Über gewisse Topologien, die in der Menge der eindeutigen Abbildungen einer Menge in eine Operatorgruppe definiert sind

Von I. GY. MAURER (Cluj) und M. SZILÁGYI (Tg. Mures)

Wir wollen zuerst einige Begriffe und Bezeichnungen erklären. Wir verstehen unter einem *topologischen Raum* $\{T, \tau\}$ eine Menge T, in der eine Menge τ von „offenen" Untermengen von T mit folgenden Eigenschaften ausgezeichnet ist:

I. Der Durchschnitt einer beliebigen endlichen Anzahl von Elementen aus τ ist ein Element von τ.

II. Die Vereinigung eines beliebigen Systems von Elementen aus τ ist ein Element von τ.

III. T ist ein Element von τ.

Die *Umgebungen* eines beliebigen Elementes $a \in \{T, \tau\}$ werden als beliebige offene Mengen von T, die das Element a enthälten, definiert.

Führt man in T zwei Topologien τ_0 und τ_1 ein, so sagt man daß die Topologie τ_1 genau dann *feiner* ist als die Topologie τ_0, wenn eine beliebige Untermenge von T, die in der Topologie τ_0 offen ist, auch in der Topologie τ_1 offen ist, also wenn $\tau_0 \subseteqq \tau_1$.

Eine Menge $\mathfrak{e} \subseteqq T$ wird in der Topologie τ *abgeschlossen* genannt wenn die Menge $T \setminus \mathfrak{e}$ offen ist.

Wir werden uns mit zwei Konvergenzbegriffen beschäftigen. Der erste ist die *Moore—Smith-Konvergenz* eines Systems (einer Moore—Smith Folge) $\{a_\nu\}_\nu \in \Phi$, wobei $(\Phi, \leqq)$ eine beliebige gerichtete Indexmenge ist: $a_\nu \xrightarrow{\Phi} a (a_\nu, a \in \{T, \tau\}, \nu \in \Phi)$ genau dann, wenn für eine beliebige Umgebung V_a von a ein $\nu_0 = \nu_0(V_a) \in \Phi$ existiert, so daß $a_\nu \in V_a$ für alle $v \geqq \nu_0$. Den zweiten -kurz Δ -Konvergenz genannte -Konvergenzbegriff definieren wir für ein System $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$, wobei Δ eine beliebige (nicht notwendig geordnete) Indexmenge ist, folgendermassen: $a_\nu \xrightarrow{\Delta} a (a_\nu, a \in \{T, \tau\}, \nu \in \Delta)$ genau dann, wenn es für eine beliebige Umgebung V_a von a eine endliche Untermenge $\Delta_0 = \Delta_0(V_a)$ von Δ gibt, so dass $a_\nu \in V_a$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$.

Bemerkung 1. Man kann zu jedem System $\{a_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ ein System $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Phi}$ mit einer gerichteten Indexmenge Φ zuordnen, so daß $a_\nu \xrightarrow{\Delta} a$ genau dann, wenn $a_\lambda \xrightarrow{\Phi} a$ [1]).

[1]) Die Konstruktion des Systems $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Phi}$ geschieht mit Hilfe einer Methode [4], die man zum Beweis der Äquivalenz von Filtern und Moore—Smith Folgen verwendet [5].

Es sei G^M *die Menge aller eindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge* M *in eine Gruppe* G, *die einen rechtsseitigen Operatorenbereich* O *besitzt.* [2]) Wir setzen voraus, daß G eine von O zuläßige Untergruppenmenge $\{G_\xi\}_{\xi\in I}$ besitzt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1*. *I ist eine beliebige (mit einer Relation $\leqq$) gerichtete Indexmenge.*

2*. *Wenn $\xi_1 \geqq \xi_2$ $(\xi_1, \xi_2 \in I)$, so ist $G_{\xi_1} \subseteqq G_{\xi_2}$.*

