Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen

Von Z. DARÓCZY und L. LOSONCZI (Debrecen)

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Erweiterung additiver Funktionen, die auf gewissen Punktmengen der Ebene erklärt sind. Dem zu untersuchenden Problemkreis liegt die folgende Definition zugrunde (vgl. [7], [6]):

Definition. Es sei D eine Punktmenge in der (x, y)-Ebene, und

$$D_x = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in D\},$$
$$D_y = \{y \mid \exists x\ (x, y) \in D\},$$
$$D_{x+y} = \{x+y \mid (x, y) \in D\}.$$

Wir sagen, daß die Funktion $f(x)$ auf der Menge D additiv ist, wenn die Funktion $f\colon D_f = D_x \cup D_y \cup D_{x+y} \to E$ der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

für jedes $(x, y) \in D$ genügt, wobei E eine additiv geschriebene abelsche Gruppe ist.

Auf Grund der obigen Definition kann das folgende Problem formuliert werden:

Was für Bedingungen müssen für die Menge D gelten damit es eine auf der ganzen Zahlengeraden definierte Funktion $F(x)$ existiert, für die die Eigenschaften:

$$F(x) = f(x) \quad \textit{falls} \quad x \in D_f,$$

und für beliebiges (x, y)

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

erfüllt sind.

Existiert eine solche Funktion $F(x)$, so nennt man sie *die Erweiterung von f*.

Wenn f keine Erweiterung hat, dann können wir das folgende Problem stellen:

Gibt es eine solche auf der ganzen Zahlengeraden definierte Funktion $G(x)$, für die die Funktionalgleichung $G(x+y) = G(x) + G(y)$ für alle (x, y) erfüllt ist, wobei $f(x)$ für $x \in D_f$ mit Hilfe von G (in irgendwelcher Form) dargestellt werden kann.

Das erste Problem wurde in [2] für den Fall $D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ in positivem Sinne beantwortet. Das zweite Problem wurde in [6] gelöst, wenn D eine offene zusammenhängende Menge und f eine stetige Funktion ist.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. In § 1. lösen wir das Problem in folgenden Fällen: 1) $D=H_r=\{(x, y)|x\geqq 0, y\geqq 0, x+y<r\}$ ein Dreieckbereich; 2) $D=K_r=\{(x, y)|x^2+y^2<r^2\}$ ($r>0$ konstant) eine offene Kreisplatte. In § 2. ist D eine beliebige offene zusammenhängende Menge. Wir setzen über f keine Regularitätseigenschaften voraus. Die Arbeit schließt mit einigen ergänzenden Bemerkungen.

§ 1.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit dem Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. *Ist f additiv auf dem Dreieckbereich $D=H_r$, so gibt es eine und nur eine Erweiterung F von f.*

Beweis. Es bezeichne V die Menge der reellen Zahlen. Dann kann ein beliebiges Element $x\in V$ eindeutigerweise in der Form

$$x = n\cdot\frac{r}{2}+x' \tag{2}$$

dargestellt werden, wobei $n\in\Gamma=\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ und $0<x'<\frac{r}{2}$ ist. Wir definieren jetzt eine Funktion $F\colon V\to E$ mit Hilfe der Gleichung

$$F(x) = nf\left(\frac{r}{2}\right)+f(x'). \tag{3}$$

Wir zeigen, daß diese Funktion F eine Erweiterung von f ist. Offenbar gilt $D_f=[0, r)$, und im Falle $x\in[0, r)$ lautet die Zerlegung (2)

$$x = 0\cdot\frac{r}{2}+x' \quad \text{falls} \quad 0\leqq x<\frac{r}{2} \quad \text{und}$$

$$x = 1\cdot\frac{r}{2}+x' \quad \text{falls} \quad \frac{r}{2}\leqq x<r.$$

Im ersten Falle erhalten wir

$$F(x) = 0\cdot f\left(\frac{r}{2}\right)+f(x) = f(x),$$

und im zweiten Falle gilt

$$F(x) = 1\cdot f\left(\frac{r}{2}\right)+f(x') = f\left(\frac{r}{2}+x'\right) = f(x),$$

d. h. in beiden Fällen haben wir bewiesen, daß

$$F(x)=f(x) \quad \text{falls} \quad x\in D_f=[0, r) \tag{4}$$

gilt. Wir werden jetzt zeigen, daß F eine additive Funktion ist, das heißt für alle $x, y\in V$ gilt die Gleichung

$$F(x+y)=F(x)+F(y). \tag{5}$$

Nach (2) sind $x=n\frac{r}{2}+x'$, $y=m\frac{r}{2}+y'$ $\left(x', y' \in \left[0, \frac{r}{2}\right); m, n \in \Gamma\right)$. Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

