Die Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie in der Möbiusschen Ebene I

Von L. GYARMATHI (Debrecen)

Wohlbekannt ist die Tatsache, daß die Bewegungsgruppe der hyperbolischen ebenen Geometrie mit der projektiven Gruppe der projektiven Geraden isomorph ist. Dies ist auch deshalb merkwürdig, denn so ist eine zweidimensionale Geometrie mit einer eindimensionalen zu charakterisieren. Diese Tatsache wird durch die klassischen Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie schön widerspiegelt. Diese sind das Poincarésche Halbebenenmodell, das Cayley—Kleinsche und das Poincarésche Kreismodell. Und zwar so, daß die Gruppe der in diesen Modellen erklärten Bewegungen durch die projektive Gruppe der die Modellen abgrenzenden Geraden bzw. Kreise bestimmt ist. Diese Modelle verwirklichen die hyperbolische ebene Geometrie in einer Halbebene bzw. im Inneren des Kreises. In diesem Sinne spricht man von Halbebenenmodellen und Kreismodellen. In den erwähnten Modellen bedeuten bestimmte Kreisbögen, bestimmte Halbgeraden und bestimmte Sehnen die Geraden der Modelle, deshalb sind diese Modelle durch die Anwendung der Kreisgeometrie zweckmäßig zu untersuchen, und so ist die Möbiusebene der natürliche Ort der Herleitung dieser Modelle.

Hinsichtlich der hervorragend guten Eigenschaften der klassischen Modelle ist es das Ziel dieser Arbeit, sämtliche solche Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie in der Möbiusebene aufzusuchen, welche einen den klassischen Modellen ähnlichen Typ haben, und für sie eine einheitliche Herleitung zu geben. Für die klassischen Modelle hielten wir die obenerwähnten zwei Eigenschaften (Modellgeraden Kreisbögen, die Bewegungen werden durch die projektiven Transformationen hergestellt) am charakteristischsten, und dies wird bei der genauen Definition unserer Modelle hervorgehoben.

Es genügt, bei der Aufsuchung der Halbebenenmodelle und der Kreismodelle der hyperbolischen ebenen Geometrie nur mit einem der beiden Typen sich ausführlich zu beschäftigen, da diese mit Inversion bezüglich des Kreises ineinander überführt werden können.

Die Arbeit untersucht zuerst das Problem der Halbebenenmodelle. Das Problem bezüglich der Kreismodelle wird so behandlet, daß die Ergebnisse in Verbindung mit Halbebenenmodellen auf sie übertragen, und wenn nötig ergänzt werden.

Als Resultat unserer Arbeit ergibt sich, daß die durch uns definierten Halbebenen- und Kreismodelle in drei Typen einzureihen sind; sogenannte elliptische, hyperbolische und parabolische Modelle; und so gelangt man auch zu neuen Modellen, die sich außer den klassischen Modellen als interessant erweisen. Die Herstellung der Modelle geschieht einheitlich und es gelingt für alle Modelle eine einheitliche Strecken- und Winkelcharakteristik einzuführen.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil wird auf die Möglichkeit der drei Typen unserer Modelle hingewiesen. Im zweiten Teil die Existenz dieser drei Typen nachgewiesen und außerden werden auch die speziellen Fälle der Kreismodelle vorgestellt.

Einleitung

Die hyperbolische ebene Geometrie wird ohne Stätigkeitsaxiome begründet und somit wird das Axiomensystem von Hilbert ([5], S. 160—163.) angewendet.

Es ist bekannt, daß in der hyperbolischen ebenen Geometrie die von Hilbert eingeführten Enden — abgesehen vom ∞ Ende — einen solchen angeordneten Körper bilden, in welchem alle positiven Körperelemente Quadrate sind. Ein Körper mit solchen Eigenschaften wird Q-Körper genannt. Wenn bei irgendeinem Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie der angeordnete Körper der Enden Q ist, so wird das ein Modell über Q genannt.

In der Arbeit wird es eine wichtige Rolle spielen, daß die Enden irgendeiner hyperbolischen ebenen Geometrie über Q eine projektive Gerade über den betreffenden Q bilden.