Man kann in der O-Gruppe G eine sogenannte *Untergruppentopologie* (kurz U-topologie) mit Hilfe dieser Untergruppenmenge einführen (s. zB. [4]). Das vollständige System von Umgebungen des Einheitselements von G wird von die Gliedern der betrachteten Untergruppenmenge gebildet. Die Topologie U ist genau dann diskret, wenn $e\in\{G_\xi\}_{\xi\in I}$. $\{G, U\}$ ist genau dann ein Hausdorffscher Raum, wenn

$$\bigcap_{\xi\in I} G_\xi = \{e\}. \tag{1}$$

Wenn die Untergruppen $G_\xi\,(\xi\in I)$ von O zulässige Normalteiler von G sind, so ist $\{G, U\}$ eine topologische Gruppe. Man ersieht leicht, daß $a_\nu \xrightarrow{\Phi} a\,(a_\nu, a\in\{G, U\}, \nu\in\Phi)$ bzw. $a_\nu \xrightarrow{\Delta} a(a_\nu, a\in\{G, U\}, \nu\in\Delta)$ genau dann, wenn es für ein beliebiges $\xi\in I$ ein $\nu_0=\nu_0(\xi)\in\Phi$ bzw. eine endliche Untermenge $\Delta_0=\Delta_0(\xi)$ von Δ gibt, so daß $a_\nu^{-1}a\in G_\xi$ für alle $\nu\geqq\nu_0$ bzw. für alle $\nu\in\Delta\setminus\Delta_0$.

In dieser Mitteilung untersuchen wir *zwei Topologien, die wir in der Menge* G^M einführen werden. Bei der Einführung dieser Topologien spielt die in G definierte U-Topologie eine wichtige Rolle. Wir werden zeigen, dass unsere Topologien Verallgemeinerungen einiger in der Literatur betrachten Topologien sind. Für den Speziälfall, wenn $M=G$, wobei G eine abelsche Gruppe ist und $G^M=\mathscr{E}(G)$ den vollen Endomorphismenring von G bezeichnet, wurden schon im Jahr 1957 in den Arbeiten [2] und [6] in $G^M=\mathscr{E}(G)$ zwei Topologien eingeführt. In [2] ist eine Topologie in $\mathscr{E}(G)$ auf Grund des folgenden Konvergenzbegriffes eingeführt:

A) Eine unendliche Folge $\{F_\nu\}$ von Endomorphismen $F_\nu\in\mathscr{E}(G)$ hat genau dann den Endomorphismus $F\in\mathscr{E}(G)$ als Grenzwert, wenn für beliebiges $\varkappa\in G$ die Relation $\varkappa F_\nu=\varkappa F$ mit Ausnahme endlich vieler ν's gilt [3]).

In [6] ist eine Topologie in $\mathscr{E}(G)$ auf Grund des folgenden Begriffes der abgeschlossenen Mengen von $\mathscr{E}(G)$ eingeführt:

B) Eine Untermenge $\mathfrak{e}$ von $\mathscr{E}(G)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{e}$ entweder endlich ist, oder, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: existiert für eine beliebige endliche Untermenge $X\subseteqq G$ eine unendliche Menge von Elementen $F_\nu\in\mathfrak{e}$ so daß $\varkappa F_\lambda=\varkappa F(\varkappa\in X)$, dann muss $F\in\mathscr{E}(G)$ der Menge angehören [4]).

[2]) Man setzt voraus, dass die Multiplikation mit den Operatoren distributiv bezüglich der Gruppenoperation ist.

[3]) Diese Methode in [3] für die Einführung einer Topologie in der Menge N^M aller eindeutigen Abbildungen einer Menge M in eine Menge N, demach auch in G^M, angewendet wurde.

