Über lineare Operatortransformationen

Von E. GESZTELYI (Debrecen)

Einleitung

Es sei $\mathcal{M}$ der Mikusin'skische Operatorenkörper. Unter einer linearen Operatortransformation F in $\mathcal{M}$ verstehen wir eine Vorschrift, durch die jedem $x \in \mathcal{M}$ eindeutig ein Element $F(x) \in \mathcal{M}$ zugeordnet wird, und zwar so, daß

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

gilt für alle $x, y \in \mathcal{M}$ und beliebige komplexe Zahlen λ, μ. Der Begriff der Operatortransformation ist also eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktionaltransformation.

Wir werden uns in dieser Arbeit mit den stetigen linearen Operatortransformationen beschäftigen. Eine Operatortransformation F heißt an einer Stelle $x_0 \in \mathcal{M}$ stetig wenn für jede Folge x_n von Operatoren, die gegen x_0 in $\mathcal{M}$ konvergiert, gilt

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = F(x_0).$$

Eine Funktionaltransformation heißt (in der Literatur) stetig, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist. Wir können uns mit dieser Definition für Operatortransformationen nicht begnügen.

Eine Operatortransformation F wird stetig genannt, wenn die Opertorfunktion

$$g(\lambda) = F[f(\lambda)]$$

bei beliebiger Operatorfunktion $f(\lambda)$ in jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ stetig ist, wo $f(\lambda)$ stetig ist.

Es gilt die folgende wichtige Behauptung: (Satz 3. 1). Ist die Operatortransformation F stetig, so ist sie an jeder Stelle stetig.

Hier werden die folgenden linearen Operatortransformationen häufig vorkommen:

1. Die algebraische Derivation (siehe [1]. In der Terminologie und Notation halten wir uns an dieses Buch von Mikusiński). Man führt sie durch die Formeln

$$D(f) = \{-tf(t)\} \quad \textit{für} \quad f \in \mathcal{C}$$

$$D(x) = \frac{D(f)g - D(g)f}{g^2} \quad \textit{für} \quad x = \frac{f}{g} \in \mathcal{M} \qquad (f, g \in \mathcal{C})$$

ein.

2. Die Transformation T^α (s. [1]) ist erklärt, wie folgt

$$T^\alpha(f) = \{e^{\alpha t} f(t)\} \quad \textit{für} \quad f \in \mathscr{C} \qquad (\alpha \in \mathscr{K} = \textit{komplexer Zahlenkörper})$$

$$T^\alpha(x) = \frac{T^\alpha(f)}{T^\alpha(g)} \quad \textit{für} \quad x = \frac{f}{g} \in \mathscr{M} \qquad (f, g \in \mathscr{C}).$$

3. Die Transformation U_k (siehe [1] und [2]). Man definiert sie durch die Formeln

$$U_k(f) = \{kf(kt)\} \quad \textit{für} \quad f \in \mathscr{C} \ (k \ \textit{ist eine positive reelle Zahl})$$

$$U_k(x) = \frac{U_k(f)}{U_k(g)} \quad \textit{für} \quad x = \frac{f}{g} \in \mathscr{M} \qquad (f, g \in \mathscr{C})$$

4. Die Multiplikation mit einem Opertor c erzeugt ebenfalls eine lineare Operatortransformation:

$$F(x) = cx.$$

Alle diese Operatortransformationen sind stetig (§ 3). Wir bemerken, daß die Transformation, die jeder in $[0, \infty)$ differenzierbaren Funktion ihre Ableitung zuordnet, eine nichtstetige lineare Funktionaltransformation ist. Diese Transformation läßt sich auch als Operatortransformation $F(x) = sx$ auffassen, wobei $s = \dfrac{1}{\{1\}}$ der Differentialoperator ist. Diese Operatortransformation ist in $\mathscr{M}$ stetig.

Ist A eine selbstadjungierte Transformation eines Hilbertschen Raumes, so gilt nach dem Spektralsatz (siehe z.B. [3]) die Integraldarstellung

$$Au = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda u,$$

wobei die Spektralschar $\{E_\lambda\}$ durch die Transformation A eindeutig bestimmt ist. Wir beweisen, daß ein entsprechender Satz für jede stetige lineare Operatortransformation gilt (Satz 5. 5 § 5.):

Jede stetige lineare Operatortransformation F besitzt die Integraldarstellung

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) F(e^{-\lambda s}) \, d\lambda \tag{1}$$

für beliebige $u \in \mathscr{C}\mathscr{U}$, wobei $\mathscr{C}\mathscr{U}$ die Menge derjenigen Zahlfunktionen $u(\lambda)$ ist, die in einem Intervall $[\alpha, \infty)$ stetig sind, und im Intervall $(-\infty, \alpha)$ identisch verschwinden. Die Zahl α hängt von u ab.

Es wird in § 4. bewiesen, daß die Menge $\mathscr{C}\mathscr{U}$ in $\mathscr{M}$ dicht ist. (D.h. zu jedem $x \in \mathscr{M}$ gibt es eine gegen x strebende Folge $u_1, u_2, \ldots$ von Funktionen aus der Menge $\mathscr{C}\mathscr{U}$.) Die Formel (1) charakterisiert also eine stetige lineare Operatortransformation F vollständig.

Die weiteren Paragraphen sind hauptsächlich den Anwendungen des obigen Darstellungsatzes gewidmet. Wir lösen in einigen Spezialfällen die folgende Aufgabe: Es sei $\mathscr{T}$ der Ring der stetigen linearen Operatortransformationen. Gegeben seien zwei Teilmengen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ von $\mathscr{T}$. Man bestimme diejenigen Elemente F von $\mathscr{F}$, die mit jedem Element G von $\mathscr{G}$ vertauschbar sind. Die folgende Tabelle zeigt die diesbezüglichen Ergebnisse.

Satz	$\mathscr{G}$	$\mathscr{F}$	Die Menge von Elementen $F \in \mathscr{F}$ die mit jedem Element $G \in \mathscr{G}$ vertauschbar sind
6·1	$\{s\}$	$\mathscr{T}$	$\mathscr{M}$
6·2	$\{D\}$	$\mathscr{M}$	$\mathscr{K}$
6·3	$\{s^n\}$ für eine ganze Zahl $n \neq 0$	$\mathscr{T}$	$\mathscr{M}$
6·4	$\{e^{\mu s}\}$ für jedes $\mu \in (-\infty, \infty)$	$\mathscr{T}$	$\mathscr{M}$
6·5	$\{U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots\}$	$\mathscr{M}$	$\mathscr{K}$
7·1	$\{D\}$	$\mathscr{T}$	$\{F/F(u) = \varphi(t)u(t);\ \ \varphi \in \mathscr{C}^{(\infty)}(-\infty, \infty);\ u \in \mathscr{C}\mathscr{U}\}$
8·3	$\{D\}$	$\{F/F \in \mathscr{T}$; und multiplikativ$\}$	$\{F/F = T^{\alpha};\ \ \alpha \in \mathscr{K}\}$

Der Satz 6. 5 wird in § 10. eine wichtige Rolle spielen.

Wir beschäftigen uns in § 8. mit den multiplikativen stetigen linearen Operatortransformationen. Es wird gezeigt, daß jede solche Transformation F die Integraldarstellung

(2) $$F(f) = \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda F(s)}\, d\lambda$$

besitzt für $f \in \mathscr{C}$. (Satz 8. 2.) Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 8. 3: Gilt die Beziehung

$$FD = kDF \qquad (k > 0)$$

für eine stetige lineare und multiplikative Operatortransformation F, so ist

(3) $$F = U_k T^{-p},$$

wobei p irgendeine komplexe Zahl ist. (Satz 8. 4.)

Setzt man (3) in (2), so ergibt sich

(4) $$U_k T^{-p}(f) = \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda p} e^{-\frac{\lambda}{k} s}\, d\lambda.$$

Strebt $k \to \infty$ unter dem Integral (4), so geht die rechte Seite von (4) formal in das Laplace-Integral

(5) $$\int_0^\infty f(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda$$

über. Es wird in § 9. bewiesen, daß dieser Grenzübergang wirklich stattfindet, falls das Laplace-Integral (5) konvergiert. Satz 9. 3.)

Es liegt nahe, die Laplace-Transformierte eines Operators x mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} U_n T^{-p}(x) \qquad (p \in \mathcal{K}) \tag{6}$$

zu definieren. Interessant ist die Tatsache, daß der Grenzübergang (6) stets eine Zahl liefert, falls er existiert. (Satz 10. 1.)

Wir haben also auf diese Art eine neue Definition der Laplace-Transformation erhalten. Die Konsistenzsätze 10. 2 und 10. 3 ferner die angegebenen Beispiele zeigen, daß die obige Definition der Laplace-Transformation eine gemeinsame Verallgemeinerung der von G. Doetsch ([4]) stammenden verallgemeinerten Laplace-Transformation k-ter und ∞-er Ordnung und der von V. A. Ditkin ([5], [6]) herrührenden Laplace-Transformation von Operatoren ist.

Es sei dem Herrn J. Mikusiński für seine wertvollen Bemerkungen und Ratschläge wärmster Dank ausgesprochen.

§ 1. Der Ring der linearen Operatortransformationen

Definition 1. 1. Es sei $\mathcal{M}$ der Mikusińskische Operatorenkörper. Als Operatortransformation bezeichnen wir jede Funktion F, die den Elementen x einer gewissen Teilmenge $\mathcal{D}_F$ von $\mathcal{M}$ Elemente $F(x)$ aus $\mathcal{M}$ zuordnet. Hat dieselbe die folgenden Eigenschaften:

1. der Definitionsbereich $\mathcal{D}_F$ ist ein linearer Raum, d.h. $\lambda x + \mu y \in \mathcal{D}_F$ gilt für alle $x, y \in \mathcal{D}_F$ und komplexe Zahlen λ, μ,
2. F ist additiv: $F(x+y) = F(x) + F(y)$, $(x, y \in \mathcal{D}_F)$,
3. F ist homogen: $F(\lambda x) = \lambda F(x)$, $(x \in \mathcal{D}_F,\ \lambda \in \mathcal{K})$ so heißt die Operatortransformation F linear in $\mathcal{D}_F$.

F in $\mathcal{D}_F$ heißt multiplikativ, falls 1. $\mathcal{D}_F$ ein Ring ist und

2. $$F(xy) = F(x)F(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathcal{D}_F$$

gilt.

Es wird hier stets $\mathcal{D}_F = \mathcal{M}$ vorausgesetzt, wenn der Gegenteil nicht betont wird.

In der Menge $\mathcal{T}$ der linearen Operatortransformationen definiert man die Addition und Multiplikation in gewohnter Weise:

$$(F+G)(x) = F(x) + G(x), \ (FG)(x) = F[G(x)] \qquad (x \in \mathcal{M}).$$

Die Menge $\mathcal{T}$ bildet auf diese Art einen Ring. Man kann jedem Operator $a \in \mathcal{M}$ genau eine lineare Operatortransformation $A(x) = ax$ zuordnen. Diese Operatortransformationen bilden einen Teilring von $\mathcal{T}$, der dem Ring $\mathcal{M}$ isomorph ist. Auf Grund dieses Isomorphismus wird vorausgesetzt, daß $\mathcal{M}$ in $\mathcal{T}$ eingebettet ist. Wir können also über die Summe $a+F$ und das Produkt aF $(a \in \mathcal{M},\ F \in \mathcal{T})$ sprechen, so daß

$$(a+F)(x) = ax + F(x) \quad \text{und} \quad (aF)(x) = aF(x)$$

gilt für jedes $x \in \mathcal{M}$.

§ 2. Ableitung einer linearen Operatortransformation

Wir werden im Ring $\mathscr{T}$ eine Operation definieren, die jeder Transformation $F \in \mathscr{T}$ eine Transformation $F' \in \mathscr{T}$ zuordnet. Sie hat die üblichen Eigenschaften einer gewöhnlichen Differentiation.

Definition 2. 1. Die Operatortransformation

$$F' = sF - Fs \tag{2. 1}$$

heißt die Ableitung der linearen Operatortransformation F. Höhere Ableitungen definiert man rekursiv:

$$F^{(n)} = sF^{(n-1)} - F^{(n-1)}s \qquad (n = 1, 2, \ldots; \quad F^{(0)} = F). \tag{2. 2}$$

Satz 2. 1. *Die Ableitung besitzt die folgenden Eigenschaften:*

$$(F+G)' = F' + G', \tag{2. 3}$$

$$(FG)' = F'G + FG'. \tag{2. 4}$$

BEWEIS.

$$(F+G)' = s(F+G) - (F+G)s = sF + sG - Fs - Gs =$$

$$= (sF - Fs) + (sG - Gs) = F' + G'.$$

$$(FG)' = s(FG) - (FG)s = (sF)G - (Fs)G + F(sG) - F(Gs) =$$

$$= (sF - Fs)G + F(sG - Gs) = F'G + FG'.$$

BEISPIELE.

1. Ist $c \in \mathscr{M} \subset \mathscr{T}$, so ist $c' = 0$. Beweis. Da $c(x) = cx$ ist, so folgt nach der Denition 2. 1:

$$c'(x) = (sc - cs)(x) = (sc)(x) - (cs)(x) = scx - csx = 0 = 0 \cdot x$$

für jedes $x \in \mathscr{M}$.

2. $D' = -1$.

BEWEIS. Nach den Eigenschaften der algebraischen Derivation ergibt sich

$$D'(x) = (sD - Ds)(x) = (sD)(x) - (Ds)(x) = sD(x) - D(sx) =$$

$$= sD(x) - [x + sD(x)] = -x = -1 \cdot x$$

für beliebiges $x \in \mathscr{M}$, folglich ist $D' = -1$.

5. $(T^{\alpha})' = \alpha T^{\alpha}$.