Die Prüfung der Fragen, die in der hyperbolischen ebenen Geometrie mit der Kongruenz der Strecken und Winkel verknüpft sind, wird oft durch Einführung der kongruenten Abbildungen (Bewegungen) der hyperbolischen ebenen Geometrie erleichtert. Es ist bekannt, daß die Bewegungen der hyperbolischen Ebene über Q-Körper durch die Geradentransformationen

$$\xi' = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}, \quad \eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0)$$

bestimmt werden, welche sich auf die Enden $\xi, \eta \neq \infty$ der Geraden beziehen. [1])

2. Die Menge der Punkte der Möbiusebene über einem Q Körper K wird aus der Menge der Punkte der euklidischen Ebene über K (das heißt aus der Menge der aus Elementen von K gebildeten Elementenpaare) so gebildet, daß dazu noch ein weiteres Element, der sogenannte unendlichferne Punkt hingefügt wird. Unter den Kreisen der Möbiusebene über K versteht man die Kreise und Geraden der euklidischen Ebene über K. Die letzteren werden auch Geraden der Möbiusebene genannt.

Auch in dieser Möbiusebene ist das sogenannte Kreisaxiom gültig, und die Inversion bzw. die Antiinversion werden auch hier in gewohnter Weise (durch senkrechte Kreise bzw. mit Hilfe diametral schneidender Kreise) erklärt, ferner auf den Kreisen das Doppelverhältniß und die Involutionen. Wenn es in einer Möbiusebene einen Kreis k und zwei nicht daraufliegende Punkte gibt, dann werden die Kreise der Kreisreihe, die durch die zwei Punkte bestimmt sind, aus dem k die entsprechenden Punktpaare einer Involution ausschneiden und umgekehrt sind alle Involutionen von k auf diese Weise herzustellen.

---

[1]) Es wird bezüglich der Transformation des Endes ∞ bemerkt: wenn $\gamma \neq 0$ ist, dann ist ∞ das Bild von $-\frac{\delta}{\gamma}$ und das Bild von ∞ ist α/γ, wenn aber $\gamma=0$ ist, dann ist das Bild von ∞ es selbst.

§. 1. Die Verbindung zwischen den Punkten der hyperbolischen ebenen Geometrie und den Involutionen der projektiven Geraden

In der Arbeit wird der folgende Satz eine wichtige Rolle haben.

Satz 1. 1. *Die elliptischen Involutionen I der aus den Enden bestehenden projektiven Geraden entsprechen den Punkten der hyperbolischen Ebene über irgendeinem Q-Körper eineindeutig und zwar so, daß die Endenpaare der durch P gehenden Geraden entsprechende Punktpaare von zu P gehörigen I sein werden.*

Beweis. Hilbert hat in [5] (S. 175.) bewiesen, daß alle solche Geraden deren Enden mit den Endkoordinaten $\xi, \eta \neq \infty$ die Gleichung

$$\alpha\xi\eta+\beta\frac{\xi+\eta}{2}+\gamma=0 \tag{1.1}$$

wo α, β, γ Enden sind, und $4\alpha\gamma-\beta^2>0$ erfüllen, durch einen Punkt P hindurchgehen. Aus dem Beweis von Hilbert folgt auch leicht, daß die Enden der durch einen Punkt P gehenden Geraden, welche kein ∞ Ende haben, der Gleichung genügen. Es ist möglich die Gleichung (1. 1) auch in der Form

$$\xi=\frac{-\frac{\beta}{2}\eta-\gamma}{\alpha\eta+\frac{\beta}{2}}, \qquad \alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}>0 \tag{1.2}$$

zu schreiben. Wir betrachten ξ bzw. η für gewöhnliche Koordinaten der aus den Enden bestehenden projektiven Geraden und wir bringen nach (1. 2) zwischen ξ und η eine eineindeutige Beziehung zu stande. In diesem Fall bestimmt (1. 2) — insofern er mit der Fußnote 1) ergänzt wird — die elliptische Involution der projektiven Geraden. Weil zu jedem P eine Gleichung (1. 1) gehört und umgekehrt, gehört eine durch (1. 2) angegebene elliptische Involution I zu jedem P und umgekehrt. Nach (1, 2) sind der Punkt ξ und der Punkt η die entsprechenden Punktpaare der Involution I, außerdem ist es auch bekannt, daß ξ und η die Enden der durch P gehenden Geraden sind, q.e.d.