[4]) Diese Formulierung des Begriffes der abgeschlossenen Menge unterscheidet sich einigermassen von der die in [6] angegeben ist. Jene lautet: $\mathfrak{e}(\emptyset\subseteq\mathfrak{e}\subseteq\mathscr{E}(G))$ ist abgeschlossen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: existiert für ein beliebiges $\varkappa\in G$ eine unendliche Menge von Elementen $F_\lambda\in\mathfrak{e}$ so dass $\varkappa F_\lambda=\varkappa F$, dann muss $F\in\mathscr{E}(G)$ der Menge $\mathfrak{e}$ angehören. Verwendet man diese Definition, so folgt jedoch nicht so wie in [6] behauptet wird, dass $\mathscr{E}(G)$ ein T_1-Raum ist. Sogar die Behauptung $\mathscr{E}(G)$ sei ein topologischer Raum, folgt nicht. In der Tat, aus der Abgeschlossenheit der Mengen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ (im Sinne der Definition aus [6]) folgt im allgemeinen nicht die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{e}_1\cup\mathfrak{e}_2$. Wir wollen dies durch ein Beispiel beweisen. G bezeichnete die

Wir werden zeigen, dass unsere Topologien in einem Spezialfall mit den vorerwähnten Topologien übereinstimmen, nähmlich dann, wenn die Untergruppenmenge $\{G_\xi\}_{\xi \in I}$ von G nur das Glied $\{e\}$ enthält.

Bemerkung 2. Wir werden im folgenden oft gewisse Untermengen (Elementensysteme) von G^M betrachtet, die aus den Elementen $F^* \in G^M$ bestehen, die im Falle einer gegebenen endlichen Untermenge $X \subseteqq M$ und einem gegebenen Elemente $\xi \in I$, die Bedingung $(\varkappa F^*)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ $(\varkappa \in G)$ erfüllen. Wir werden die Elemente eines solchen Systems mit Indizes versehen. Die entsprechende Indexmenge wird immer mit Λ bezeichnet. Diese Indexmenge hängt natürlich von X und ξ ab: $\Lambda = \Lambda(X, \xi)$. Ausserdem weisen wir darauf hin, dass die Untermenge $\{\varkappa\}$ einfach mit $\varkappa$ bezeichnet wird.

Nun führen wir in G^M zwei Topologien ein, in dem wir zwei verschiedene Definitionen des Begriffes der offenen Menge verwenden:

Definition 1. *Die Menge $\mathfrak{m} \in G^M$ ist eine offene Menge in G^M wenn entweder $G = \emptyset$ ist, oder für ein beliebiges $F \in \mathfrak{m}$ eine endliche Untermenge X von M und ein $\xi \in I$ existieren, so daß, wenn $(\varkappa F_\lambda)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi (\lambda \in \Lambda = \Lambda(X, \xi))$ für ein beliebiges $\varkappa \in X$ gilt, folgt, dass $F_\lambda \in \mathfrak{m}$, für $\lambda \in \Lambda$.*

Definition 1′. *Die Menge $\mathfrak{m} \subseteqq G^M$ ist eine offene Menge in G^M, wenn entweder $M = \emptyset$ ist, oder wenn für ein beliebiges $F \in \mathfrak{m}$, aus der Tatsache daß für ein beliebiges $F \in M$ und ein beliebiges $\xi \in I$ die Elemente eines Systems $\{F_\nu\} \nu \in \Delta$ (Δ ist eine beliebige Indexmenge) die Relation $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$ erfüllen, wobei $\Delta_0 = \Delta_0(\varkappa, \xi)$ eine endliche Untermenge von Δ ist, folgt, daß $F_\nu \in \mathfrak{m}$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta^*$, wobei $\Delta^* = \Delta^*(\mathfrak{m})$ eine endliche Untermenge von Δ ist.*

Die Menge der offenen Mengen von G^M im Sinne der Definition 1. bzw. 1′, wird mit τ_0 bzw. τ_1 bezeichnet.

Die Mengen τ_0 und τ_1 besitzen die Eigenschaften, I, II und III.

Die Gültigkeit der Eigenschaften II und III ist in beiden Fällen offenbar und es genügt die Eigenschaft I für zwei Elemente zu beweisen.