BEWEIS. Da die Operatortransformation multiplikativ ist und $T^\alpha(s) = s-\alpha$ gilt ([1]), so folgt

$$(T^\alpha)'(x) = (sT^\alpha - T^\alpha s)(x) = (sT^\alpha)(x) - (T^\alpha s)(x) = sT^\alpha(x) - T^\alpha(sx) =$$
$$= sT^\alpha(x) - T^\alpha(s)T^\alpha(x) = [s-T^\alpha(s)]T^\alpha(x) = \alpha T^\alpha(x).$$

4. $U_k' = \frac{k-1}{k} sU_k. \qquad (k>0)$

Beweis. Da U_k multiplikativ ist, ferner

$$U_k(s) = U_k\left(\frac{\{1\}}{\{t\}}\right) = \frac{U_k(\{1\})}{U_k(\{t\})} = \frac{\{k\}}{\{k^2 t\}} = \frac{1}{k}\frac{\{1\}}{\{t\}} = \frac{s}{k}$$

gilt, so erhält man

$$U_k'(x) = (sU_k - U_k s)(x) = sU_k(x) - U_k(sx) = sU_k(x) - U_k(s)U_k(x) =$$
$$= [s-U_k(s)]U_k(x) = \left(s - \frac{s}{k}\right)U_k(x) = \frac{k-1}{k} sU_k(x)$$

für jedes $x \in \mathcal{M}$, und daraus folgt die Behauptung.

3. Stetige lineare Operatortansformationen

Definition 3. 1. Eine Operatortransformation F (sie braucht nicht linear zu sein) heißt an einer Stelle $x^* \in \mathcal{M}$ stetig, wenn für jede Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Operatoren, die gegen x^* in $\mathcal{M}$ konvergiert, gilt

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = F(x^*). \tag{3. 0}$$

Definition 3. 2. Es sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Operatoren. Eine Operatorfunktion $f(\lambda)$ wird im Intervall $[\alpha, \beta]$ eine $\mathcal{H}$-Funktion genannt, wenn $f(\lambda) \in \mathcal{H}$ gilt für jedes $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Definition 3. 3. Es sei F eine (nicht notwendigerweise lineare) Operatortransformation mit dem Definitionsbereich $\mathcal{H}$. F wird in $\mathcal{H}$ stetig genannt, wenn jede Operatorfunktion $g(\lambda) = F[f(\lambda)]$ in jedem solchen Intervall $[\alpha, \beta]$ stetig ist, in dem $f(\lambda)$ eine stetige $\mathcal{H}$-Funktion ist.

Ist eine Operatortransformation F in $\mathcal{M}$ stetig, so heißt sie stetig.

Satz 3. 1. *Eine stetige Operatortransformation ist an jeder Stelle stetig.*
BEWEIS. Ist die Operatorfunktion $g(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig so folgt (s. [7])

$$\lim_{n\to\infty} g(\lambda_n) = g(\lambda^*) \tag{3. 1}$$

für eine beliebige gegen λ^* strebende Zahlenfolge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ $(\lambda_n, \lambda^* \in [\alpha, \beta])$.

Es sei $f(\lambda)$ eine in $[0, 1]$ stetige Operatorfunktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. $f(1) = x^*$,
2. $f(\lambda_n) = x_n$,
3. $\lambda_n \to 1$ für $n \to \infty$.

Dann ist die Operatorfunktion $g(\lambda) = F[f(\lambda)]$ wegen der Stetigkeit von F in $[0,1]$ stetig. So folgt aus den Eigenschaften von $f(\lambda)$ nach (3. 1)

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F[f(\lambda_n)] = \lim_{n\to\infty} g(\lambda_n) = g(1) = F[f(1)] = F(x^*).$$

Es genügt also zu zeigen, daß man zu einer beliebigen konvergenten Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ von Operatoren stets eine in $[0, 1]$ stetige Operatorfunktion $f(\lambda)$ mit den Eigenschaften 1., 2., 3. konstruieren kann.

Es sei

$$(3.2)\quad a(\lambda) = n(n+1)(x_n - x_{n-1}) \text{ für } \frac{n-1}{n} < \lambda \leqq \frac{n}{n+1}, \quad (n = 1, 2, \ldots, x_0 = 0)$$

und

$$(3.3)\qquad f(\lambda) = \begin{cases} \int\limits_0^\lambda a(\mu)\,d\mu & \text{für } 0 \leqq \lambda < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* & \text{für } \lambda = 1 \end{cases}$$

Dann erfüllt $f(\lambda)$ die Eigenschaft 1. Setzen wir $\lambda_n = \frac{n}{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ so ist nach (3. 2) und (3. 3)

$$f(\lambda_n) = f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \int\limits_0^{\frac{n}{n+1}} a(\mu)\,d\mu = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\frac{k-1}{k}}^{\frac{k}{k+1}} a(\mu)\,d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^n k(k+1)(x_k - x_{k-1}) \int\limits_{\frac{k-1}{k}}^{\frac{k}{k+1}} d\mu = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n.$$

Die Funktion $f(\lambda)$ hat also auch die Eigenschaften 2. und 3.

Nun braucht nur noch gezeigt zu werden, daß $f(\lambda)$ im Intervall $[0, 1]$ stetig ist. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ folgt die Existenz eines Operators $p \neq 0$ derart, daß folgendes gilt:

$$(3.4)\qquad p x_n = \{\varphi_n(t)\} \in \mathscr{C}$$

$$(3.5)\qquad p x^* = \{\varphi^*(t)\} \in \mathscr{C}$$

$$(3.6)\qquad \varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi^*(t) \quad \text{für } n \to \infty,$$

d. h. $\varphi_n(t)$ strebt in jedem endlichen Intervall $[0,T]$ gleichmäßig gegen $\varphi^*(t)$.

Es wird die Stetigkeit von $f(\lambda)$ in $[0, 1]$ bewiesen sein, falls wir die Stetigkeit der parametrischen Funktion $pf(\lambda)=\{f_1(\lambda, t)\}$ im Bereich $\mathscr{D}$: $\{0\leqq\lambda\leqq 1; 0\leqq t<\infty\}$ nachweisen. Es gibt zu jedem $\lambda\in(0, 1)$ genau eine ganze Zahl $n\geqq 0$ derart, daß

$$\frac{n}{n+1}<\lambda\leqq\frac{n+1}{n+2} \tag{3. 7}$$

gilt. Dann folgt aus (3. 3) und Eigenschaft 2.

$$\begin{aligned} pf(\lambda) &= p\int_0^{\frac{n}{n+1}} a(\mu)\,d\mu+p\int_{\frac{n}{n+1}}^{\lambda} a(\mu)\,d\mu = \\ &= px_n+(n+1)(n+2)(px_{n+1}-px_n)\left(\lambda-\frac{n}{n+1}\right) = \\ &= \left\{\varphi_n(t)+(n+1)(n+2)[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)]\left(\lambda-\frac{n}{n+1}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3. 8}$$

Man sieht leicht die Stetigkeit von $pf(\lambda)$ in den Punkten $(\lambda; t)$, wenn $0\leqq\lambda<1$ ist. Wir beweisen die Stetigkeit in den Punkten $(1; t_0)$ $(t_0\in[0, \infty))$. Es sei $T>t_0$ eine feste Zahl. Es sei weiterhin ein $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es wegen (3.6) eine ganze Zahl $N>0$ derart, daß

$$|\varphi_n(t)-\varphi^*(t)|<\frac{\varepsilon}{6} \tag{3. 9}$$

gilt für jedes $t\in[0, T]$ und $n\geqq N$. Hieraus folgt

$$|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|\leqq|\varphi_{n+1}(t)-\varphi^*(t)|+|\varphi^*(t)-\varphi_n(t)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3. 10}$$

für $n\geqq N$, $t\in[0, T]$. Ist

$$0<1-\lambda<\frac{1}{N+1}=\delta_1, \tag{3. 11}$$

so ist

$$n\geqq N \tag{3. 12}$$

wo n die durch den Ungleichungen (3. 7) eindeutig bestimmte ganze Zahl ist. In der Tat, aus (3. 11) ergibt sich $\frac{N}{N+1}<\lambda$. Ist nun $\lambda\leqq\frac{N+1}{N+2}$, so genügt $n=N$ den Ungleichungen (3. 7). Ist $\frac{N+1}{N+2}<\lambda$, so folgt aus (3. 7), daß $n>N$ ist.

Da aus (3. 7)

$$0<\lambda-\frac{n}{n+1}\leqq\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{3. 13}$$

folgt, so ergibt sich nach (3. 9), (3. 10) und wegen (3. 12)

$$|pf(\lambda)-pf(1)| = |f_1(\lambda, t)-f_1(1, t)| =$$

$$(3.14) \qquad = |\varphi_n(t)+(n+1)(n+2)[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)]\left(\lambda-\frac{n}{n+1}\right)-\varphi^*(t)| <$$

$$< |\varphi_n(t)-\varphi^*(t)|+|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|(n+1)(n+2)\left(\lambda-\frac{n}{n+1}\right) < \frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{2}$$

für

$$1-\lambda < \delta_1 = \frac{1}{N+1}, \qquad 0 \leqq t \leqq T.$$

Da $f_1(1, t)=\varphi^*(t)$ in $[0, \infty)$ stetig ist, folgt die Existenz einer Zahl $\delta_2>0$ derart, daß

$$(3.15) \qquad |f_1(1, t)-f_1(1, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt für $|t-t_0|<\delta_2$.

Setzen wir

$$\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2, \frac{T-t_0}{2}\right),$$

$$0 < 1-\lambda < \delta, \quad |t-t_0| < \delta,$$

so gelten die Ungleichungen (3. 14) und (3. 15). Daher ist

$$|f_1(\lambda, t)-f_1(1, t_0)| \leqq |f_1(\lambda, t)-f_1(1, t)|+|f_1(1, t)-f_1(1, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wenn $0<1-\lambda<\delta$ und $|t-t_0|<\delta$ ist. Damit haben wir die Stetigkeit von $f(\lambda)$ in $[0, 1]$ und somit auch den Satz bewiesen.

Beispiele

1. D ist stetig. Es sei $f(\lambda)$ eine beliebige, in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion. Dann läßt sich $f(\lambda)$ in der folgenden Form schreiben

$$(3.16) \qquad f(\lambda) = \frac{\{f(\lambda, t)\}}{\{q(t)\}}, \qquad (q \in \mathscr{C})$$

wobei $f(\lambda, t)$ in $\mathscr{D}$: $\{\alpha \leqq \lambda \leqq \beta; 0 \leqq t < \infty\}$ stetig ist. Da

$$Df(\lambda) = \frac{1}{q^2}[q\{-tf(\lambda, t)\}-\{f(\lambda, t)\}\{-tq(t)\}] = \frac{1}{q^2}\left\{\int_0^t (t-2\tau)q(t-\tau)f(\lambda, \tau)\,d\tau\right\}$$

ist, wobei die Funktion $g(\lambda, t)=\int_0^t (t-2\tau)q(t-\tau)f(\lambda, \tau)\,d\tau$ offenbar in $\mathscr{D}$ stetig ist, so ist die Operatorfunktion $Df(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig. D ist also stetig.

2. T^{α} ist stetig. Ist nämlich $f(\lambda)$ eine in $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion von der Form (3. 16), so ist die Oper torfunktion

$$T^{\alpha}[f(\lambda)] = \frac{T^{\alpha}\{f(\lambda, t)\}}{T^{\alpha}\{q(t)\}} = \frac{\{e^{\alpha t}f(\lambda, t)\}}{\{e^{\alpha t}q(t)\}}$$

stetig in $[\alpha, \beta]$, da die Funktion $g(\lambda, t) = e^{\alpha t}f(\lambda, t)$ in $\mathcal{D}$ stetig ist.

3. U_k ist stetig. Die Behauptung folgt aus der Formel

$$U_k[f(\lambda)] = \frac{U_k\{f(\lambda, t)\}}{U_k\{q(t)\}} = \frac{\{f(\lambda, kt)\}}{\{q(kt)\}}.$$

4. Die Operatortransformation $c \in \mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ ist offenbar stetig.

Man kann die folgenden Sätze leicht bewuisen.

Satz 3. 2. *Sind die Operatortransformationen F und G stetig, so sind auch die Transformationen $F+G$ und FG stetig.*

Satz 3. 3. *Ist die lineare Operatortransformation F stetig, so ist auch $F' = sF - Fs$ stetig.*

§ 4. Die Operatortransformation $\Lambda(x)$

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen mit einer nichtlinearen Operatortransformation, die den Operatoren reelle Zahlen zuordnet. Diese Operatortransformation, die durch $\Lambda(x)$ bezeichnet wird, sei erst für Funktionen der Klasse $\mathcal{C}$ erklärt:

$$\Lambda(f) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(t) \text{ in keiner Umgebung des Nullpunktes identisch verschwindet} \\ \alpha, & \text{falls } f(t) \text{ im Intervall } [0, \alpha) \text{ identisch verschwindet und } f(t) \text{ in keiner Umgebung von } \alpha \text{ identisch verschwindet} \\ \infty & \text{falls } f(t) \equiv 0 \text{ ist} \end{cases}$$

Satz 4. 1. Es gilt

(4. 1) $$\Lambda(fg) = \Lambda(f) + \Lambda(g),$$

(wo fg die Faltung

(4. 2) $$fg = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

bezeichnet.)

Beweis. Erst zeigen wir, daß

(4. 3) $$\Lambda(fg) \geqq \Lambda(f) + \Lambda(g)$$

ist.

Für $\Lambda(f) = \Lambda(g) = 0$ gilt (4. 3), da nach Definition $\Lambda(fg) \geqq 0$ ist. Ist $\Lambda(f) \geqq 0$ und $\Lambda(g) > 0$, so sieht man sofort, daß (4. 2) im Intervall $[0, \Lambda(f) + \Lambda(g)]$ identisch verschwindet.

Nun beweisen wir die Ungleichung

(4. 4) $$\Lambda(fg) \leqq \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Für $\Lambda(fg)=0$ gilt (4. 4), da $\Lambda(f)+\Lambda(g)\geqq 0$ ist. Ist $0<\Lambda(fg)\leqq\Lambda(f)$, so gilt (4. 4) umsomehr. Ist $0\leqq\Lambda(f)<\Lambda(fg)$, so verschwindet g nach dem Satz von Titchmarsh (s. [8], [9]) in $[0, \Lambda(fg)-\Lambda(f)]$ identisch. Also ist $\Lambda(g)\geqq\Lambda(fg)-\Lambda(f)$, d. h. (4. 4) gilt.