Aus diesen Gründen können die Punkte der hyperbolischen Ebene über irgendeinem K Q-Körper durch die I bestimmenden Matrizes

$$\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{2} & -\gamma \\ \alpha & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \qquad 4\alpha\gamma-\beta^2>0 \tag{1.3}$$

angegeben werden. Von einer solchen Matrix und durch ihr Produkt mit dem Skalar $\varrho(\varrho\in K, \varrho\neq 0)$ wird derselbe Punkt bestimmt.

§. 2. Die Erklärung und die charakteristische Abbildung der Halbebenenmodelle der hyperbolischen ebenen Geometrie

In den Modellen der Geometrie sind die Axiome und die Sätze der Geometrie gültig, und es ist möglich, die in der Geometrie vorkommenden Definitionen auf das Modell überzutragen. Diese Tatsache wurde auch bei der nächsten Definition in Betracht genommen.

Erklärung 2. 1. Unter den Halbebenenmodellel der hyperbolischen ebenen Geometrie über einem Q-Körper K versteht man die Modelle, welche auf folgende Weise anzugeben sind: Die Punkte derjenigen Halbebene M_1 werden als Punkte des Modells betrachtet, die von irgendeiner Geraden e der Möbiusebene über dem Körper K bestimmt sind, die in der M_1 liegenden Bögen eines solchen nicht notwendig vollständigen Kreises werden als Modellgeraden betrachtet, die die Gerade e in zwei Punkten schneiden, unter der Inzidenz der Modellpunkte und Modellgeraden versteht man die Anordnung der Modellpunkte auf den Kreisbögen der Möbiusebene, die Endkoordinaten irgendeiner Modellhalbgeraden seien die gewöhnlichen Koordinaten der Punkte von e. Jener Kreis, deren Bogen Modellgerade ist, soll durch die Enden der zur Modellgerade gehörenden zwei Halbgeraden hindurchgehen, die Bewegungen des Modells seien durch die projektiven Transformationen der Geraden e bestimmt.*)

Ein Kreis der Möbiuebene dessen Bogen Modellgerade ist, wird ein Kreis für das Halten der Modellgerade genannt.

Aus der Erklärung der Halbebenenmodelle und aus dem modellgemäßen Entsprechenden des Satzes 1, 1 folgt einfach der

Satz. 2. 1. *Im Falle jedes Halbebenenmodells der hyperbolischen ebenen Geometrie haben die durch irgendeinen Punkt P gehenden Kreise für das Halten aller Modellgeraden außer P nur einen gemeinsamen Punkt in der Möbiusebene, welche das Modell hält.*

Nach diesen Vorbereitungen kann die sogenannte charakteristische Abbildung der Halbebenenmodelle erklärt werden, die vom Standpunkt der Arbeit entscheidende Wichtigkeit hat.

Erklärung 2, 2. Es sei ein Halbebenenmodell der hyperbolischen ebenen Geometrie über einem Körper Q gegeben. Einem beliebigen Punkt des Modelles soll man den anderen gemeinsamen Schnittpunkt P^* der durch P hindurgehenden Kreise zuordnen, die die Modellgeraden halten. Diese in der Möbiusebene definierte Abbildung des Modells nennt man die charakteristische Abbildung des Modells und den P^* das charakteristische Bild von P.

* Die projektiven Transformationen von e bestimmen schon Bewegungen des Modells. Auch die für die Bewegungen des Modells festgestellte Bedingung folgt schon aus der auf die Endkoordinaten der Halbgeraden bezüglichen Bedingung. Damit wollten wir eigentlich eine Vorschrift für den Aufbau geben. Durch die Bewegungen definiert man die Kongruenz der Strecken und Winkel. Mit Rücksicht darauf, daß die Bewegungsgruppe der hyperbolischen ebenen Geometrie, und so auch die Bewegungsgruppe ihrer Modelle mit der Bewegungsgruppe der projektiven Geraden isomorph ist, sind alle solche Halbebenenmodelle in welcher die auf die Enden in den Obigen vorgeschriebenen Bedingung nicht erfüllt wird, unnatürlich zu betrachten.