Es sei $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \tau_0$. Wenn $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \emptyset$, so ist $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \in \tau_0$. Es sei $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \neq \emptyset$ und F ein beliebiges Element von $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Weil $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \tau_0$, so existiert eine endliche Untermenge X_1 von M, bzw. eine endliche Untermenge X_2 von M und ein derartiges $\xi_1 \in I$ bzw. $\xi_2 \in I$, so daß aus der Gültigkeit von $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_{\xi_1}$ $(\lambda \in \Lambda_1 = \Lambda_1(X_1, \xi_1))$ für alle $\varkappa \in X_1$ bzw. $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_{\xi_2}(\lambda \in \Lambda_2 = \Lambda_2(X_2, \xi_2))$

Menge aller zweidimensionalen Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten, d. h. $G = \{a_1 e_1 + a_2 e_2; a_1, a_2 \in I\}$, wobei $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ und I die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet. G ist eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition der Vektoren. Wir betrachten die folgenden zwei Untermengen von $\mathscr{E}(G)$: $\mathfrak{e}_1 = \{F_\nu \in \mathscr{E}(G); e_1 F_\nu \neq 0\}$ und $\mathfrak{e}_2 = \{F_\mu \in \mathscr{E}(G); e_2 F_\mu \neq 0\}$. Hier bezeichnet 0 das Nullement von G. Die Mengen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ sind abgeschlossen im Sinne der Definition aus [6]. Es sei F^* ein beliebiges Element von $\mathscr{E}(G)$, das der Bedignung $F^* \notin \mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2$ genügt. Dann gilt $e_1 F^* = e_2 F^* = 0$. Da e_1 und e_2 die Gruppe G erzeugen, so gilt $F^* = \Theta$. (Θ bezeichnet das Nullelement von $\mathscr{E}(G)$). Es ist also $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 = \mathscr{E}(G) \setminus \Theta$. Wir zeigen, daß Θ die Bedingung der Definition aus [6] erfüllt. $\mathscr{E}(G)$ enthält für ein beliebiges $\varkappa = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in G(a_1 a_2 \in I)$ unendlich viele Elemente F_n, die der Relation $\varkappa F_n = \varkappa \Theta$ genügen. Zum Beispiel können wir als F_n jene Elemente von $\mathscr{E}(G)$, die durch die Relationen $e_1 F_n = n a_2 e_1$ und $e_2 F_n = (-n) a_1 e_1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ bestimmt werden, wählen. Demnach enthält auch $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2$ unendlich viele Elemente $F_n (\neq \Theta)$ die die Relation $\varkappa F_n = \varkappa \Theta$ erfüllen, weil $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 = \mathscr{E}(G) \setminus \Theta$. Da $\Theta \notin \mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2$, so ist $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2$ nicht abgeschlossen im Sinne der Definition aus [6].

für alle $\varkappa \in X_2$ folgt, daß $F_\lambda \in \mathfrak{m}_1$ bzw. $F_\lambda \in \mathfrak{m}_2$, wenn $\lambda \in \Lambda_1$ bzw. $\lambda \in \Lambda_2$. Es sei $X = X_1 \cup X_2$ und $\xi \geqq \xi_1, \xi_2$. Es folgt: wenn $(\varkappa F_\lambda)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi(\lambda \in \Lambda = \Lambda(X, \xi))$ für alle $\varkappa \in X$ gilt, so ist $F_\lambda \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Es ist also $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \in \tau_0$.

Es sei $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \tau_1$. Wenn $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \emptyset$, so ist $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \in \tau_1$. Es sei nun $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \neq \emptyset$ und F ein beliebiges Element von $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Wir setzen voraus, daß die Elemente eines Systems $\{F_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ die Relation $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$ erfüllen, wobei $\Delta_0 = \Delta_0(\varkappa, \xi)$ eine endliche Untermenge von M ist und $\varkappa$ und ξ beliebige Elemente von X bzw. von I sind. Weil $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \tau_1$, so gilt auf Grund der Definition 1′, daß $F_\nu \in \mathfrak{m}_1$ bzw. $F_\nu \in \mathfrak{m}_2$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_1^*$ bzw. für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_2^*$ wobei $\Delta_1^* = \Delta_1^*(\mathfrak{m}_1)$ und $\mathfrak{m}_2^* = \Delta_2^*(\mathfrak{m}_2)$ endliche Untermengen von Δ sind. Es folgt, daß $F_\nu \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$, wenn $\nu \in \Delta \setminus (\Delta_1^* \cup \Delta_2^*)$, wobei $\Delta_1^* \cup \Delta_2^*$ eine endliche Untermenge von Δ ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \in \tau_1$.