Aus (4. 3) und (4. 4) ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung. Wir haben gesehen, daß der Satz 4. 1 eine Folgerung des Titmarshschen Satzes ist. Umgekehrt: aus dem Satz 4. 1 folgt der Satz von Titchmarsh. Gilt nämlich $fg=0$ in $[0, T]$, so folgt, daß $\Lambda(fg)\geqq T$ ist. Ist weiterhin $g(t)=0$ in $[0, \alpha]$ $(0<\alpha<T)$, aber $g(t)\not\equiv 0$ in $[0, \alpha+\delta]$ mit beliebigem $\delta>0$, so ist $\Lambda(g)=\alpha$. Dann folgt aus (4. 1) $\Lambda(f)+\alpha=\Lambda(f)+\Lambda(g)=\Lambda(fg)\geqq T$, daher $\Lambda(f)\geqq T-\alpha$. Daraus folgt $f=0$ in $[0, T-\alpha]$.

Definition 4. 1. Die Operatortransformation Λ sei für Operatoren folgenderweise erklärt:

$$\Lambda(x) = \Lambda\left(\frac{u}{v}\right) = \Lambda(u)-\Lambda(v)$$

für $x=\dfrac{u}{v}\in\mathcal{M},\ u, v\in\mathcal{C}$.

Wir können uns davon leicht überzeugen, daß diese Definition korrekt ist, d. h. $\Lambda(x)$ von der speziellen Repräsentation u/v von x unabhängig ist. Weiterhin ist ersichtlich, daß

$$\Lambda(xy) = \Lambda(x)+\Lambda(y) \tag{4. 5}$$

für alle $x, y\in\mathcal{M}$ gilt.

Satz 4. 2. *Es gilt*

$$\Lambda(\alpha x)=\Lambda(x) \tag{4. 6}$$

für jedes $x\in\mathcal{M}$ und eine beliebige komplexe Zahl $\alpha\neq 0$.

Beweis. Ist $x\in\mathcal{C}$; so folgt (4. 6) aus der Definition unmittelbar. Für $x=\dfrac{u}{v}\in\mathcal{M}$ erhält man nach der Definition 4. 1

$$\Lambda(\alpha x) = \Lambda\left(\frac{\alpha u}{v}\right) = \Lambda(\alpha u)-\Lambda(v) = \Lambda(u)-\Lambda(v) = \Lambda\left(\frac{u}{v}\right) = \Lambda(x).$$

Es gilt der

Satz 4. 3. *Für beliebige Operatoren x, y besteht die Ungleichung*

$$\Lambda(x+y) \geqq \min\,[\Lambda(x), \Lambda(y)] \tag{4. 7}$$

Beweis. Für $x, y\in\mathcal{C}$, ist (4. 7) unmittelbar klar. Sind $x=\dfrac{f}{u}$, $y=\dfrac{g}{v}$ $(f, g, v\in\mathcal{C})$ beliebige Operatoren, so folgt

$$\begin{aligned}\Lambda(x+y) &= \Lambda\left(\frac{f+g}{v}\right) = \Lambda(f+g)-\Lambda(v) \geqq \min\,[\Lambda(f), \Lambda(g)]-\Lambda(v) = \\ &= \min[\Lambda(f)-\Lambda(v),\Lambda(g)-\Lambda(v)] = \min\left[\Lambda\left(\frac{f}{v}\right),\quad \Lambda\left(\frac{g}{v}\right)\right] = \\ &= \min\,[\Lambda(x), \Lambda(y)].\end{aligned}$$

Satz 4. 4. *Es sei $f(\lambda)$ eine beliebige, im Intervall $[\alpha, \beta]$ stetige Operatorfunktion, die in $[\alpha, \beta]$ nirgends verschwindet. Dann ist die Funktion*

$$\varphi(\lambda) = \Lambda[f(\lambda)]$$

in $[\alpha, \beta]$ beschränkt.

Beweis. Wegen der Stetigkeit läßt sich $f(\lambda)$ in folgender Form schreiben:

$$f(\lambda) = \frac{\{f_1(\lambda, t)\}}{\{q(t)\}}, \qquad (q \in \mathscr{C}) \tag{4. 8}$$

wobei die Funktion $f_1(\lambda, t)$ in $\mathscr{D}$: $\{\alpha \leqq \lambda \leqq \beta;\ 0 \leqq t < \infty\}$ stetig ist. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $f_1(\lambda, 0) = 0$ ist für jedes $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Da

$$\varphi(\lambda) = \Lambda[f(\lambda)] = \Lambda[f_1(\lambda, t)] - \Lambda[q(t)]$$

ist, so brauchen wir die Beschränktheit von $\psi(\lambda) = \Lambda[f_1(\lambda, t)]$ für $\lambda \in [\alpha, \beta]$ zu beweisen.

Wir zeigen, daß die Funktion $\psi(\lambda) \geqq 0$ von oben beschränkt ist.
Setzen wir voraus, daß $\psi(\lambda)$ nichtbeschränkt ist. Dann existiert eine Zahlenfolge $\lambda_1, \lambda_2 \ldots,\ \lambda_n, \ldots,\ (\lambda_n \in [\alpha, \beta])$ mit der Eigenschaft: $\lambda_n \to \lambda_0 \in [\alpha, \beta]$ und $\psi(\lambda_n) = \Lambda[f_1(\lambda_n, t)] \to \infty$ für $n \to \infty$. Da $f_1(\lambda_n, t) = 0$ für $0 \leqq t \leqq \Lambda[f_1(\lambda_n, t)] = \psi(\lambda_n)$ ist, so folgt, daß die Folge $g_n(t) = f_1(\lambda_n, t)$ von Funktionen fastgleichmäßig gegen Null konvergiert. Dann ergibt sich aus der Stetigkeit von $f_1(\lambda, t)$, daß

$$f_1(\lambda_0, t) = \lim_{n \to \infty} f_1(\lambda_n, t) = 0$$

ist für jedes feste $t \in [0, \infty)$. Daraus folgt, daß $f(\lambda_0) = 0$ ist. Das ist aber ein Widerspruch, da nach Voraussetzung $f(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ nirgends verschwindet. $\psi(\lambda)$ ist also beschränkt.

Satz 4. 5. *Es sei $x \neq 0$ ein Operator, für den die Potenz x^λ definiert ist. D. h. es gibt eine durch x^λ bezeichnete Operatorfunktion mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *x^λ ist stetig im Intervall $-\infty < \lambda < \infty$,*

b) $x^1 = x$,

c) $x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu,\ \lambda, \mu \in (-\infty, \infty)$.

Dann ist

$$\Lambda(x^\lambda) = \lambda \Lambda(x). \tag{4. 9}$$

Beweis. Es folgt aus den Eigenschaften b) und c), daß die Operatorfunktion x^λ nirgends verschwindet. Die Zahlfunktion $\varphi(\lambda) = \Lambda(x^\lambda)$ ist also nach dem Satz 4. 4 in jedem endlichen Intervall beschränkt. Da

$$\varphi(\lambda + \mu) = \Lambda(x^{\lambda+\mu}) = \Lambda(x^\lambda x^\mu) = \Lambda(x^\lambda) + \Lambda(x^\mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu) \tag{4. 10}$$

ist, so ist die Lösung der Cauchyschen Gleichung $\varphi(\lambda) = \varphi(1)\lambda$. Wenn wir berücksichtigen, daß $\varphi(\lambda) = \Lambda(x^\lambda)$ und $\varphi(1) = \Lambda(x)$ ist, so erhalten wir hieraus die Beziehung (4. 9).

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}_\alpha$ derjenigen Operatoren x, für die $\Lambda(x) \geqq -\alpha$ gilt, wo α eine reelle Zahl ist.

Satz 4. 6. *Ist $\alpha < \beta$, so ist $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}_\beta$.*

BEWEIS. Ist $x \in \mathcal{M}_\alpha$, so ist $\Lambda(x) \geqq -\alpha > -\beta$, also $x \in \mathcal{M}_\beta$ und mithin $\mathcal{M}_\alpha \subseteqq \mathcal{M}_\beta$. Da $\Lambda\left(e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) = -\frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, so folgt $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \in \mathcal{M}_\beta$, aber $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \notin \mathcal{M}_\alpha$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 4. 7. *Es gilt*

$$\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}.$$

BEWEIS. Es gibt für jedes $x \in \mathcal{M}$ eine Zahl $\alpha \geqq 0$ derart, daß $\Lambda(x) \geqq -\alpha$ ist, und somit $x \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt.

Satz 4. 8. *$\mathcal{M}_\alpha$ ist ein linearer Raum.*

BEWEIS. Da $\Lambda(0) = \infty$ ist, so ist offenbar $0 \cdot x \in \mathcal{M}_\alpha$ für jedes $x \in \mathcal{M}$. Ist nun $x \in \mathcal{M}_\alpha$ und $\lambda \neq 0$ eine beliebige Zahl, so folgt nach Satz 4. 2 $\Lambda(\lambda x) = \Lambda(x) \geqq -\alpha$. Es gilt also $\lambda x \in \mathcal{M}_\alpha$ für $x \in \mathcal{M}_\alpha$ und beliebige Zahlen λ. Aus $x, y \in \mathcal{M}_\alpha$ folgt stets $x + y \in \mathcal{M}_\alpha$. Denn dann gilt $\Lambda(x) \geqq -\alpha$ und $\Lambda(y) \geqq -\alpha$, und folglich nach Satz 4. 3 $\Lambda(x+y) \geqq \min[\Lambda(x), \Lambda(y)] \geqq -\alpha$.

Definition 4. 2. Es sei $\mathcal{H}$ eine beliebige Menge von Operatoren. Wir kennzeichnen durch $\mathcal{H}a$ die Menge sämtlicher Operatoren y der Form $y = xa$, wobei $x \in \mathcal{H}$ ist.

Satz 4. 9. Für eine beliebige reelle Zahl α gilt

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_0 e^{\alpha s}. \tag{4. 11}$$

BEWEIS. Ist $y \in \mathcal{M}_0 e^{\alpha s}$, so läßt sich y in der Form $y = xe^{\alpha s}$ schreiben, wo $x \in \mathcal{M}_0$ ist. Da $\Lambda(x) \geqq 0$ ist, so folgt

$$\Lambda(y) = \Lambda(xe^{\alpha s}) = \Lambda(x) + \Lambda(e^{\alpha s}) = \Lambda(x) - \alpha \geqq -\alpha,$$

und somit $y \in \mathcal{M}_\alpha$. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathcal{M}_\alpha \supseteqq \mathcal{M}_0 e^{\alpha s}$ ist. Ist nun $y \in \mathcal{M}_\alpha$, so gilt $\Lambda(y) \geqq -\alpha$, und deshalb für $x = ye^{-\alpha s}$:

$$\Lambda(x) = \Lambda(ye^{-\alpha s}) = \Lambda(y) + \Lambda(e^{-\alpha s}) = \Lambda(y) + \alpha \geqq -\alpha + \alpha = 0.$$

So ist $x \in \mathcal{M}_0$ und somit $y = xe^{\alpha s} \in \mathcal{M}_0 e^{\alpha s}$. Es gilt also (4. 11).

FOIAŞ ([10]) und FENYŐ ([11]) haben den folgenden Satz bewiesen:

Satz F. *Für jeden Operator f/g, wobei g in keiner Umgebung des Nullpunktes verschwindet, gibt es eine Folge $k_n \in \mathcal{C}$ $(n = 1, 2, \dots)$ von Funktionen derart, daß $k_n \to \frac{f}{g}$ in $\mathcal{M}$ strebt.*

Definition 4. 3. Es seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2 \supseteqq \mathcal{H}_1$ Mengen von Operatoren. $\mathcal{H}_1$ heißt in $\mathcal{H}_2$ dicht, wenn jedes $x \in \mathcal{H}_2$ ein Grenzwert einer Folge von Elementen aus $\mathcal{H}_1$ ist.

Man kann den Satz F. mittels der obigen Definition folgendermaßen formulieren:

Satz F. $\mathscr{C}$ ist in $\mathscr{M}_0$ dicht.

Satz 4. 10. $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ *ist dicht in* $\mathscr{M}$.

Beweis. Da nach Satz 4. 9 $\mathscr{M}_\alpha = \mathscr{M}_0 e^{\alpha s}$ ist, so folgt nach Satz F, daß $\mathscr{C} e^{\alpha s}$ in $\mathscr{M}_\alpha$ dicht ist. Die Menge $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ ist also dicht in $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{M}_\alpha = \mathscr{M}$ (s. Satz 4. 7).

Bemerkung. Die Menge $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ wird in den folgenden Paragraphen eine wichtige Rolle spielen. Sind die Werte einer stetigen Operatortransformation F für die Elemente von $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ bekannt, so ist $F(x)$ für jedes $x \in \mathscr{M}$ bekannt. Denn aus $u_n \to x$ ($u_n \in \bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$; $n = 1, 2, \ldots$) folgt nach Satz 3. 1 stets $F(u_n) \to F(x)$.

Die Menge $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ ist kein linearer Raum. Man kann aber leicht einen linearen Raum von Funktionen finden, der in $\mathscr{M}$ dicht ist. Es sei $\mathscr{U}$ die Menge sämtlicher Funktionen $f(\lambda)$, die in $(-\infty, \infty)$ lokalintegrierbar sind, und in einem Intervall $(-\infty, -\alpha)$ identisch verschwinden (die Zahl α hängt von f ab). Die Menge $\mathscr{U}$ ist offensichtlich ein linearer Raum, und es gilt der

Satz 4. 11. $\mathscr{U}$ *ist in* $\mathscr{M}$ *dicht.*

Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s} \subset \mathscr{U}$ (s. [1]) ist.