Aus der Erklärung folgt sofort der

Satz 2. 2. *Im Falle jedes Halbebenenmodells der hyperbolischen ebenen Geometrie befinden sich die charakteristischen Bilder der auf irgendeiner Modellgerade liegenden Punkte auf dem haltenden Kreis der Geraden.*

Satz 2. 3. *Die charakteristische Abbildung irgendeines Halbebenenmodells der hyperbolischen Ebene ist entweder eineindeutig oder fallen die Bilder sämtlicher Punkte zusammen.*

Beweis. In Hinblick auf die Eindeutigkeit der charakteristischen Abbildung genügt es zu beweisen, daß wenn die charakteristischen Bilder zweier Modellpunkte P_1 und P_2 zusammenfallen, dann fallen die charakteristischen Bilder aller Modellpunkte zusammen. Es sei $P \notin |P_1 P_2|$ (P ist kein Element der Geraden $P_1 P_2$), dann gehen nach dem Satz 2, 2 die $|PP_1|$ und $|PP_2|$ haltende Kreise durch den Punkt hindurch und so ist $P^* = P_1^* = P_2^*$. Damit ist unser Satz für alle Punkte $P \notin |P_1 P_2|$ bewiesen. Es sei $R \in |P_1 P_2|$ und $R \neq P_1, P_2$, dann ist $R \notin |P_1 P|$. In unserer vorigen Überlegung werden die Punkte P_1 bzw. P_2 durch die Punkte P_1 bzw. R und P durch R ersetzst. Daraus folgt nach den Obigen $R^* = P_1^* = P_2^*$. Damit ist der Beweis unseres Satzes beendet.

3. § Die Klassifikation der Halbebenenmodelle der hyperbolischen ebenen Geometrie

In diesem Paragraphen wird der folgende Hauptsatz der Arbeit beweisen:

Satz 3. 1. *Es sei auf einer Halbebene M_1 die durch die Zerfällung in zwei Teile mit der Geraden e Möbiusebene M über einen Q-Körper entsteht, ein Halbebenenmodell der hyperbolischen ebenen Geometrie gegeben. In diesem Falle ist eine und nur eine der folgenden Bedingungen für die Menge $\mathfrak{k}$ aller Kreise welche die Geraden des Modells halten erfüllt:*

a) *Es gibt auf der Hälfte von M, welche sich von M_1 unterscheidet, einen solchen Punkt, daß die durch diesen gehenden und die e in zwei Punkten schneidenden Kreise und nur diese zu $\mathfrak{k}$ gehören.*

b) *Es gibt einen solchen Kreis von M, welcher keinen Punkt von M_1 enthält, daß die diesen orthogonal schneidenden und die e in zwei Punkten schneidenden Kreise und nur diese zu $\mathfrak{k}$ gehören.*

c) *Es gibt einen solchen echten Kreis von M, dessen Mittelpunkt sich auf der, von M_1 sich unterscheidenden Hälfte der M befindet, daß die diesen in Diametralen Punkten, und die e in zwei Punkten scheidenden Kreise und nur diese zu $\mathfrak{k}$ gehören.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß die charakteristischen Bilder der Modellpunkte im Fall der hyperbolischen ebenen Geometrie über irgendeinem Q-Körper nur die folgenden sein können.

1. Alle charakteristischen Bilder fallen in einem Punkt F zusammen, oder
2. Das charakteristische Bild ist die Inverse des Modellpunktes bezüglich eines Kreises k_z, oder
3. Das charakteristische Bild ist die Antiinverse des Modellpunktes bezüglich eines Kreises k_{az}.

Wenn es zwei Modellpunkte gibt deren charakteristische Bilder zusammenfallen, da besteht der erste Fall nach dem Satz 2, 3. Seien jetzt die charakteistischen Bilder verschieden, und sei $P_i \in |P_1 P_2|$ $(i=3, 4, \ldots)$, wo P_1, P_2 und P_i Modellpunkte sind. Jetzt bilden wir nach den Sätzen 2, 2 und 2, 3 die Punkte P_1, P_2 und P_i des Kreises, welcher die Modellgerade $P_1 P_2$ hält, auf die Punkte desselben Kreises eindeutig ab. Dasselbe gilt für durch zwei Modellpunkte gehenden Kreise, welche eine Modellgerade halten.