Es gilt also der folgende

Satz 1. $\{G^M; \tau_i\}$ $(i = 0, 1)$ *sind topologische Räume.*

Bemerkung 3. Man ersieht leicht auf Grund der Definition 1, dass *die Mengen* $V_F^{X,\xi} = \{F_\lambda \in G^M; (\varkappa F_\lambda)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi, \lambda \in \Lambda(X, \xi), \varkappa \in X\}$ *ein vollständiges Umgebungssystem des Elementes* $F \in \{G^M; \tau_0\}$ *bilden.* Hier durchläuft X bzw. ξ die Menge aller endlichen Untermengen von M, bzw. die Menge I.

Satz 2. *Die Topologie* τ_1 *ist feiner als die Topologie* τ_0.

Beweis. Es sei $\mathfrak{m} \in \tau_0$. Wenn $\mathfrak{m} = \emptyset$, so folgt aus der Definition 1′, daß $\mathfrak{m}_1 \in \tau_1$. Es sei nun $\mathfrak{m} \in \tau_0$ und $\mathfrak{m} \neq \emptyset$. Man bezeichnet mit F ein beliebiges Element von $\mathfrak{m}$ und mit $\{F_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ ein System, das für beliebige $\varkappa \in M$ und $\xi \in I$ die Relation $(\varkappa F_\nu)^{-1} \cdot \cdot (\varkappa F) \in G_\xi$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$ erfüllt, wobei $\Delta_0 = \Delta_0(\varkappa, \xi)$ eine endliche Untermenge von Δ ist. Da $\mathfrak{m} \in \tau_0$, so gibt es wenigstens eine endliche Untermenge X von M und wenigstens ein $\xi \in I$, so daß $F_\lambda \in \mathfrak{m}$ für alle $\lambda \in \Lambda$, wenn $(\varkappa F_\lambda)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi(\lambda \in \Lambda(X, \xi))$ für ein beliebiges $\varkappa \in X$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}$ bzw. mit I_1 die Menge derjenigen Untermengen $X \subseteq M$ bzw. die Menge derjenigen Elemente $\xi \in I$, für die die obige Behauptung gilt. Es sei weiterhin $(\mathfrak{X}, I_1)$ diejenige Untermenge des Cartesischen Produktes $\mathfrak{X} \times I_1$, die aus denjenigen Paaren (X, ξ) besteht $(X \in \mathfrak{X}, \xi \in I_1)$, für die die obige Eigenschaft gilt. Es ist offenbar, daß $\mathfrak{X}$ und I_1 und demnach auch $(\mathfrak{X}, I_1)$ durch $\mathfrak{m}$ eindeutig bestimmt sind.

Gemäß der Bedingung, die das System $\{F_\nu\}_{\nu \in \Delta}$ erfüllt, gilt für beliebiges $X \in \mathfrak{X}$ und $\xi \in I_1$ die Relation $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi(\varkappa \in X)$, wenn $\nu \in \Delta \setminus \bar{\Delta}_0 \subseteq \Lambda(X, \xi)$, wobei $\bar{\Delta}_0 = \bigcup_{\varkappa \in X} \Delta_0(\varkappa, \xi) = \bar{\Delta}_0(X, \xi)$ eine endliche Untermenge von Δ ist. Da $\mathfrak{m} \in \tau_0$, folgt daß $F_\nu \in \mathfrak{m}$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \bar{\Delta}_0$. Wir bilden nun die folgende endliche Untermenge von Δ: $\bar{\Delta} = \bigcap_{(X, \xi) \in (\mathfrak{X}_1, I_1)} (X, \xi) = \bar{\Delta}(\mathfrak{X}, I_1) = \bar{\Delta}(\mathfrak{m})$. Dann gilt $F_\nu \in \mathfrak{m}$ für $\nu \in \Delta \setminus \bar{\Delta}$. Demnach $\mathfrak{m} \in \tau_1$.