Die Sätze 4. 10 und 4. 11 sind äquivalent. Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, daß der Satz 4. 10 eine Folgerung von Satz 4. 11 ist. Ist ein Operator x beliebig vorgegeben, so gibt es nach Satz 4. 11 eine Folge $u_n \in \mathscr{U}$ ($n = 1, 2, \ldots$) derart, daß $u_n \to sx$ strebt. Daher folgt $\frac{1}{s} u_n \to x$. Da $\frac{1}{s} u_n \in \bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ ist, so ist also $\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s}$ dicht in $\mathscr{M}$.

Wir führen der Kürze halber die Bezeichnung

$$\bigcup_{0 \leqq \alpha < \infty} \mathscr{C} e^{\alpha s} = \mathscr{C}\mathscr{U} \tag{4.12}$$

ein.

§ 5. Integraldarstellung stetiger linearer Operatortransformationen

In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, daß jede stetige lineare Operatortransformation eine Integraldarstellung besitzt. Um dies einzusehen, benötigen wir, daß das Integral einer Operatorfunktion als der Grenzwert einer Riemannschen, oder allgemeiner, einer Stieltjesschen Summe angesehen werden kann. Demnach ist das Integral einer Operatorfunktion im Sinne von [12] zu verstehen.[1]) Unter dem uneigentlichen Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dg(\lambda)$$

[1]) Wir haben in [12] das Integral der Operatorfunktion $f(\lambda)$ bezüglich der Operatorfunktion $g(\lambda)$ als der Grenzwert der Summe

$$\Sigma f(\xi_i)\,[g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})]$$

definiert.

verstehen wir den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(\lambda)\, dg(\lambda),$$

falls er existiert.

Satz 5. 1. *Ist $u \in \mathscr{C}\mathfrak{U}$, so gilt*

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda. \tag{5. 1}$$

Beweis. Der Satz ist eine einfache Folgerung der Mikusińskischen Formel

$$f = \int_{0}^{\infty} f(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda, \tag{5. 2}$$

die für $f \in \mathscr{C}$ gilt. Ist $u \in \mathscr{C}\mathfrak{U}$, so gibt es nach (4. 12) eine Zahl $\alpha \geqq 0$ derart, daß $u \in \mathscr{C} e^{\alpha s}$ und mithin $ue^{-\alpha s} = \{u(t-\alpha)\} \in \mathscr{C}$ ist. Dann gilt nach (5. 2)

$$ue^{-\alpha s} = \int_{0}^{\infty} u(\lambda - \alpha) e^{-\lambda s} d\lambda.$$

Hieraus ergibt sich

$$u = e^{\alpha s} \int_{0}^{\infty} u(\lambda-\alpha) e^{-\lambda s}\, d\lambda = \int_{0}^{\infty} u(\lambda-\alpha) e^{-(\lambda-\alpha)s}\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\infty} u(\mu) e^{-\mu s} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mu) e^{-\mu s} d\mu.$$

Hier berücksichtigt man, daß $u(\mu) = 0$ ist für $-\infty < \mu < -\alpha$.

Satz 5. 2. *Ist die Operatorfunktion $f(\lambda)$ bezüglich einer Zahlfunktion $\varphi(\lambda)$ im endlichen Intervall $[\alpha, \beta]$ integrierbar, so ist auch die Operatorfunktion $g(\lambda) = F[f(\lambda)]$ bezüglich $\varphi(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ integrierbar, falls F eine stetige und lineare Operatortransformation ist. Ferner gilt*

$$\int_{\alpha}^{\beta} F[f(\lambda)]\, d\varphi(\lambda) = F\Big[\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big]. \tag{5. 3}$$

Beweis. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})[\varphi(\lambda_k^{(n)}) - \varphi(\lambda_{k-1}^{(n)})] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)$$

existiert unabhängig von der Wahl der Zahlen

$$\alpha = \lambda_0^{(n)} < \lambda_1^{(n)} < \ldots < \lambda_n^{(n)} = \beta \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\lambda_{k-1}^{(n)} \leqq \xi_k^{(n)} \leqq \lambda_k^{(n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wenn $\lim_{n\to\infty} \max_{k=1,2,\dots,n} (\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k-1}^{(n)}) = 0$ ist, da $f(\lambda)$ nach Voraussetzung bezüglich $\varphi(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ integrierbar ist. So ergibt sich nach Satz 3. 1

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k^{(n)})[\varphi(\lambda_k^{(n)}) - \varphi(\lambda_{k-1}^{(n)})] = \sum_{k=1}^{n} F[f(\xi_k^{(n)})][\varphi(\lambda_k^{(n)}) - \varphi(\lambda_{k-1}^{(n)})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F\big[f(\xi_k^{(n)})\big(\varphi(\lambda_k^{(n)}) - \varphi(\lambda_{k-1}^{(n)})\big)\big] = F\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})\big(\varphi(\lambda_k^{(n)}) - \varphi(\lambda_{k-1}^{(n)})\big)\right] =$$

$$= F(a_n) \to F\Big[\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big] \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Der Satz gilt auch für ein unendliches Intervall:

Satz 5. 3. *Existiert* $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)$ *für die Zahlfunktion* $\varphi(\lambda)$, *so existiert auch*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F[f(\lambda)]\, d\varphi(\lambda)$$

für eine beliebige stetige lineare Operatortransformation F, *und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F[f(\lambda)]\, d\varphi(\lambda) = F\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big]. \tag{5. 4}$$

Beweis. Nach Satz 5. 2 gilt für jedes endliche n

$$\int_{-n}^{n} F[f(\lambda)]\, d\varphi(\lambda) = F\Big[\int_{-n}^{n} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big].$$

Dann ist nach Satz 3. 1 wegen der Stetigkeit von F

$$\int_{-\infty}^{\infty} F[f(\lambda)]\, d\varphi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} F[f(\lambda)]\, d\varphi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} F\Big[\int_{-n}^{n} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big] =$$

$$= F\Big[\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big] = F\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\varphi(\lambda)\Big].$$

Satz 5. 4. *Ist die Operatorfunktion* $f(\lambda)$ *im endlichen Intervall* $[\alpha, \beta]$ *stetig differenzierbar, so ist auch* $g(\lambda) = F[f(\lambda)]$ *in diesem Intervall stetig differenzierbar, wenn die Operatortransformation* F *stetig und linear ist. Es gilt ferner*

$$\frac{d}{d\lambda} F[f(\lambda)] = F\left[\frac{d}{d\lambda} f(\lambda)\right]. \tag{5. 5}$$

BEWEIS. Da $f'(\lambda)$ in $[\alpha, \beta]$ stetig ist, ist auch $h(\lambda)=F[f'(\lambda)]$ in $[\alpha, \beta]$ stetig. So folgt nach Satz 5. 2

$$\int_{\alpha}^{\lambda} h(\mu)\,d\mu = \int_{\alpha}^{\lambda} F[f'(\mu)]\,d\mu = F\Big[\int_{\alpha}^{\lambda} f'(\mu)\,d\mu\Big] = F[f(\lambda)-f(\alpha)] =$$

$$= F[f(\lambda)]-F[f(\alpha)] = g(\lambda)-g(\alpha).$$

Die Operatorfunktion $h(\lambda)$ läßt sich wegen der Stetigkeit in der Form

$$h(\lambda)=p^{-1}\{h_1(\lambda, t)\} \qquad (p\neq 0)$$

schreiben, wobei die parametrische Funktion $h_1(\lambda, t)$ im Bereich $\mathscr{D}$: $\{\alpha\leqq\lambda\leqq\beta;\ 0\leqq t<\infty\}$ stetig ist. Dann sind die Funktionen

$$p[g(\lambda)-g(\alpha)] = \Big\{\int_{\alpha}^{\lambda} h_1(\mu, t)\,d\mu\Big\} = \{g_1(\lambda, t)\},$$

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial\lambda} = h_1(\lambda, t)$$

in $\mathscr{D}$ stetig. Die Operatorfunktion $g(\lambda)$ ist also in $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(\lambda) = [g(\lambda)-g(\alpha)]' = p^{-1}\Big\{\frac{\partial}{\partial\lambda}g_1(\lambda, t)\Big\} = p^{-1}\{h_1(\lambda, t)\} = h(\lambda),$$

d. h. $(F[f(\lambda)])'=F[f'(\lambda)]$.

Satz 5. 5. *Jede stetige lineare Operatortransformation F besitzt die Integraldarstellung*

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)F(e^{-\lambda s})\,d\lambda \tag{5. 6}$$

für jedes $u\in\mathscr{C}\mathscr{U}$.

BEWEIS. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung der Sätze 5. 1 und 5. 3, und der Formel

$$F[u(\lambda)e^{-\lambda s}] = u(\lambda)F(e^{-\lambda s}),$$

die wegen der Homogenität von F gilt, da $u(\lambda)$ eine Zahlfunktion ist.

§ 6. Die Vertauschbarkeit von stetigen linearen Operatortransformationen

Wir haben in § 2. bewiesen, daß $c'=0$ $(c\in\mathscr{M}\subset\mathscr{T})$ ist. Die Operatoren verhalten sich also bezüglich dieser Ableitung, wie die Konstanten. Es gilt auch die Umkehrung dieser Behauptung:

Satz 6. 1. *Ist $F'=0$ für eine stetige lineare Operatortransformation F, so ist $F=c\in\mathscr{M}\subset\mathscr{T}$.*

BEWEIS. Die Bedingung $F' = sF - Fs = 0$ bedeutet die Vertauschbarkeit von s und F:

$$sF = Fs. \tag{6. 1}$$

Die Operatorfunktion $g(\lambda) = F(e^{-\lambda s})$ ist nach Satz 5. 4 in jedem endlichen Intervall stetig differenzierbar. So folgt aus (6. 1)

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = F(-se^{-\lambda s}) = -F(se^{-\lambda s}) = -(Fs)(e^{-\lambda s}) =$$
$$= -(sF)(e^{-\lambda s}) = -sF(e^{-\lambda s}) = -sg(\lambda).$$

Es ist also die Differentialgleichung

$$g'(\lambda) + sg(\lambda) = 0 \tag{6. 2}$$

unter der Anfangsbedingung

$$g(0) = F(1) = c \tag{6. 3}$$

aufzulösen. Die Lösung dieser Gleichung bei (6. 3) lautet (s. [1])

$$g(\lambda) = ce^{-\lambda s}.$$

Ist nun $u \in \mathscr{C}\mathscr{U}$, so erhalten wir nach Satz 5. 5

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) F(e^{-\lambda s})\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) ce^{-\lambda s}\, dy = c \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) e^{-\lambda s}\, d\lambda = cu.$$

Da $\mathscr{C}\mathscr{U}$ in $\mathscr{M}$ dicht ist, so folgt aus der Stetigkeit von F, daß $F(x) = cx$ ist für jedes $x \in \mathscr{M}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Es sei F eine stetige lineare Operatortransformation. Wir betrachten die Menge $\mathscr{B}_F$ sämtlicher Operatoren, die mit F vertauschbar sind. Wie man leicht nachprüfen kann, ist $\mathscr{B}_F$ ein Körper, der den komplexen Zahlenkörper stets enthält. Der Körper $\mathscr{B}_F$ ist abgeschlossen bezüglich der Konvergenz in $\mathscr{M}$, d. h. aus $b_n \in \mathscr{B}_F$, $b_n \to b^*$ folgt stets $b^* \in \mathscr{B}_F$. (Da nämlich $F(b_n x) = b_n F(x)$ $(x \in \mathscr{U})$ gilt, folgt $F(b^* x) = b^* F(x)$ aus der Stetigkeit von F.)

Für ein beliebiges $\mathscr{B}_F$ gilt offenbar

$$\mathscr{K} \subseteqq \mathscr{B}_F \subseteqq \mathscr{M}.$$

wo $\mathscr{K}$ der komplexe Zahlenkörper ist.

$\mathscr{B}_F = \mathscr{M}$ gilt genau dann, wenn $F(x) = cx$ ist. In der Tat, gilt $Fx = xF$ für jedes $x \in \mathscr{M}$, so erhalten wir

$$F(x) = (Fx)(1) = (xF)(1) = xF(1) = cx.$$

Es kann vorkommen, daß $\mathscr{B}_F = \mathscr{K}$ ist:

Satz 6. 2. *Gilt für einen Operator b*

$$bD = Db, \tag{6. 4}$$

so ist b eine Zahl.

Beweis. Benutzt man (6. 4) und die Eigenschaft der algebraischen Derivation, so ergibt sich

$$bD(x)=(bD)(x)=(Db)(x)=D(bx)=bD(x)+xD(b)$$

für jedes $x\in\mathcal{M}$, und daher $xD(b)=0$. Da x willkürlich ist, so folgt $D(b)=0$. Hieraus folgert man nach einem Satz von Mikusiński, daß b eine Zahl ist. (s. [13].)

Man kann leicht eine stetige lineare Operatortransformation angeben, für die

$$\mathcal{K}\subset\mathcal{B}_F\subset\mathcal{M} \tag{6. 5}$$

gilt. Es sei zum Beispiel $F=\frac{1}{2}(T^i+T^{-i})$ $(i=\sqrt{-1})$. Dann sind F und $e^{2\pi s}$ vertauschbar:

$$Fe^{2\pi s} = e^{2\pi s}F \tag{6. 6}$$

Diese Behauptung folgt aus der folgenden Eigenschaft von T^α: Ist α eine beliebige komplexe Zahl und λ eine beliebige reelle Zahl, so ist

$$T^\alpha e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-\alpha)}T^\alpha \tag{6. 7}$$

In der Tat, wegen $T^\alpha(e^{\lambda s})=e^{\lambda(s-\alpha)}$ (s. [1].) erhalten wir

$$(T^\alpha e^{\lambda s})(x) = T^\alpha(e^{\lambda s}x) = T^\alpha(e^{\lambda s})T^\alpha(x) = e^{\lambda(s-\alpha)}T^\alpha(x)$$

für jedes $x\in\mathcal{M}$. Dann folgt aus (6. 7)

$$Fe^{2\pi s} = \tfrac{1}{2}(T^i+T^{-i})e^{2\pi s} = \tfrac{1}{2}(T^ie^{2\pi s}+T^{-i}e^{2\pi s}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}[e^{-2\pi i}(e^{2\pi s}T^i)+e^{2\pi i}(e^{2\pi s}T^{-i})] = e^{2\pi s}\tfrac{1}{2}(T^i+T^{-i}) = e^{2\pi s}F.$$

Da $e^{2\pi s}\in\mathcal{B}_F$ keine Zahl ist, gilt $\mathcal{K}\subset\mathcal{B}_F$. Da weiterhin nach § 2. $F'=\frac{1}{2}(iT^i-iT^{-i})\neq 0$ ist, so folgt $F\notin\mathcal{M}$ und somit $\mathcal{B}_F\subset\mathcal{M}$, d. h. es gilt (6. 5).

