so stellt man fest, daß nur bei den Beweisen der Sätze 6 und 8 die Kenntnis über das Definitionsgebiet des Operators A entscheidend benutzt wurde. Das legt nahe, die Sätze 5 und 7 für allgemeinere Operatoren zu formulieren.

Satz 9. *Ω ist ein beliebiges beschränktes Gebiet im R_n über dessen Rand keine Voraussetzungen gemacht werden. n_i und l_i, $i=1, \ldots, s$, sind natürliche Zahlen, $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$. $\mathring{W}_{n_1\ldots n_s,2}^{l_1\ldots l_s}(\Omega)$ ist der in der Definition 4a erklärte Raum.*

$$x=(x_1, \ldots, x_n)=(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(s)}, \ldots, x_{n_s}^{(s)}).$$

Für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *sei*

$$
(40)\qquad \begin{aligned} A^i[u,u] &= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=l_i} A^\alpha_{\beta,i}(x) D^\alpha_{x^{(i)}} u \overline{D^\beta_{x^{(i)}} u}\, dx \geqq \\ &\geqq c_i \sum_{|\gamma|=l_i} \|D^\gamma_{x^{(i)}} u\|^2_{L_2}, \quad c_i > o, \quad i = 1, \ldots, s. \end{aligned}
$$

Dabei sind $A^\alpha_{\beta,i}(x)$ *komplexe, in* Ω *lokal integrierbare Funktionen für die*

$$A^\alpha_{\beta,i}(x) = \overline{A^\beta_{\alpha,i}(x)}$$

gilt.

(a) *Die Normen*

$$\mathring{A}[u,u] = \sum_{i=1}^s A^i[u,u] \quad \textit{und} \quad \|u\|^2_{\mathring{W}^{l_1 \ldots l_s}_{n_1 \ldots n_s, 2}(\Omega)}$$

sind koordiniert.

(b) *Ist* $\mathring{A}$ *der durch die quadratische Form* $\mathring{A}[u,u]$ *erzeugte selbstadjungierte Operator, so ist* $\mathring{A}$ *positiv definit,* $\mathring{A}$ *besitzt ein reines Punktspektrum, es gilt* (34) *und Satz* 7, *wenn man dort den Operator* A *durch den Operator* $\mathring{A}$ *ersetzt und* $\xi \geqq o$ *wählt.*

Beweis. Für $u \in C_0^\infty(\Omega)$, d. h., $u \in C_0^\infty(R_n)$, folgt für ein geeignetes $p > 2$ aus dem Beweis des Satzes 2a

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqq \varepsilon \sum_{i=1}^s \sum_{|\alpha_i|=l_i} \|D^{\alpha_i}_{x^{(i)}} u\|_{L_2(\Omega)} + c\varepsilon^{-\frac{1-\tau}{\tau}} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \qquad 1 > \tau > o,$$

für $0 < \varepsilon < \infty$. Da Ω beschränkt ist, gilt

$$\|u\|_{L_2} \leqq c\|u\|_{L_p}.$$

Wählt man in (41) ε hinreichend groß und berücksichtigt man die letzte Ungleichung und (40), so folgt

$$\|u\|^2_{L_2} \leqq c\mathring{A}[u,u], \; c > 0.$$

Also ist $\mathring{A}[u,u]$ positiv definit. (a) beweist man wie in [10] (S. 328), (dort ist auch der Begriff „koordinierte Normen" erklärt). Dann erhält man (34) und Satz 7 genau wie früher.

Literatur

[1] O. V. Besov, Untersuchung einer Familie von Funktionenräumen. Sätze über Einbettung und Fortsetzung. *Trudy matematičeskogo instituta imeni V. A. Steklova*, **60**, (1961), 42—81. [Russisch]

[2] F. E. Browder, On the spectral theory of elliptic differential operators I, *Math. Ann.* **142** (1961), 22—130.

[3] G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung I, *Berlin*, 1964.

[4] G. Hellwig, Differentialoperatoren der mathematischen Physik, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1964.

[5] L. Hörmander, Linear partial differential operators. *Berlin—Göttingen—Hildelberg*, 1964.

[6] V. P. Il'in, Eigenschaften einiger Klassen differenzierbarer Funktionen mehrerer Veränderlicher in einem n-dimensionalen Gebiet. *Trudy matematičeskogo instituta imeni V. A. Steklova*, **66**, (1962), 227—363. (Russisch).

[7] S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. *Berlin*, 1964.
[8] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourierintegrals, *Oxford*, 1937.
[9] H. Triebel, Einige Einbettungssätze für Räume von Distributionen. *Wiss. Z. Univ. Jena, Math. Nat. Reihe* **14** (1965), 293—299.
[10] H. Triebel, Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren, *Math. Z.* **90**, (1965), 325—338.

(Eingegangen am 20. Mai 1966.)