Satz 3. (a) *Die Topologie* τ_0 *ist mit der in* G^M *auf Grund der Topologie* U *von* G *eingeführten Produkttopologie identisch.*

(b) $F_\nu \xrightarrow{\Phi} F(F_\nu, F \in \{G^M, \tau_0\}, \nu \in \Phi)$ *genau dann, wenn es für eine beliebige Umgebung der Form* $V_F^{\varkappa, \xi}(\varkappa \in M, \xi \in I)$ *von* F *ein* $\nu_0 = \nu_0(\varkappa, \xi) \in \Phi$ *existiert, so daß* $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ *für alle* $\nu \geqq \nu_0$.

(c) $F_\nu \xrightarrow{\Delta} F(F_\nu, F \in \{G^M, \tau_i\}\ (i=0, 1), \nu \in \Delta)$ *genau dann, wenn es für ein beliebiges* $\varkappa \in M$ *und* $\xi \in I$ *eine edliche Untermenge* $\Delta_0 = \Delta_0(\varkappa, \xi)$ *von* Δ *derart gibt, daß* $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ *für alle* $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$.

(d) *Die Topologie* τ_1 *ist mit derjenigen Topologie identisch, die man in* G^M *auf Grund des Begriffes der* Δ*-Konvergenz einführen kann.*

Beweis. (a). Es sei $\mathfrak{m}$ eine beliebige offene Menge des Raumes $\{G^M, \tau_0\}$. Dann gibt es für ein beliebiges $F \in M$ eine endliche Menge $X \subset M$ und ein $\xi \in I$, so daß $V_F^{X,\xi} \subseteqq \mathfrak{m}$. Es folgt daß

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{F \in \mathfrak{m}} V_F^{X,\xi} = \bigcup_{F \in \mathfrak{m}} \Big[\bigcap_{\varkappa \in X} \{F_\lambda; \varkappa F_\lambda \in (\varkappa F) G_\xi, \lambda \in \Delta(\varkappa, \xi)\} \Big].$$

Die Mengen $\{F_\lambda; \varkappa F_\lambda \in (\varkappa F) G_\xi, \lambda \in \Lambda(\varkappa, \xi)\}$ bilden also eine Unterbasis im Raume $\{G^M, \tau_0\}$. Es ist bekannt, daß eine solche Unterbasis für die Produkttopologie charakteristisch ist (s. zB. [1]).

(b) Es folgt aus (a), daß eine beliebige Moore—Smith Folge in $\{G^M, \tau_0\}$ genau dann konvergent ist, wenn sie in dem topologischen Raum $\{G, U\}$ punktweise konvergent ist: $F_\nu \xrightarrow{\Phi} F$ in $\{G^M, \tau_0\}$ genau dann, wenn $\varkappa F_\nu \xrightarrow{\Phi} \varkappa F$ in $\{G, U\}$ für alle $\varkappa \in G$. Das heißt, daß es im Falle eines beliebigen Elementes $\varkappa \in G$, für jedes $\xi \in I$ ein $\nu_0 = \nu_0(\varkappa, \xi) \in \Phi$ gibt, so daß $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ für alle $\nu \geqq \nu_0$. Demnach gilt (b).

(c) Es sei $F_\nu \xrightarrow{\Delta} F(F_\nu, F \in \{G^M, \tau_i\}\ (i=0,1), \nu \in \Delta)$. Dann gibt es für eine beliebige Umgebung V_F von F, also auch für ein beliebiges $V_F^{\varkappa,\xi} \in \tau_0 \subseteqq \tau_1$ eine endliche Untermenge $\Delta_0 = \Delta_0(V_F) = \Delta_0(V_F^{\varkappa,\xi}) = \Delta_0(\varkappa, \xi)$ von Δ, so daß $F_\nu \in V_F^{\varkappa,\xi}$, wenn $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$. Demnach haben wir $(\varkappa F_\nu)^{-1}(\varkappa F) \in G_\xi$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta_0$. Die Bedingung ist also notwendig in beiden Topologien. Weil $\tau_0 \subseteqq \tau_1$, genügt es die Hinlänglichkeit der Bedingung für den Fall der Topologie τ_1 zu beweisen. Dieses folgt aber unmittelbar aus der Definition 1' und der Definition der Umgebungen in $\{G^M, \tau_1\}$.