Eine Verallgemeinerung von Satz 6. 1 ist der

Satz 6. 3. *Es sei $n\neq 0$ eine ganze Zahl. Gilt*

$$Fs^n = s^nF \tag{6. 8}$$

für eine stetige lineare Operatortransformation F, so hat $F(x)$ die Form $F(x)=cx$.

Beweis. Man kann voraussetzen, daß n positiv ist. Besteht nämlich (6. 8) für eine negative ganze Zahl, so gilt auch $Fs^{-n}=s^{-n}F$ da $\mathcal{B}_F$ ein Körper ist. Die Operatorfunktion $f(\lambda)=F(e^{-\lambda s})$ genügt der homogen Differentialgleichung

$$f^{(n)}(\lambda)=(-1)^n s^n f(\lambda)=0. \tag{6. 9}$$

In der Tat erhalten wir nach Satz 5. 4 unter Berücksichtigung von (6. 8)

$$f^{(n)}(\lambda) = F[(-1)^ns^ne^{-\lambda s}] = (-1)^nF(s^ne^{-\lambda s}) =$$
$$= (-1)^n(Fs^n)(e^{-\lambda s}) = (-1)^n(s^nF)(e^{-\lambda s}) =$$
$$= (-1)^ns^nF(e^{-\lambda s}) = (-1)^ns^nf(\lambda).$$

Wir haben dabei die Anfangsbedingung

$$f(0)=F(1)=c. \tag{6. 10}$$

Die charakteristische Gleichung (s. [1].) von (6. 9) ist

$$y^n = (-1)^n s^n. \tag{6.11}$$

Eine Lösung von (6. 11) ist $y = -s$. Die Operatoren $y_k = -\varepsilon_k s$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ sind also sämtliche Lösungen von (6. 11), wobei die Zahlen ε_k die komplexen Wurzeln der Gleichung $x^n=1$ sind.

Ist n eine ungerade Zahl, so ist $y_1 = -s$ die einzige Wurzel von (6. 11), die ein Logarithmus ist. Die allgemeine Lösung von (6. 9) lautet in diesem Fall

$$f(\lambda) = c_1 e^{-\lambda s}.$$

Berücksichtigt man die Bedingung (6. 10), so ergibt sich $c_1 = c$. Ist nun $u \in \mathscr{C}\mathscr{U}$, so gilt nach Satz 5. 5

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) c e^{-\lambda s} d\lambda = c \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda = cu,$$

und somit wegen der Stetigkeit von F: $F(x) = cx$. $(x \in \mathscr{M})$.

Ist n eine gerade Zahl, so kommen nur die Wurzeln $y_1 = -s$, $y_2 = s$ in Betracht. Dementsprechend ist

$$f(\lambda) = c_1 e^{-\lambda s} + c_2 e^{\lambda s} \tag{6.12}$$

die allgemeine Lösung von (6. 9). Nach dem Satz 5. 5 existiert das Integral (5. 6) auch in diesem Fall für jedes $u \in \mathscr{C}\mathscr{U}$. So muß in (6. 12) $c_2 = 0$ sein. Dann erhalten wir wieder das Ergebnis $f(\lambda) = ce^{-\lambda s}$. Daher folgt schon die Behauptung.

Satz 6. 4. *Ist die stetige lineare Operatortransformation F mit jedem $e^{\mu s}$ vertauschbar, wobei $\mu \in (-\infty, \infty)$ ist, so ist $F(x) = cx$.*

Beweis. Gilt

$$Fe^{\mu s} = e^{\mu s} F \tag{6.13}$$

für ein μ, so ist

$$g(\lambda) = e^{\lambda s} F(e^{-\lambda s}) \tag{6.14}$$

eine periodische Operatorfunktion mit der Periode μ. Setzt man in (6. 13) $-\mu$ statt μ, so bleibt die Gleichung richtig, da $\mathscr{B}_F$ ein Körper ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} g(\lambda+\mu) &= e^{(\lambda+\mu)s} F[e^{-(\lambda+\mu)s}] = e^{\lambda s} e^{\mu s} F(e^{-\mu s} e^{-\lambda s}) = \\ &= e^{\lambda s} e^{\mu s} (Fe^{-\mu s})(e^{-\lambda s}) = e^{\lambda s} e^{\mu s} (e^{-\mu s} F)(e^{-\lambda s}) = \\ &= e^{\lambda s} e^{\mu s} e^{-\mu s} F(e^{-\lambda s}) = e^{\lambda s} F(e^{-\lambda s}) = g(\lambda), \end{aligned}$$

d. h. $g(\lambda)$ ist periodisch mit der Periode μ. Gilt (6. 13) für jedes μ, so bekommt man hieraus $g(\mu) = g(0) = c$. So erhalten wir aus (6. 14) $F(e^{-\lambda s}) = ce^{-\lambda s}$. Hieraus folgt die Behauptung des Satzes mit einem Gedankengang, den wir schon in den Sätzen 6. 1 und 6. 3 verfolgt haben.

Satz 6. 5. *Ist ein Operator a mit jedem U_n $(n=1, 2, \ldots)$ vertauschbar:*

$$U_n a = a U_n, \tag{6.15}$$

so ist a eine Zahl.

BEWEIS. Wir benutzen die folgende Eigenschaft der Transformationen U_λ:

(6. 16) $$U_\mu U_\nu = U_{\mu\nu} \qquad (\mu > 0,\ \nu > 0).$$

Beweis von (6. 16). Für $f \in \mathscr{C}$ gilt

$$U_\mu U_\nu(f) = U_\mu\{\nu f(\nu t)\} = \{\mu\nu f(\nu\mu t)\} = U_{\mu\nu}(f).$$

Für beliebiges $x = \frac{f}{g} \in \mathscr{M}$ $(f, g \in \mathscr{C})$ ergibt sich daher

$$U_\mu U_\nu(x) = \frac{U_\mu U_\nu(f)}{U_\mu U_\nu(g)} = \frac{U_{\mu\nu}(f)}{U_{\mu\nu}(g)} = U_{\mu\nu}\left(\frac{f}{g}\right) = U_{\mu\nu}(x),$$

somit haben wir (6. 16) bewiesen.

Zum Beweis des Satzes multipliziere man beide Seiten von (6. 15) von links und auch von rechts mit $U_{1/n}$. So erhält man auf Grund von (6. 16)

(6. 17) $$U_{1/n}a = aU_{1/n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ist $r = \frac{n}{m}$ eine beliebige positive rationale Zahl, so erhalten wir aus (6. 16) und (6. 17)

$$U_r a = U_{n/m}a = U_n U_{1/m} a = U_n a U_{1/m} = aU_n U_{1/m} = aU_{n/m} = aU_r.$$

d. h. es gilt

(6. 18) $$U_r a = aU_r$$

für eine beliebige positive rationale Zahl r.

Da

$$U_r(1) = U_r\left(\frac{\{1\}}{\{1\}}\right) = \frac{U_r(\{1\})}{U_r(\{1\})} = 1$$

ist, so folgt aus (6. 18)

(6. 19) $$U_r(a) = a$$

für jede rationale Zahl $r > 0$.

Gegeben sei $\frac{u}{v} = a$, eine Repräsentante von a derart, daß die Funktionen u und v in $[0, \infty)$ stetig differenzierbar sind.

Dann können wir die Gleichung (6. 19) ausführlicher schreiben:

$$\frac{\{u(rt)\}}{\{v(rt)\}} = \frac{\{u(t)\}}{\{v(t)\}},$$

oder

$$\{u(rt)\}\{v(t)\} - \{v(rt)(u(t)\} = 0.$$

Nach einer Umformung lautet diese Gleichung

(6. 20) $$\{u(rt) - u(t)\}\{v(t)\} - \{u(t)\}\{v(rt) - v(t)\} = 0.$$

Setzt man $r=1+\frac{1}{n}$ in (6. 20) ($n=1, 2, \ldots$) so ergibt sich

$$\left\{\frac{u\left(t+\frac{1}{n}t\right)-u(t)}{\frac{1}{n}t}t\right\}\{v(t)\}-\left\{\frac{v\left(t+\frac{1}{n}t\right)-v(t)}{\frac{1}{n}t}t\right\}\{u(t)\}=0. \tag{6.21}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u\left(t+\frac{1}{n}t\right)-u(t)}{\frac{1}{n}t}t=tu'(t), \tag{6.22}$$

und dabei ist die Konvergenz in Intervall $[0, T]$ gleichmäßig. Gleicherweise gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v\left(t+\frac{1}{n}t\right)-v(t)}{\frac{1}{n}t}t=tv'(t). \tag{6.23}$$

Da die Ableitung $u'(t)$ im Intervall $[0, \infty)$ stetig ist, so ist sie in dem abgeschlossenen endlichen Intervall $[0, 2T]$ glechmäßig stetig. Bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon>0$ gibt es daher ein $\delta>0$, so daß

$$|u'(\tau)-u'(t)|<\frac{\varepsilon}{T} \tag{6.24}$$

ist für $|\tau-t|<\delta$, τ, $t\in[0, 2T]$.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für beliebige feste n und t ein τ_n mit den folgenden Eigenschaften:

$$0<t<\tau_n<t+\frac{1}{n}t, \tag{6.25}$$

$$\frac{u\left(t+\frac{1}{n}t\right)-u(t)}{\frac{1}{n}t}=u'(\tau_n). \tag{6.26}$$

Ist

$$n>\frac{T}{\delta}=N, \tag{6.27}$$

so ist wegen (6. 25) $0<\tau_n-t<\frac{1}{n}t<\frac{\delta}{T}t\leqq\delta$. Dann gilt nach (6. 24) und (6. 26)

$$\left|\frac{u\left(t+\frac{1}{n}t\right)-u(t)}{\frac{1}{n}t}t-u'(t)\cdot t\right|=|u'(\tau_n)-u'(t)|t<\frac{\varepsilon}{T}t\leqq\varepsilon$$

für $n>N$ und $t\in[0, T]$. Damit ist (6. 22) und sogleich auch (6. 23) bewiesen.

Nach dem Satz über die fastgleichmäßige Konvergenz (s. [1].) erhalten wir aus (6. 22), (6. 23) und (6. 21)

$$\{tu'(t)\}\{v(t)\}-\{u(t)\}\{tv'(t)\}=0.$$

Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe der algebraischen Derivation in der Form

(6. 28) $$\{v(t)\}D[\{u'(t)\}]-\{u(t)\}D[\{v'(t)\}]=0$$

schreiben. Benutzt man die Formeln $\{u'(t)\}=su-u(0)$, $\{v'(t)\}=sv-v(0)$, so ergibt sich aus (6. 28)

$$vD(su)-uD(sv)=0.$$

Hieraus erhalten wir

$$vD(u)-uD(v)=0$$

und somit

$$D(a)=D\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vD(u)-uD(v)}{v^2}=0,$$

Daraus folgt nach einem Satz von Mikusiński (s. [13]) daß a eine Zahl ist.

§ 7. Mit D vertauschbare stetige lineare Operatortransformationen

Wir haben in § 6. bewiesen, daß ein Operator, die keine Zahl ist, mit D nicht vertauschbar sein kann. Dagegen sind die Transformationen $D^2, D^3, \dots, P(D)=$ $=\alpha_0+\alpha_1 D+\dots+\alpha_n D^n$ $(\alpha_k\in\mathcal{K}\ k=1,2,\dots,n)$ mit D vertauschbar. Ein nichttriviales Beispiel für die Vertauschbarkeit mit D liefert die Transformation T^α (s. [14] S. 218.)

Zu jeder solchen Transformation F gehört eine in $(-\infty,\infty)$ unbeschränkt differenzierbare Funktion $\varphi(t)$ derart, daß $F(u)=\{\varphi(t)u(t)\}$ für jede Funktion $u\in\mathscr{C}\mathscr{U}$ eine gewöhnliche Multiplikation bedeutet. Zum Beispiel: $D(u)=\{-tu(t)\}$ $T^\alpha(u)=\{e^{\alpha t}u(t)\}$. Der folgende Satz zeigt, daß jede stetige lineare und mit D vertauschbare Operatortransformation diese Eigenschaft hat.

Satz 7. 1. *Gilt*

(7. 1) $$DF=FD$$

für eine stetige lineare Operatortransformation F, so gibt es eine in $(-\infty,\infty)$ beliebig vielmal differenzierbare Zahlfunktion $\varphi(t)$ so, daß

(7. 2) $$F(u)=\{\varphi(t)u(t)\}$$

gilt für jede Funktion $u\in\mathscr{C}\mathscr{U}$. Ist weiterhin $F^{(n)}$ die in § 2. erklärte n-te Ableitung von F, so gilt

(7. 3) $$F^{(n)}(u)=\{\varphi^{(n)}(t)u(t)\},$$

(wobei — natürlich — $\varphi^{(n)}(t)$ die gewöhnliche n-te Ableitung von $\varphi(t)$ ist).