Man soll untersuchen, bei welcher Stellung der Modellpunkte und ihrer charakteristischen Bilder die obigen Bedingungen erfüllt werden.

Unsere Untersuchungen werden wir auf der Kugelfläche durchführen, und zwar so, daß unsere Möbiusebene durch eine stereographische Projektion ([6], II. S. 406) auf die Kugelfläche übertragen wird. Zu diesem Zweck wird unsere Möbiusebene zu dem Möbiusraum über dem betreffenden Q-Körper ergänzt. Dies ist auf Grund von [5] (S. 15) möglich. In dem so konstruierten Raum nehmen wir die Kugelfläche auf. Die stereographische Projektion trägt die Möbiusebene eindeutig Inzidenztreu und Kreistreu auf die Kugelfläche über. Gerade deshalb sind die bisherigen Feststellungen bezüglich unserer Abbildung auch auf der Kugelfläche gültig. Nun bilden wir gewisse Punkte der Kugelfläche eineindeutig auf gewisse Punkte der Kugelfläche so ab, daß ein Kugelkreis durch irgenwelche zwei Punkte (durch das Bild des Modellpunktes auf der Kugel) und durch ihre Bilder (durch die Entsprechenden ihrer charakteristischer Bilder auf der Kugel) hindurchgeht. Daraus folgt aber, daß irgendwelche zwei im vorigen erwähnten Punkte und ihre Bilder verbindende Geraden sich schneiden, nämlich diese legen sich auf die Ebene des vorher Erwähnten Kugelkreises. Dies ist nur so möglich — weil die entsprechenden der Modellpunkte auf der Kugel nicht alle in einer Ebene liegen — daß die erwähnten verbindenden Geraden durch einen gemeinsamen Punkt O gehen. O kann wegen der eineindeutigen Abbildung nicht auf der Kugelfläche liegen. Die obigen Abbildungen gehören zu der speziellen Homographie der Kugel ([6], II. S. 375—377): zu den Antiinvolutionen erster Sorte (O ist außerhalb der Kugel) bzw. zu den Antiinvolutionen zweiter Sorte (O ist innerhalb der Kugel). Die Antiinvolution erster Sorte ist eine Kugelspielung bezüglich eines Kugelkreises, die Antiinvolution zweiter Sorte ist aber die Spiegelung der Kugel bezüglich eines inneren Punktes O. Mittels stereographischer Projektion tragen wir unsere Abbildungen auf die Möbiusebene zurück. In diesem Fall geht — wie bekannt — die Antiinvolution erster Sorte in eine Inversion bezüglich eines Kreises k_s *), die Antiinvolution zweiter Sorte aber in eine Antiinversion bezüglich eines echten Kreises k_{as} über**). Damit wurde die Behauptung vom Anfang des Beweises bestetigt.

Es soll noch beachtet werden, daß die zu den Modellpunkten gehörigen Involutionen auf e elliptisch sind, deshalb wird irgendein Modellpunkt und sein charakteristisches Bild durch e getrennt. Diese letztere Forderung und die Bedingungen 1. bzw 2. bzw. 3. bedeuten eine doppelte Forderung in Bezug auf die vorliegenden

*) Die Poolarebene von O bezüglich der Kugel soll die Kugel im Kreis $\hat{k}_s$ schneiden, k_s ist das stereographische Bild von $\widehat{k_s}$.

**) Sei $\hat{O}$ der konjugierte Punkt O bezüglich der Kugel auf die Gerade CO, wo C das Zentrum der stereographischen Projektion sei. Die Polarebene von $\hat{O}$ soll unsere Kugel im Kreis $\hat{k}_{as}$ schneiden, k_{as} ist das stereographische Bild von $\hat{k}_{as}$.

Punkte und Bilder. Es ist leicht einzusehen, daß nach dem Obigen im Fall 1. F weder ein Punkt von e noch ein Punkt von M_1 sein kann, im Fall 2. k_s mit M_1 keinen gemeinsamen Punkt haben kann, weil es im Falle der Existenz eines gemeinsamen Punktes einen solchen Modellpunkt (z. B. einen in M_1 liegenden Punkt von k_s) gäbe, dessen charakteistisches Bild welches der Bedingung 2. genügt, der Punkt von M_1 wäre, und dies ist nicht erlaubt; im Fall 3. kann aber der Mittelpunkt von k_{as} kein Punkt von M_1 sein, weil dann ein solcher Modellpunkt (z. B. die in M_1 liegenden Endpunkte der Durchmesser von k_{as}) existierte, dessen charakteristisches Bild, das der Bedingung 3. genügt der Punkt von M_1 wäre, dies ist aber nicht erlaubt.