(d) Aus (c) folgt, dass man die Definition 1' auch folgendermaßen formulieren kann: $\mathfrak{m} \subseteqq G^M$ ist eine offene Menge in $G,^M$ wenn entweder $\mathfrak{m} = \emptyset$ ist, oder wenn für ein beliebiges $F \in \mathfrak{m}$, aus $F_\nu \xrightarrow{\Delta} F$ folgt, daß $F_\nu \in \mathfrak{m}$ für alle $\nu \in \Delta \setminus \Delta^*$, wobei $\Delta^* = \Delta^*(\mathfrak{m})$ eine endliche Untermenge von Δ ist. Daraus folgt die Behauptung (d).

Korollar 1. $\{G^M, \tau_i\}$ $(i=0,1)$ *sind genau dann Hausdorffsche Räume, wenn die Bedingung* (1) *erfüllt ist.*

Beweis. $\{G, U\}$ ist ein Hausdorffscher Raum genau dann, wenn die Bedingung (1) erfüllt ist. Die Gültigkeit unserer Behauptung folgt also aus Satz 3(a) und Satz 2.

In der Menge G^M kann man eine Operation folgendermassen definieren: gehören F_1, F_2 der Menge G^M an, so sei $\varkappa(F_1 + F_2) = \varkappa F_1 \cdot \varkappa F_2$ für alle $\varkappa \in M$. Die Multiplikation der Elemente von G^M mit den Elementen von O wird folgendermassen definiert: wenn $F \in G^M$ und $\alpha \in O$, so sei $\varkappa(F\alpha) = (\varkappa F)\alpha$ für alle $x \in M$. Es ist leicht zu ersehen, daß G^M *eine Gruppe mit dem rechtseitigen Operatorenbereich* O *ist*. Sind $G_\xi(\xi \in I)$ von O zuläßige Normalteiler der O-Gruppe G, so ist $\{G, U\}$ eine topologische O-Gruppe. Aus Satz 3 ((a) und (c)) und der Bemerkung 1 folgt das

Korollar 2. *Sind* $G_\xi(\xi \in I)$ *von* O *zuläßige Normalteiler der* O*-Gruppe* G, *so sind* $\{G^M, \tau_i\}$ $(i=0, 1)$ *topologische* O*-Gruppen.*

Wir setzen nun voraus, daß die Untergruppenmenge $\{G_\xi\}_{\xi\in I}$ nur ein Glied $G_0=\{e\}$ enthält. Die in G eingeführte Topologie U ist in diesem Fall diskret. Aus Satz 3 ((b) und (c)) und der Bemerkung 1 folgt:

Lemma 1. (a) *Ist* $\{G_\xi\}_{\xi\in I}=\{e\}$, *so gilt* $F_\nu \xrightarrow{\Phi} F(F_\nu, F\in\{G^M, \tau_0\})$ *genau dann, wenn für jedes* $\varkappa\in M$ *ein* $\nu_0=\nu_0(x)\in\Phi$ *existiert, so dass* $\varkappa F_\nu=\varkappa F$ *für alle* $\nu\geqq\nu_0$.

(b) *Ist* $\{G_\xi\}_{\xi\in I}=\{e\}$, *so gilt* $F_\nu \xrightarrow{\Delta} F(F_\nu, F\in\{G^M, \tau_i\}$ $(i=0,1)$, $\nu\in\Delta)$ *genau dann, wenn es für jedes* $\varkappa\in M$ *eine endliche Untermenge* $\Delta_0=\Delta_0(\varkappa)$ *von* Δ *gibt, so daß* $\varkappa F_\nu=\varkappa F$ *für alle* $\nu\in\Delta\setminus\Delta_0$.

Bemerkung 4. Ist die Bedingung (1) erfüllt, so folgt aus dem Korollar 1 des Satzes 3, dass jede endliche Untermenge von $\{G^M, \tau_i\}$ $(i=0,1)$ abgeschlossen ist.