Beweis. (a) Die Funktion

(7. 4) $$\varphi(\lambda)=e^{\lambda s}F(e^{-\lambda s})$$

ist eine Zahlfunktion, die im Intervall $-\infty<\lambda<\infty$ unbeschränkt differenzierbar ist. Aus (7. 1) folgt nämlich

$$D[F(e^{-\lambda s})] = (DF)(e^{-\lambda s}) = (FD)(e^{-\lambda s}) = F[D(e^{-\lambda s})] = F(-\lambda e^{-\lambda s})$$

und deshalb

$$D[\varphi(\lambda)] = D[e^{\lambda s}F(e^{-\lambda s})] = \lambda e^{\lambda s}F(e^{-\lambda s})+e^{\lambda s}D[F(e^{-\lambda s})] =$$
$$= \lambda e^{\lambda s}F(e^{-\lambda s})+e^{\lambda s}F(-\lambda e^{-\lambda s}) = \lambda e^{\lambda s}F(e^{-\lambda s})+e^{\lambda s}(-\lambda)F(e^{-\lambda s}) = 0.$$

$\varphi(\lambda)$ ist also für jedes λ eine Zahl. (s. [13]). Die Funktion $\varphi(\lambda)$ ist als Operatorfunktion nach Satz 5. 4 in jedem endlichen Intervall unbeschränkt stetig differenzierbar, da die Funktionen $e^{\lambda s}$ und $e^{-\lambda s}$ diese Eigenschaft haben. Hieraus folgt die gewöhnliche Derivierbarkeit von $\varphi(\lambda)$ in $(-\infty, \infty)$. Dann folgt aus (7. 4) nach Satz 5. 5

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)F(e^{-\lambda s})\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\varphi(\lambda)e^{-\lambda s}\,d\lambda = \{u(t)\varphi(t)\}$$

Damit haben wir die Formel (7. 2) bewiesen.

(b) Ist $f\in\mathscr{C}$ in $[0, \infty)$ stetig differenzierbar, so erhalten wir aus (7. 2)

$$F'(f)=(sF-Fs)(f)=sF(f)-F(sf)=s\{\varphi(t)f(t)\}-F[\{f'(t)\}+f(0)]=$$
$$=\{\varphi'(t)f(t)+\varphi(t)f'(t)\}+\varphi(0)f(0)-\{\varphi(t)f'(t)\}-F[f(0)]=$$
$$=\{\varphi'(t)f(t)\}+\varphi(0)f(0)-f(0)F(1).$$

Da aus (7. 4) $\varphi(0)=F(1)$ folgt, so ergibt sich $F'(f)=\{\varphi'(t)f(t)\}$. Wir wollen nun diese Formel für ein beliebiges $f\in\mathscr{C}\mathscr{U}$ beweisen.

(c) Ist die Funktion $y\in\mathscr{C}\mathscr{U}$ im Intervall $[\Lambda(y), \infty)$ stetig differenzierbar, so gilt

$$sy=\{y'(t)\}+y[\Lambda(y)]e^{-\Lambda(y)s} \tag{7. 5}$$

wobei

$$y'(t)=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}, & \text{für} \quad t\neq\Lambda(y)\\[2ex] \lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta t>0}}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}, & \text{für} \quad t=\Lambda(y)\end{cases}$$

ist.

Beweis von (c), Für $\Lambda(y)=0$ geht (7. 5) in die Formel

$$sy = \{y'(t)\}+y(0) \tag{7. 6}$$

über, da $y'\in\mathscr{C}$ ist. Für $\Lambda(y)=\alpha\neq 0$ ist $\{y(t+\alpha)\}=ye^{\alpha s}\in\mathscr{C}^{(1)}$, denn wegen

$$\Lambda(ye^{\alpha s}) = \Lambda(y)+\Lambda(e^{\alpha s}) = \alpha-\alpha = 0$$

gilt $y(t+\alpha)\in\mathscr{C}\subset\mathscr{M}_0$, und nach Voraussetzung ist $y(t+\alpha)$ in $[0, \infty)$ stetig differenzierbar. Folglich gilt nach (7. 6)

$$sye^{\alpha s}=\{y'(t+\alpha)\}+y(\alpha).$$

Hieraus folgt $sy=\{y'(t+\alpha)\}e^{-\alpha s}+y(\alpha)e^{-\alpha s}=\{y'(t)\}+y(\alpha)e^{-\alpha s}$, was zu beweisen war.

(d) Aus der Vertauschbarkeit von F und D folgt die Vertauschbarkeit von F' und D:

$$\begin{aligned} F'D&=(sF-Fs)D = sFD-FsD = sDF-F(Ds-1) = \\ &=(Ds-1)F-FDs+F = DsF-FDs = DsF-DFs = \\ &=D(sF-Fs) = DF'. \end{aligned}$$

Dann gibt es nach (a) eine in $(-\infty, \infty)$ unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi(t)$ derart, daß

$$F'(u)=\{\psi(t)u(t)\} \tag{7. 7}$$

gilt, da F' eine stetige lineare Operatortransformation ist. (Satz 3. 3).

(e) Setzen wir in (7. 7)

$$u=\frac{1}{s}e^{\alpha s} = \{H_{-\alpha}(t)\}\in\mathscr{C}\mathscr{U},$$

so erhalten wir nach (7. 2) und (7. 4)

$$\begin{aligned} \{\psi(t)H_{-\alpha}(t)\} &= F'\left(\frac{1}{s}e^{\alpha s}\right) = (sF-Fs)\left(\frac{1}{s}e^{\alpha s}\right) = sF\left(\frac{e^{\alpha s}}{s}\right)-F(e^{\alpha s}) = \\ &= sF[\{H_{-\alpha}(t)\}]-e^{\alpha s}e^{-\alpha s}F(e^{\alpha s}) = s\{\varphi(t)H_{-\alpha}(t)\}-e^{\alpha s}\varphi(-\alpha). \end{aligned} \tag{7. 8}$$

Da die Funktion $y=\varphi(t)H_{-\alpha}(t)\in\mathscr{C}\mathscr{U}$ in $[-\alpha, \infty)$ stetig differenzierbar ist, so folgt nach (c) wegen $\Lambda(y)\geqq-\alpha$:

$$s\{\varphi(t)H_{-\alpha}(t)\}=\{\varphi'(t)H_{-\alpha}(t)\}+\varphi[\Lambda(y)]e^{-\Lambda(y)s}. \tag{7. 9}$$

Ist $\Lambda(y)>-\alpha$, so ist $\varphi(-\alpha)=0$ und (wegen der Stetigkeit von $\varphi(t)$) $\varphi[\Lambda(y)]=0$. Dann folgt aus (7. 8) und (7. 9)

$$\psi(t)H_{-\alpha}(t)=\varphi'(t)H_{-\alpha}(t). \tag{7. 10}$$

Die Beziehung (7. 10) folgt aber aus (7. 8) und (7. 9) auch für $\Lambda(y)=-\alpha$, denn dann ist

$$\varphi[\Lambda(y)]e^{-\Lambda(y)s}-e^{\alpha s}\varphi(-\alpha) = 0.$$

Da (7. 10) für jedes α besteht, so gilt

$$\psi(t)=\varphi'(t) \tag{7. 11}$$

für jedes $t\in(-\infty, \infty)$.

Aus (7. 7) und (7. 11) folgt die Beziehung (7. 3) für $n=1$. Durch vollstendige Induktion ergibt sich (7. 3) für jedes n.

Bemerkung. Eine Folgerung des obigen Satzes ist die folgende Behauptung: Die gewöhnliche Multiplikation mit einer nicht-unbeschränkt differenzierbaren Funktion läßt sich nicht für Operatoren erweitern bei der gleichzeitigen Beibehaltung der Stetigkeit, der Distributivität und der Kommutativität.

§ 8. Multiplikative lineare Operatortransformationen

Satz 8. 1. *Gegeben sei eine multiplikative Operatortransformation F mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_F = \mathcal{C}$. Ist $F(f) \neq 0$ für $f \neq 0$, $f \in \mathcal{C}$, so ist die Operatortransformation*

$$\bar{F}(x) = \frac{F(u)}{F(v)} \tag{8. 1}$$

für jedes $x = \frac{u}{v} \in \mathcal{M}$ eindeutig erklärt. $\bar{F}(x)$ ist die einzige multiplikative Operatortransformation in $\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\bar{F}(f) = F(f), \tag{8. 2}$$

für jedes $f \in \mathcal{C}$ gilt. Ist F linar in $\mathcal{C}$, so ist auch $\bar{F}$ linear in $\mathcal{M}$.

BEWEIS. Man sieht leicht die Multiplikativität von $\bar{F}$ und auch die Linearität, wenn F linear ist.

(8. 2) folgt aus (8. 1): Ist $f = \frac{\{1\}\{f\}}{\{1\}} \in \mathcal{C}$, so folgt

$$\bar{F}(f) = \frac{F(\{1\}f)}{F(\{1\})} = \frac{F(\{1\})F(f)}{F(\{1\})} = F(f).$$

Ist G eine multiplikative Transformation in $\mathcal{M}$ derart, daß $G(f) = F(f)$ ist für jedes $f \in \mathcal{C}$, so ist $G = \bar{F}$. Aus $G(1) = G(1 \cdot 1) = G(1)G(1)$ folgt $G(1) = 1$, da $G(1) \neq 0$ ist. (Aus $G(1) = 0$ folgt nämlich $F(f) = G(f) = G(f \cdot 1) = G(f)G(1) = 0$ für jedes $f \in \mathcal{C}$ im Gegensatz zur Voraussetzung.) Ist nun $v \in \mathcal{C}$ $v \neq 0$, so erhalten wir

$$1 = G(1) = G\left(v \frac{1}{v}\right) = G(v)G\left(\frac{1}{v}\right) = F(v)G\left(\frac{1}{v}\right),$$

und daher $G\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{F(v)}$. Dann ergibt sich für ein beliebiges $x = \frac{u}{v} \in \mathcal{M}$

$$G(x) = G\left(u \frac{1}{v}\right) = G(u)G\left(\frac{1}{v}\right) = F(u)\frac{1}{F(v)} = \bar{F}(x).$$

Satz 8. 2. *Für jede stetige lineare und multiplikative Operatortransformation $F \neq 0$ ist der Operator $F(s)$ ein Logarithmus, und es gilt*

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) e^{-\lambda F(s)} d\lambda \qquad u \in \mathcal{C}\mathcal{U} \tag{8. 3}$$

BEWEIS. Die Funktion

$$f(\lambda) = F(e^{-\lambda s}) \tag{8. 4}$$

ist nach Satz 5. 4 in jedem endlichen Intervall stetig differenzierbar. Dann folgt aus der Multiplikativität von F

$$f'(\lambda) = F(-s\, e^{-\lambda s}) = -F(s)F(e^{-\lambda s}) = -F(s)f(\lambda). \tag{8. 5}$$

Die Operatorfunktion $f(\lambda)$ ist also die Lösung des Anfangswertproblems:

$$f'(\lambda)+F(s)f(\lambda)=0$$
$$f(0)=F(1)=1.$$

Folglich ist $F(s)$ ein Logarithmus, und $F(e^{-\lambda s})=f(\lambda)=e^{-\lambda F(s)}$. Daraus folgt (8. 3) nach Satz 5. 5.

Satz 8. 3. *Ist die stetige lineare und multiplikative Operatortransformation $F\neq 0$ mit D vertauschbar, so ist $F=T^{\alpha}$ für irgendeine Zahl α.*

Beweis. Aus $FD=DF$ und $F(1)=1$ folgt

$$D[F(s)]=(DF)(s)=(FD)(s)=F[D(s)]=F(1)=1.$$

Durch eine algebraische Integration (s. [14]) ergibt sich daher

$$F(s)=s-\alpha \tag{8. 6}$$

wo α eine Zahl ist. Dann folgt nach Satz 8. 2 und Satz 5. 1

$$F(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(\lambda)e^{\lambda\alpha}e^{-\lambda s}d\lambda=\{u(t)e^{\alpha t}\}=T^{\alpha}(u),$$

für $u\in\mathcal{C}\mathcal{U}$. Folglich ist $F=T^{\alpha}$ (nach Satz 8. 1).

Satz 8. 4. *Gilt*

$$FD=kDF \tag{8. 7}$$

für eine stetige lineare und multiplikative Operatortransformation $F\neq 0$, wobei k eine positive reelle Zahl ist, so ist

$$F=U_kT^{-z} \tag{8. 8}$$

wobei z irgendeine komplexe Zahl ist.

Beweis. Aus (8. 7) folgt

$$D[e^{-\lambda F(s)}]=-\lambda D[F(s)]e^{-\lambda F(s)}=-\lambda(DF)(s)e^{-\lambda F(s)}=-\frac{\lambda}{k}(FD)(s)e^{-\lambda F(s)}=$$
$$=-\frac{\lambda}{k}F[D(s)]e^{-\lambda F(s)}=-\frac{\lambda}{k}F(1)e^{-\lambda F(s)}=-\frac{\lambda}{k}e^{-\lambda F(s)}.$$

(Bezüglich der Regel $D(e^{w})=D(w)e^{w}$ siehe [13] und [14].) Hieraus folgt

$$D[F(s)]=\frac{1}{k}. \tag{8. 9}$$

Nach algebraischer Integration erhalten wir

$$F(s)=\frac{1}{k}s+z \tag{8. 10}$$

wobei z eine komplexe Zahl ist. Setzt man (8. 10) in (8. 3), so ergibt sich

$$(8.11)\qquad F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)e^{-\lambda\left(z+\frac{1}{k}s\right)}\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)e^{-\lambda z}e^{-\frac{\lambda}{k}s}\,d\lambda$$

für $u\in\mathscr{C}\mathscr{U}$. Ist speziell $u=\{f(t)\}\in\mathscr{C}$, so geht (8. 11) in

$$(8.12)\qquad F(f)=\int_{0}^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda z}e^{-\frac{\lambda}{k}s}\,d\lambda$$

über. Durch die Substitution $\mu=\dfrac{\lambda}{k}$ erhalten wir hieraus

$$(8.13)\qquad F(f)=\int_{0}^{\infty} f(\mu k)e^{-\mu kz}e^{-\mu s}k\,d\mu=\{ke^{-ktz}f(kt)\}=U_kT^{-z}(f).$$

Dann folgt nach Satz 8. 1 $F(x)=U_kT^{-z}(x)$ für jedes $x\in\mathscr{M}$.