a) Ist $x'+y' \in \left[0, \frac{r}{2}\right)$, so gilt

$$F(x+y) = F\left(n\frac{r}{2}+x'+m\frac{r}{2}+y'\right) = F\left((n+m)\frac{r}{2}+(x'+y')\right) =$$

$$= (n+m)f\left(\frac{r}{2}\right)+f(x'+y') = nf\left(\frac{r}{2}\right)+mf\left(\frac{r}{2}\right)+f(x')+f(y') =$$

$$= nf\left(\frac{r}{2}\right)+f(x')+mf\left(\frac{r}{2}\right)+f(y') = F(x)+F(y).$$

b) Ist $x'+y' \in \left[\frac{r}{2}, r\right)$, dann ist $x'+y'=\frac{r}{2}+z'$ $\left(\text{wo } z' \in \left[0, \frac{r}{2}\right)\right)$ und so haben wir

$$F(x+y) = F\left(n\frac{r}{2}+x'+m\frac{r}{2}+y'\right) = F\left((n+m+1)\frac{r}{2}+z'\right) =$$

$$= (n+m+1)f\left(\frac{r}{2}\right)+f(z') = nf\left(\frac{r}{2}\right)+mf\left(\frac{r}{2}\right)+f\left(\frac{r}{2}\right)+f(z') =$$

$$= nf\left(\frac{r}{2}\right)+mf\left(\frac{r}{2}\right)+f(x'+y') =$$

$$= nf\left(\frac{r}{2}\right)+f(x')+mf\left(\frac{r}{2}\right)+f(y') = F(x)+F(y).$$

Der Beweis wird vollständig sein, wenn wir zeigen, daß es außer F keine Erweiterung von f gibt. Nehmen an, daß die Funktion F' die Eigenschaften (4) und (5) besitzt. Ein beliebiges Element $t \in V$ kann in der Form $t=nx$ geschrieben werden, wo $x \in \left[0, \frac{r}{2}\right)$ und $n \in \Gamma$ ist. Da $F'(x)=f(x)$ für $x \in \left[0, \frac{r}{2}\right)$ ist, gilt

$$F(t)=F(nx)=F(x)+F[(n-1)x]=\ldots=nF(x)=nF'(x)=F'(nx)=F'(t),$$

d. h. die Funktionen F und F' sind identisch. Damit ist der Satz 1. bewiesen.

Satz 2. *Ist f eine additive Funktion auf der offenen Kreisplatte K_r, so gibt es eine und nur eine Erweiterung F von f.*

BEWEIS. Wegen der Beziehung $H_r \subset K_r$ genügt die durch (3) definierte Funktion F der Gleichung (5) und $F(x)=f(x)$ falls $x \in [0, r)$ ist. Weil $D_f=(-\sqrt{2}r, \sqrt{2}r)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $F(x)=f(x)$ falls $x\in(-\sqrt{2}r, 0)\cup[r, \sqrt{2}r)$ ist. Erstens sei $x\in[r, \sqrt{2}r)$, dann ist $\frac{x}{2}\in\left[\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{2}r}{2}\right)\subset[0, r)$ und $\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)\in K_r$, so haben wir

$$F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right)+F\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f(x).$$

Zweitens sei $x\in(-\sqrt{2}r, 0)$, dann gilt

$$F(x) = -F(-x) = -f(-x) = f(x),$$

und damit haben wir den Beweis des Satzes 2 beendet.

§ 2.

Es sei f eine additive Funktion auf irgendwelcher Menge D. Die folgende Definition wird sehr vorteilhaft sein.

Definition. Existiert eine reelle Funktion $G: V\to E$, und ein Punkt $(u, v)\in D$, so daß die Eigenschaften

$$G(x+y) = G(x)+G(y) \tag{6}$$

alls $x, y\in V$ und

$$\begin{aligned} f(x)-f(u)-f(v) &= G(x)-G(u)-G(v) \quad \textit{falls} \quad x\in D_{x+y} \\ f(x)-f(u) &= G(x)-G(u) \quad \textit{falls} \quad x\in D_x \\ f(x)-f(v) &= G(x)-G(v) \quad \textit{falls} \quad x\in D_y \end{aligned} \tag{7}$$

gelten, so nennen wir die Funktion G eine Quasierweiterung von f.

Es ist leicht einzusehen, — wenn es eine Quasierweiterung von f gibt — daß man den in der Definition erklärten Punkt $(u, v)\in D$ durch einen beliebigen Punkt $(a, b)\in D$ ersetzen kann. Setzen wir nämlich in (7) nacheinander die Werte

$$x=a+b\in D_{x+y},\ x=a\in D_x, \quad \text{und} \quad x=b\in D_y$$

ein, so erhalten wir durch Subtraktion der entsprechenden Gleichungen aus (7) wieder die Gleichungen (7), nur daß in diesen jetzt statt des Punktes (u, v) der Punkt (a, b) auftritt. Aus dieser Bemerkung folgt, daß der Begriff der Quasierweiterung im Falle $(0, 0)\in D$ (wegen $f(0)=0$, $G(0)=0$) mit dem Begriff der Erweiterung übereinstimmt.