Da auf allen Modellgeraden Modellpunkte liegen, gehen auf der Erklärung 2, 2 alle Modellgeraden haltenden Kreise mindestens durch einen Modellpunkt und durch dessen charakteristisches Bild hindurch. Daraus und aus den Obigen folgt, daß alle Kreise welche die Modellgeraden halten, die Gerade in zwei Punkten schneiden und in Fall 1. durch F gehen, in Fall 2. aber durch die bezüglichen Inverspunktpaare, d.h. sie sind auf k_s senkrecht, in Fall 3. gehen sie durch die bezüglichen Antiinverspunktpaare, d. h. sie schneiden k_{as} in diametralen Punkten. Natürlich gehen auch die Modellgeraden haltenden Kreise im letzteren Fall durch die Antiinversen der Enden der Geraden hindurch. Daraus folgt auch, daß der Mittelpunkt von k_{as} sich auch auf der Geraden e nicht befinden kann. Dann würden nämlich auf den durch k_{as} ausgeschnittenen zwei Enden unendlich viele Modellgerade gehen.

In Verbindung mit dem Hauptsatz soll auch noch darauf hingewiesen werden, daß die e in zwei Punkten schneidenden und den Bedingungen a) oder b) oder c) genügenden Kreise, die eine Modellgerade haltenden Kreise sind. Es folgt daraus, daß — wie erwähnt — der die Modellgerade haltende Kreis in allen Fällen durch irgendwelche zwei Punkte von e als durch zwei Enden hindurchgeht. Und durch irgendwelche zwei Punkte von e geht nur ein solcher Kreis hindurch, welcher durch F geht, oder senkrecht auf den Kreis k_s ist, oder den k_{as} in diametralen Punkten schneidet. Der auf F bezügliche Teil der letzteren Behauptung folgt sofort aus der vorgeschriebenen Lage von F. In der anderen zwei Fällen gilt sie deshalb, weil — wie bekannt — durch zwei Punkte nur ein einziger solcher Kreis hindurchgeht, welcher auf einer gegebenen Kreis senkrecht ist, oder einen gegebenen Kreis in diametralen Punkten schneidet, ausgenommen den Fall, bei welchem die zwei Punkte Invers oder Antiinvers bezüglich des gegebenen Kreises sind. Neben den Bedingungen b) und c) hat M_1 keine zwei solche Punkte, welche Invers, bzw. Antiinvers bezüglich k_s bzw. k_{as} wären.

Daraus, daß von den Fällen 1., 2. und 3. auf einmal nur einer besteht, folgt es, daß von den Bedingungen a), b), c) für die Menge $\mathfrak{k}$ der die Modellgerade haltenden Kreise eine und nur eine erfüllt werden kann.

Der Beweis des Hauptsatzes ist damit beendet.

Erklärung 3, 1. Das Halbebenenmodell der hyperbolischen ebenen Geometrie über dem Körper Q wird dem Typ nach parabolisch, elliptisch oder hyperbolisch genannt, je nachdem die Bedingung a), b) oder c) von Satz 3, 1 für es gültig ist*.)

*) Die Benennung parabolisch, elliptisch und hyperbolisch wünscht den entsprechenden Zusammenhang mit den Kreisbündeln auszudrücken.

Literaturverzeichnis

[1] F. Bachmann, Eine Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene. *Math. Ann.* **113** (1937). 424—451.
[2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III. *Berlin*, 1929.
[3] Bolyai János, Appendix (Szerkesztette Kárteszi Ferenc) *Budapest*, 1962.
[4] Hajós György, Bevezetés a geometriába, *Budapest*, 1960.
[5] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, *Stuttgart*, 1956.
[6] Kerékjrátó Béla, A geometria alapjairól, I. kötet, *Szeged*, 1937., II. kötet, *Budapest*, 1944.

(Eingegangen am 25. Mai 1966.)