§ 9. Eine Eingenschaft der Transformationen U_nT^{-p}

Aus den Formeln (8. 12) und (8. 13) ergibt sich

$$(9.1)\qquad \int_{0}^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda z}e^{-\frac{\lambda}{k}s}\,d\lambda=U_kT^{-z}(f).$$

Strebt $k\to\infty$ in (9. 1), so geht die linke Seite formal in das Laplace-Integral

$$\int_{0}^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda z}\,d\lambda$$

über. Wir werden beweisen, daß dieser Grenzübergang nicht nur formal ist.

Satz 9. 1. *Konvergiert ein Laplace-Integral für eine komplexe Zahl p:*

$$(9.2)\qquad \int_{0}^{\infty} f(\lambda)e^{-p\lambda}\,d\lambda=\bar{f}(p),$$

so konvergiert die Folge der Funktionen

$$(9.3)\qquad U_nT^{-p}(f)=\{ne^{-pnt}f(nt)\}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

im Sinne der Operatorenrechnung, und es gilt

$$(9.4)\qquad \lim_{n\to\infty} U_nT^{-p}(f)=\int_{0}^{\infty} f(\lambda)e^{-p\lambda}\,d\lambda.$$

Beweis. Die Funktionen

$$(9.5)\qquad \{f_n(t)\}=\frac{1}{s^2}U_nT^{-p}(f)=\frac{1}{s^2}\{ne^{-pnt}f(nt)\}=\left\{\int_0^t\int_0^{n\tau} e^{-p\sigma}f(\sigma)\,d\sigma\,d\tau\right\}$$

sind in $[0, \infty)$ stetig. Wir werden beweisen, daß die Folge dieser Funktionen gegen die Funktion $t\int\limits_0^\infty f(\lambda)e^{-p\lambda}d\lambda$ fastgleichmäßig konvergiert, d. h. sie konvergiert in einem beliebigen Intervall $[0, t_0]$ gleichmäßig. Da das Laplace-Integral (9. 2) konvergiert, besitzt die Funktion

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_\lambda^\infty f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma \tag{9.6}$$

die folgenden Eigenschaften:

I. $\Phi(\lambda)$ ist stetig im Intervall $[0, \infty)$.

II. $\Phi(\lambda)$ ist beschränkt im Intervall $[0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda) = 0$.

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gibt wegen der Eigenschaft III. eine Zahl $N_1 > 0$ so, daß

$$|\Phi(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2t_0} \tag{9.7}$$

ist für $\lambda > N_1$. Man kann infolge von II. eine Zahl $K > 0$ so wählen, daß die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$|\Phi(\lambda)| < K \quad \text{für} \quad \lambda \in [0, \infty) \tag{9.8}$$

$$\frac{\varepsilon}{2K} < t_0. \tag{9.9}$$

Setzen wir $N = \dfrac{2N_1K}{\varepsilon}$ und nehmen wir an, daß

$$n > N = \frac{2N_1K}{\varepsilon} \tag{9.10}$$

ist für eine natürliche Zahl n. Dann werden wir zeigen, daß für $t \in [0, t_0]$

$$\left| t\int\limits_0^\infty f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma - \int\limits_0^t \int\limits_0^{n\tau} f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma\,d\tau \right| < \varepsilon \tag{9.11}$$

gilt. Wegen

$$t\int\limits_0^\infty f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma - \int\limits_0^t \int\limits_0^{n\tau} f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma\,d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^{n\tau} f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma\,d\tau = \int\limits_0^t \Big[\int\limits_{n\tau}^\infty f(\sigma)e^{-p\sigma}\,d\sigma\Big]\,d\tau = \int\limits_0^t \Phi(n\tau)\,d\tau$$

hat man nur

$$\left| \int\limits_0^t \Phi(n\tau)\,d\tau \right| < \varepsilon. \tag{9.12}$$

für $n > N$ und $t \in [0, t_0]$ zu beweisen.

Ist $0 \leqq t \leqq \frac{\varepsilon}{2K}$, so folgt wegen (9. 8)

$$\left| \int_0^t \Phi(n\tau)\, d\tau \right| \leqq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2K}} |\Phi(n\tau)|\, d\tau < \int_0^{\frac{\varepsilon}{2K}} K\, d\tau = K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{9. 13}$$

für beliebiges n. Ist nun $t_0 \geqq t > \frac{\varepsilon}{2K}$ und $t \geqq \tau \geqq \frac{\varepsilon}{2K}$, so folgt aus (9. 10)

$$n\tau \geqq n \frac{\varepsilon}{2K} > \frac{2N_1 K}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2K} = N_1,$$

somit wegen (9. 7)

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2K}}^{t} |\Phi(n\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2t_0}\left(t - \frac{\varepsilon}{2K}\right) < \frac{\varepsilon}{2t_0} t_0 = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9. 14}$$

Somit ergibt sich aus (9. 13) und (9. 14)

$$\left| \int_0^t \Phi(n\tau)\, d\tau \right| \leqq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2K}} |\Phi(n\tau)|\, d\tau + \int_{\frac{\varepsilon}{2K}}^{t} |\Phi(n\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n > N$ und $t_0 \geqq t > \frac{\varepsilon}{2K}$. (9. 12) gilt also stets in $[0, t_0]$ für $n > N$.

Wir haben also bewiesen, daß

$$\frac{1}{s^2} U_n T^{-p}(f) \rightrightarrows \left\{ t \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda p}\, d\lambda \right\} = \frac{1}{s^2} \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda p}\, dy$$

fastgleichmäßig in $[0, \infty)$ konvergiert. Damit ist die Konvergenz (9. 4) und somit der Satz bewiesen.

Wir können uns davon leicht überzeugen, daß der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} U_n T^{-p}(x)$$

auch in solchen Fällen existieren kann, in denen das Laplace-Integral nicht konvergiert, oder über ein Laplace-Integral zu sprechen ganz und gar sinnlos ist, da x auch ein Operator sein kann, der keine Funktion ist.

§ 10. Die Laplace-Transformierte von Operatoren

Die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ existiert im klassischen Sinne genau dann, wenn das Laplace-Integral in allen Punkten einer komplexen Halbebene konvergiert, und dort eine komplexwertige Funktion

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(\lambda) e^{-p\lambda}\, d\lambda = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$

definiert. Hier werden wir die Laplace-Transformierte eines Operators mittels des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} U_n T^{-p}(x)$$

erklären. Wir wollen zuerst beweisen, daß wir in dieser Weise wieder eine komplexwertige Funktion erhalten.

Satz 10. 1. *Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(y) = a \tag{10.1}$$

für irgendeinen Operator y, so ist a stets eine komplexe Zahl.

BEWEIS. Es gilt

$$U_{k^n} = U_k^n \tag{10.2}$$

für eine beliebige positive reelle Zahl k und alle natürliche Zahlen n. Diese Behauptung folgt aus (6. 16) (§ 6.) durch vollständige Induktion. (10. 2) gilt offenbar für $n=1$. Setzt man die Richtigkeit von (10. 2) für irgendeine natürliche Zahl n voraus, so folgt

$$U_{k^{n+1}} = U_{kk^n} = U_k U_{k^n} = U_k U_k^n = U_k^{n+1}.$$

Da jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert strebt, so folgt aus (10. 1) und (10. 2)

$$\lim_{n\to\infty} U_k^n(y) = \lim_{n\to\infty} U_{k^n} = a \tag{10.3}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} U_k[U_k^n(y)] = \lim_{n\to\infty} U_k^{n+1}(y) = a \tag{10.4}$$

für eine beliebige natürliche Zahl k.

Da die Transformation U_k stetig ist, so ergibt sich aus (10. 4) und (10. 3) nach Satz 3. 1

$$a = \lim_{n\to\infty} U_k[U_k^n(y)] = U_k\left[\lim_{n\to\infty} U_k^n(y)\right] = U_k(a) \tag{10.5}$$

für eine beliebige natürliche Zahl k. Daher folgt die Vertauschbarkeit von U_k und a:

$$(U_k a)(x) = U_k(ax) = U_k(a)U_k(x) = aU_k(x) = (aU_k)(x).$$

Hieraus folgt nach Satz 6. 5, daß a eine Zahl ist.

Definition 10. 1. Es sei $\mathscr{D}_x$ die Menge derjenigen komplexen Zahlen p, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} U_n T^{-p}(x) = \bar{x}(p) \tag{10.6}$$

bezüglich eines Operators x existiert. Ist die Menge $\mathscr{D}_x$ nichtleer, so heißt der Operator x Laplace-transformierbar. Die Funktion $\bar{x}(p)$ die nach Satz 10. 1 eine Zahlfunktion ist, heißt die Laplace-Transformierte des Operators x, für die wir die Bezeichnung

$$\bar{x}(p) = \mathfrak{L}_p(x) \tag{10.7}$$

einführen werden.

Bemerkung. Die Laplace-Transformation ist keine Operatortransformation, da $\mathfrak{L}_p(x)$ den Operatoren x die Funktionen $\bar{x}(p)$ zuordnet, die keine Operatoren sind.

Das folgende *Beispiel* zeigt, daß die durch die Definition 10. 1 erklärte Laplace-Transformation allgemeiner als die klassische ist.

Über die Funktion

$$f(t) = -\pi e^t \sin(\pi e^t) \tag{10. 8}$$

ist bekannt (s. [4].), daß ihre Konvergenzabszisse $\beta = 0$ ist, folglich divergiert das Laplace-Integral in allen Punkten p mit $\operatorname{Re} p < 0$. Wir werden zeigen, daß $\mathfrak{L}_p\{f(t)\}$ im Sinne der Definition 10. 1 für jede komplexe Zahl existiert.

Aus (10. 8) ergibt sich

$$T^{-2}(f) = \{-\pi e^{-t} \sin(\pi e^t)\}$$

und

$$sT^{-2}(f) = \{\pi e^{-t} \sin(\pi e^t) - \pi^2 \cos(\pi e^t)\}, \tag{10. 9}$$

weiterhin

$$s^2 T^{-2}(f) = \{-\pi e^{-t} \sin(\pi e^t) + \pi^2 \cos(\pi e^t) + \pi^3 e^t \sin(\pi e^t)\} + \pi^2. \tag{10. 10}$$

Aus (10. 9) und (10. 10) erhalten wir

$$s^2 T^{-2}(f) + sT^{-2}(f) = \pi^2[-\{f(t)\} + 1]$$

und daher

$$f = 1 - \frac{1}{\pi^2} s(s+1) T^{-2}(f).$$

Also ist

$$\begin{aligned} U_n T^{-p}(f) &= U_n T^{-p}(1) - \frac{1}{\pi^2} U_n T^{-p}(s) U_n T^{-p}(s+1) U_n T^{-p-2}(f) = \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{s}{n}+p\right)\left(\frac{s}{n}+p+1\right) U_n T^{-(p+2)}(f). \end{aligned} \tag{10. 11}$$

Wir beweisen die folgende Behauptung: Existiert $\bar{f}(p) = \mathcal{L}_p(f)$ für $\operatorname{Re} p > -2N$, so existiert $\mathcal{L}_p(f)$ auch für $\operatorname{Re} p > -2(N+1)$. ($N$ ist eine nichtnegative ganze Zahl.) Zum Beweis setzen wir $\operatorname{Re} p > -2(N+1)$, dann ist $\operatorname{Re}(p+2) > -2N$. Da

$$\lim_{n\to\infty} U_n T^{-(p+2)}(f) = \bar{f}(p+2)$$

in diesem Fall nach Voraussetzung existiert, so folgt aus (10. 11)

$$U_n T^{-p}(f) = 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{s}{n}+p\right)\left(\frac{s}{n}+p+1\right) U_n T^{-(p+2)}(f) \to 1 - \frac{1}{\pi^2} p(p+1)\bar{f}(p+2).$$

$\bar{f}(p) = \mathfrak{L}_p(f)$ existiert also, und es gilt

$$\bar{f}(p) = 1 - \frac{1}{\pi^2} p(p+1)\bar{f}(p+2). \tag{10. 12}$$

Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Da $\mathfrak{L}_p(f)$ nach Satz 9. 1 für $\operatorname{Re} p > 0$ existiert, folgt die Existenz von $\mathfrak{L}_p(f)$ für jede komplexe Zahl p.

Man sieht aus (10. 12), dasz $\mathscr{L}_p(f)$ die analytische Fortsetzung der klassischen Laplace-Transformierten $\mathscr{L}\{f(t)\}$ ist.