Lemma 2. *Es sei* $\{G_\xi\}_{\xi\in I}=\{e\}$. *Eine Untermenge* $\mathfrak{c}\in\{G^M, \tau_0\}$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn sie entweder endlich ist, oder, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: existiert für eine beliebige endliche Untermenge* $X\subseteqq G$ *eine unendliche Menge von Elementen* $F_\lambda\in\mathfrak{c}$, *so daß* $\varkappa F_\lambda=\varkappa F$ $(\varkappa\in X)$, *dann muß* $F\in G^M$ *der Menge* $\mathfrak{c}$ *angehören.*

Beweis. Auf Grund der Bemerkung 4 genügt es nur den Fall wenn $\mathfrak{c}$ unendlich ist, zu untersuchen. Weil $\{G_\xi\}_{\xi\in I}=\{e\}$, so bilden die Mengen $V_F^X=\{F_\lambda\in G^M; \varkappa F_\lambda= =\varkappa F, \lambda\in\Lambda(X), \varkappa\in X\}$ ein vollständiges Umgebungssystem des Elementes $F\in\{G^M, \tau_0\}$ (s. Bemerkung 3). Die im Satz enthaltene Bedingung ist also mit der folgenden gleichwertig: $V_F^X\cap\mathfrak{c}$ ist unendlich für alle endliche Untermengen X von M. Ist $\mathfrak{c}$ abgeschlossen, so folgt aus dieser Bedingung, dass $F\in\mathfrak{c}$. Umgekehrt, sei nun $V_F^X\cap\mathfrak{c}$ unendlich und $F\cap\mathfrak{c}$ vorausgesetzt. Das heißt, $\mathfrak{c}$ enthält alle Grenzelemente von $\mathfrak{c}$, demnach ist $\mathfrak{c}$ abgeschlossen.

Es sei $M=G$ und G^M der volle Endomorphismenring $\mathscr{E}(G)$ der abelschen Gruppe G. Wenn man die in $\mathscr{E}(G)$ in [6] bzw. in [2] eingeführten Topologien in Betracht zieht (s. A) und B)), so folgt aus dem Lemma 2 bzw. aus dem Satz 3(d) und dem Lemma 1(b), der folgende

Satz 4. *Die in* $\mathscr{E}(G)$ *eingeführte Topologie* τ_0 *bzw. die Topologie* τ_1 *ist im Fall* $\{G_\xi\}_{\xi\in I}=\{e\}$ *mit der in* $\mathscr{E}(G)$ *in* [6] *bzw. in* [2] *eingeführten Topologie identisch* [5]).

Aus den Sätzen 4 und 2, folgt daß *die in* $\mathscr{E}(G)$ *in* [2] *eingeführte Topologie feiner als die in* [6] *eingeführte Topologie ist.*

[5]) Aus der Fußnote 3 folgt, daß die zweite Behauptung dieses Satzes auch im Fall der in G^M in [3] eingeführten Topologie gilt.

Literatur

[1]. J. L. KELLEY, General Topology, *Toronto-New York-London*, 1964.

[2] I. GY. MAURER, Despre topologizarea inelelor, *Stud. Cerc. Mat. Acad. R. P. R. (Cluj)*, VIII., 1—2, (1957), 177—180.

[3] I. GY. MAURER—I. PURDEA—I. VIRÁG, Une topologie dans l'espace des applications univoques d'un ensemble, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R.*, **6** (54), 3—4, 1962, 195—206.

[4] I. GY. MAURER—M. SZILÁGYI, Über eine Untergruppentopologie der Operatorgruppen, *Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* (unter Druck).

[5] G. BUNS—J. SCHMIDT, Zur Äquivalenz von Moore—Smith—Folgen und Filtern, *Math. Nachr.* **2** (1955), 169—186.

[6] T. SZELE, On a topology in endomorphism rings of abelian groups, *Publ. Math. (Debrecen)* **5** (1957) 1—4.

(Eingegangen am 27. Mai 1966.)