G. DOETSCH hat in seinem Buch ([4]) die verallgemeinerte Laplace-Transformierte k-ter Ordnung in folgender Weise definiert:

$$\mathfrak{L}^{(k)}\{f(t)\} = \lim_{t\to\infty} \frac{[e^{-pt} f(t)] * t^k}{t^k} \tag{10. 13}$$

wobei k eine nichtnegative reelle Zahl ist, und $*$ das Malzeichen des Faltungsproduktes ist. G. DOETSCH zeigt in seinem zitierten Buch in Verbindung mit der Funktion (10. 8), daß die Konvergenzabszisse β_k von $\mathfrak{L}^{(k)}\{-\pi e^t \sin(\pi e^t)\}$ $\beta_k = -k$ ist. Da, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{L}_p\{-\pi e^t \sin(\pi e^t)\}$ für jedes p existiert, kann man vermuten, daß $\mathfrak{L}_p(f)$ überhaupt allgemeiner als $\mathfrak{L}^{(k)}(f)$ ist. Tatsächlich gilt der

Satz 10. 2. (Konsistenzsatz) *Existiert die verallgemeinerte Laplace-Transformierte k-ter Ordnung* (10. 13) *für irgendeine komplexe Zahl p, so existiert*

$$\mathfrak{L}_p(f) = \lim_{n\to\infty} U_n T^{-p}(f), \tag{10. 14}$$

und es gilt

$$\mathfrak{L}_p(f) = \mathfrak{L}^{(k)}(f). \tag{10 15}$$

BEWEIS. Für $k=0$ ist der Satz mit Satz 9. 1 identisch. Wir brauchen ihn also nur für $k>0$ zu beweisen. Es genügt zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} U_n T^{-p}(f) = \{\mathfrak{L}^{(k)}(f)\, t^k\} = \mathfrak{L}^{(k)}(f) \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} \tag{10. 16}$$

ist, und dabei die Konvergenz in jedem endlichen Intervall $[0, t_0]$ gleichmäßig ist. Gegeben seien $t_0 > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt wegen (10. 13) ein $N_1 > 0$ so, daß

$$\left| \frac{[e^{-pt} f(t)] * t^k}{t^k} - \mathfrak{L}^{(k)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{t_0^k} \tag{10. 17}$$

ist für $t > N_1$. Da die Funktion $\dfrac{[e^{-pt} f(t)] * t^k}{t^k}$ wegen (10. 13) beschränkt ist, können wir eine Zahl $K>0$ wählen derart, daß die Ungleichungen

$$\left| \frac{[e^{-pt} f(t)] * t^k}{t^k} \right| < K \qquad (t \in [0, \infty]) \tag{10. 18}$$

und

$$|\mathscr{L}^{(k)}(f)| < K \tag{10. 19}$$

erfüllt sind. Setzen wir

$$N = \frac{N_1}{\left(\dfrac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/k}}.$$

Da

$$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} U_n T^{-p}(f) = \frac{\Gamma(k+1)}{\left(\frac{s}{n}\right)^{k+1}} \frac{1}{n^{k+1}} U_n T^{-p}(f) =$$

$$= U_n \left[\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}\right] U_n \left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) U_n[T^{-p}(f)] = U_n \left(\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} \frac{1}{n^{k+1}} T^{-p}(f)\right) =$$

$$= U_n \left\{\frac{[e^{-pt} f(t)] * t^k}{n^{k+1}}\right\} = \left\{\frac{\int\limits_0^{nt} e^{-p\tau} f(\tau)(nt-\tau)^k \, d\tau}{(nt)^k} t^k\right\}$$

ist, so ist nur zu beweisen, daß

$$\left| \frac{\int\limits_0^{nt} e^{-p\tau} f(\tau)(nt-\tau)^k \, d\tau}{(nt)^k} t^k - \mathfrak{L}^{(k)}(f) t^k \right| < \varepsilon \tag{10. 20}$$

gilt für

$$n > \frac{N_1}{\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/k}} = N \tag{10. 21}$$

und $t \in [0, t_0]$. Ist $0 \leqq t \leqq \left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/k}$, so folgt wegen (10. 18) und (10. 19)

$$\left| \frac{\int\limits_0^{nt} e^{-p\tau} f(\tau)(nt-\tau)^k \, d\tau}{(nt)^k} - \mathfrak{L}^{(k)}(f) \right| t^k \leqq \left| \frac{\int\limits_0^{nt} e^{-p\tau} f(\tau)(nt-\tau)^k \, d\tau}{(nt)^k} \right| t^k +$$

$$+ |\mathfrak{L}^{(k)}(f)| t^k < 2Kt^k \leqq 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

für jedes n. Ist $t_0 \geqq t > \left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/k}$, so ist wegen (10. 21)

$$nt > \frac{N_1}{\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/k}} \left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/k} = N_1.$$

Dann ergibt sich aus (10. 17)

$$\left| \frac{\int\limits_0^{nt} e^{-p\tau} f(\tau)(nt-\tau)^k \, d\tau}{(nt)^k} t^k - \mathfrak{L}^{(k)}(f) t^k \right| < \frac{\varepsilon}{t_0^k} t^k \leqq \varepsilon$$

für $n > N$. (10. 20) gilt also stets in $[0, t_0]$ für $n > N$.

Damit ist der Satz bewiesen.

J. Mikusiński hat für die Konvergenz von Operatorfolgen zwei Definitionen gegeben. Die erste findet sich in seinem Buch ([1]), und wir haben bisher diese Definition benutzt. Die zweite lautet (siehe [15].):

Definition (A). Eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von Operatoren heißt konvergent, wenn es eine Folge $q_1, q_2, \ldots$ von stetigen Funktionen aus der Klasse $\mathscr{C}$ gibt derart, daß folgendes gilt:

1. q_n konvergiert fastgleichmäßig in $[0, \infty)$ gegen eine stetige Funktion $q \neq 0$.
2. $q_n a_n \in \mathscr{C}$ gilt für jedes $n = 1, 2, \ldots$.
3. Die Folge $q_1 a_1, q_2 a_2, \ldots$ von Funktionen konvergiert in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig gegen eine stetige Funktion $u \in \mathscr{C}$. Der Operator $a = \frac{u}{q}$ heißt dann das Grenzelement der Folge $a_1, a_2, \ldots$ und wir werden hier zwecks Unterscheidung

$$\mathrm{II} - \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

oder

$$a_n \xrightarrow{\mathrm{II}} a \qquad \text{für} \quad n \to \infty$$

schreiben.

Man sieht leicht, daß diese Definition mit der folgenden äquivalent ist:

Definition (B). $a_n \xrightarrow{\mathrm{II}} a$ falls es eine Folge $\frac{u_n}{q_n} = a_n$ von Räpresentanten gibt derart, daß folgendes gilt:

1. $u_n \rightrightarrows u \in \mathscr{C}$ fastgleichmäßig in $[0, \infty)$
2. $q_n \rightrightarrows q \neq 0$ ($q \in \mathscr{C}$ fastgleichmäßig in $[0, \infty)$
3. $a = u/q$.

Die übliche Konvergenz einer Folge $a_1, a_2, \ldots$ gegen a geht aus der Konvergenz $\mathrm{II} - \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ hervor, falls man speziell $q_n = q$ wählen kann.

Es ist bekannt, daß die Konvergenz II. allgemeiner als die Konvergenz erster Art ist. (s. [15].) Setzt man deshalb in der Definition 10. 1.

$$\mathrm{II} - \lim_{n \to \infty} U_n T^{-p}(x) = \bar{x}(p)$$

statt (10. 6), so erhalten wir eine allgemeinere Definition der Laplace-Transformation von Operatoren. Wir schreiben in diesem Fall

$$\bar{x}(p) = \mathrm{II} - \lim_{n \to \infty} U_n T^{-p}(x) = \mathfrak{L}_p^{(\mathrm{II})}(x)$$

Ein Konsistenzsatz für die Transformation $\mathfrak{L}_p^{(\mathrm{II})}$ gilt offenbar, da die Existenz von $\mathrm{II} - \lim a_n$ aus der Existenz von $\lim a_n$ stets folgt. Wir werden jetzt durch ein Beispiel zeigen daß die Transformation $\mathfrak{L}_p^{(\mathrm{II})}$ allgemeiner als $\mathfrak{L}_p$ ist.

Das Laplace-Integral von e^t konvergiert in allen Punkten der Halbebene $\operatorname{Re} p > 1$, während es für $\operatorname{Re} p \leqq 1$ divergert.

Wir zeigen zuerst daß

$$\mathfrak{L}_p\{e^t\} = \frac{1}{p-1}$$

ist für $\operatorname{Re} p \geqq 1, p \neq 1$. Für $\operatorname{Re} p > 0$ folgt die Existenz von $\mathfrak{L}_p\{e^t\}$ aus dem Satz 9. 1. Es genügt also die Behauptung nur für $\operatorname{Re} p = 1$ $p \neq 1$ zu beweisen. Setzen wir $p = 1 - \varrho i$, $\varrho \neq 0$. Dann konvergiert die Folge

$$U_n T^{-p}\{e^t\} = U_n\{e^{-t+i\varrho t} e^t\} = U_n\{e^{i\varrho t}\} = U_n\{\cos \varrho t + i \sin \varrho t\} =$$
$$= \{n \cos \varrho n t\} + i\{n \sin \varrho n t\}$$

gegen
$$\frac{i}{\varrho} = \frac{1}{1 - \varrho i - 1} = \frac{1}{p-1}, \quad \text{da}$$

$$\frac{1}{s^2}\{n \cos \varrho n t\} = \left\{\frac{-\cos \varrho n t + 1}{\varrho^2 n}\right\} \rightrightarrows 0$$

und

$$\frac{1}{s^2}\{n \sin \varrho n t\} = \left\{-\frac{\sin \varrho n t}{\varrho^2 n} + \frac{t}{\varrho}\right\} \rightrightarrows \left\{\frac{t}{\varrho}\right\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{\varrho}$$

fastgleichmäßig konvergieren.

Für $p = 0$ existiert $\mathfrak{L}_p\{e^t\}$ sicher nicht, da die Folge

$$U_n T^0\{e^t\} = U_n\{e^t\} = \{n e^{nt}\}$$

bezüglich der Konvergenz erster Art divergiert (s. [1]).

Dagegen existiert $\mathfrak{L}_p^{\mathrm{II}}\{e^t\}$ für jedes $p \neq 1$:

$$U_n T^{-p}\{e^t\} = U_n T^{-p}\left(\frac{1}{s-1}\right) = U_n\left(\frac{1}{s+p-1}\right) = \frac{1}{\dfrac{s}{n} + p - 1} =$$

$$= \frac{\{t\}}{\left\{\dfrac{1}{n} + (p-1)t\right\}} \xrightarrow{\mathrm{II}} \frac{\{t\}}{\{(p-1)t\}} = \frac{1}{p-1}.$$

V. A. Ditkin hat die Laplace-Transformierte von Operatoren in der folgenden Weise definiert: ([5] [6]).

Wir betrachten die Menge S von Funktionen $f(t)$ für die das Laplace-Integral

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt$$

absolut konvergiert. S^* sei die Menge der Laplace-Transformierten dieser Funktionen

Besitzt der Operator a eine Räpresentante $\dfrac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}} = a$ mit $f(t), g(t) \in S$, so heißt der Operator a Laplace-Transformierbar. Die Funktion

$$a^*(p) = \frac{f^*(p)}{g^*(p)}$$

wird die Laplace-Transformierte von a genannt. Wir bezeichnen sie hier mit $\mathscr{L}_p^*(a)$.

Wir beweisen den folgenden Konsistenzsatz:

Satz 10. 3. *Existiert die Laplace-Transformierte des Operators a im Ditkinschen Sinne für eine Zahl p, so existiert* $\mathfrak{L}_p^{(II)}(a)$ *und es gilt*

$$\mathfrak{L}_p^{(II)}(a) = \mathfrak{L}_p^*(a).$$

Beweis. Der Operator a besitzt eine Räpresentante $\dfrac{\{f(t)\}}{\{g(t)\}}$ so, daß

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

und

$$g^*(p) = \int_0^\infty g(t)e^{-pt}\,dt \neq 0$$

existieren. So folgt nach Satz 9. 1, daß die Folgen

$$\frac{1}{s^2}\, U_n T^{-p}(f) \rightrightarrows \frac{1}{s^2} f^*(p),$$

$$\frac{1}{s^2}\, U_n T^{-p}(g) \rightrightarrows \frac{1}{s^2}\, g^*(p)$$

in $[0, \infty)$ fast gleichmäßig konvergieren. Da $g^*(p) \neq 0$ ist, so folgt

$$U_n T^{-p}(a) = U_n T^{-p}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{U_n T^{-p}(f)}{U_n T^{-p}(g)} = \frac{\frac{1}{s^2}\, U_n T^{-p}(f)}{\frac{1}{s^2}\, U_n T^{-p}(g)} \xrightarrow{\text{II}} \frac{\frac{1}{s^2} f^*(p)}{\frac{1}{s^2}\, g^*(p)} = \mathfrak{L}_p^*(a)$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Der Definitionsbereich von $\mathfrak{L}_p^*(a)$ ist stets eine Halbebene da die Konvergenzbereiche von $f^*(p)$ und $g^*(p)$ Halbebenen sind. So gilt zum Beispiel

$$\mathfrak{L}^*(s) = \mathfrak{L}^*\left(\frac{\{1\}}{\{t\}}\right) = \frac{\int_0^\infty e^{-pt}\,dt}{\int_0^\infty e^{-pt} t\,dt} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}} = p$$

nur für $\operatorname{Re} p > 0$. Dagegen gilt

$$\mathfrak{L}_p^{(II)}(s) = \text{II} - \lim_{n\to\infty} U_n T^{-p}(s) = \text{II} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n} + p\right) = p$$

für alle komplexe Zahlen p.

Literatur

[1] J. Mikusiński, Operational Calculus, *New York* 1959.
[2] C. Ryll-Nardzewski, Sur le corps des opérateurs de Mikusiński, *Studia Math.* **14** (1954), 247—248.
[3] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin* 1956.
[4] G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation I., *Basel*, 1950.
[5] V. A. Ditkin—A. P. Prudnikov, Integral Transforms and Operational Calculus, *Oxford*, 1965.
[6] В. А. Диткин, к теории операционного исчисления, дан, 123, № 3 (1958), 395—396.
[7] A. Erdélyi, Operational Calculus and Generalized Functions, *New York*, 1962.
[8] J. Mikusiński, Une simple démonstration du théoreme de Titchmarsh sur la convolution, *Bull. Acad. Polonaise, Série sci. math. astr. phys.*, **7** (1959), 715—717.
[9] L. Berg, Einführung in die Operatorenrechnung, *Berlin*, 1962.
[10] C. Foiaş, Approximation des opérateurs de J. Mikusiński par des fonctions continues, *Studia Math.* **21** (1961), 73—74.
[11] Fenyő I., A Mikusiński-féle operátorfogalom és disztribúció fogalma közti kapcsolatról, *A Magyar Tud. Akad. Mat. és Fiz. Tud. Osztályának Közleményei* **8** (1958), 385—392.
[12] E. Gesztelyi, Über das Stieltjes-Integral von Operatorfunktionen II., *Publ. Math. (Debrecen)* **13** (1966), 313—324.
[13] J. Mikusiński, Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus, *Studia Math.* **19** (1960), 187—192.
[14] E. Gesztelyi, Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten, *Publ. Math. (Debrecen)* **10** (1963), 215—243.
[15] K. Urbanik, Sur la structure non topologique du corps des opérateurs, *Studia Math.* **14** (1954), 243—246.

(Eingegangen am 22. Juni 1966.)