Satz 3. *Ist f additiv auf der offenen Kreisplatte $D=K_r(u, v)=\{(x, y)\mid (x-u)^2+(y-v)^2<r^2\}$ ($r>0$ Konstant), so gibt es eine und nur eine Quasierweiterung G von f.*

Beweis. Es seien $x=X+u$, $y=Y+v$, wo $(X, Y)\in K_r$ ist. Dann ist $(x, y)\in K_r(u, v)$ und

$$f(X+Y+u+v) = f(X+u)+f(Y+v) \quad (X, Y)\in K_r. \tag{8}$$

Mit den Substitutionen $Y=0$ bzw. $X=0$ folgen aus (8) die Gleichungen

$$(9) \qquad f(X+u) = f(X+u+v)-f(v) \quad \text{falls} \quad X\in(K_r)_x$$

bzw.

$$(10) \qquad f(Y+v) = f(Y+u+v)-f(u) \quad \text{falls} \quad Y\in(K_r)_y.$$

Führen wir die Funktion $g(X)=f(X+u+v)-f(u)-f(v)$ ein, dann erhalten wir auf Grund von (8), (9), und (10)

$$g(X+Y) = g(X)+g(Y)$$

für alle $(X, Y)\in K_r$, d. h. g ist additiv auf der Kreisplatte K_r. Nach dem Satz 2. existiert eine und nur eine Erweiterung G von g. Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Funktion G eine Quasierweiterung der Funktion f ist, was zu beweisen war.

Im folgenden bereiten wir die Verallgemeinerung des vorangehenden Satzes vor.

Hilfssatz. *Es sei f additiv auf der Menge $D=D^1\cup D^2$, wo D^1 und D^2 offene Mengen sind, die einen nichtleeren Durchschnitt haben: $D^1\cap D^2\neq\emptyset$. Nehmen wir an, daß es eine und nur eine Quasierweiterung G_i von f auf D^i $(i=1, 2)$ gibt. Dann ist $G_1(x)\equiv G_2(x)$ $(x\in V)$, und $G=G_1$ ist die einzige Quasierweiterung von f auf der Menge D.*

Beweis. Aus den Bedingungen des Hilfssatzes folgt, daß $D^1\cap D^2$ eine offene nichtleere Menge ist, und so enthält z. B. $D^1_x\cap D^2_x$ ein offenes Intervall I. Da G_1 bzw. G_2 Quasierweiterungen von f auf den Mengen D^1 bzw. D^2 sind, so gelten die Beziehungen

$$f(x)-f(a) = G_1(x)-G_1(a) = G_1(x-a) \quad \text{falls} \quad x\in D^1_x$$

und

$$f(x)-f(a) = G_2(x)-G_2(a) = G_2(x-a), \quad \text{falls} \quad x\in D^2_x,$$

wobei a eine Zahl bedeuten für die es eine Zahl b gibt, so daß der Punkt (a, b) in $D^1\cap D^2$ liegt. Daraus folgt

$$G_1(x-a) = G_2(x-a) \quad \text{falls} \quad x\in \mathrm{I}\subset D^1_x\cap D^2_x.$$

Wegen der Additivität von G_1 und G_2 ist $G_1(x)\equiv G_2(x)$ $(x\in V)$. Die weiteren Behauptungen des Hilfssatzes sind offensichtlich.

Satz 4. *Ist f additiv auf einer offenen zusammenhängenden Menge D, so gibt es eine und nur eine Quasierweiterung G von f.*

Beweis. Es sei D eine offene zusammenhängende Menge. Dann existiert eine Folge $K^1, K^2, \ldots, K^n, \ldots$ offener Kreisplatten, so daß $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$ und $(K^1\cup K^2\cup\ldots \ldots\cup K^n)\cap K^{n+1}\neq\emptyset$ $(n=1, 2, \ldots)$ gilt. Nach dem Satz 3 existiert auf jeder K^n genau eine Quasierweiterung G_n von f. Wegen des Hilfssatzes ist $G_1\equiv G_2\equiv\ldots\equiv G_n$ für jedes n, also ist die Funktion $G=G_1$ die einzige Quasierweiterung von f auf der Menge D.

Auf Grund unserer Ergebnisse können wir die allgemeinen Lösungen der auf einer offenen zusammenhängenden Menge D gültigen Funktionalgleichung (1) bestimmen. Ist nämlich G die einzige Quasierweiterung (bzw. Erweiterung) von f, so kann die allgemeinste Form von G mit Hilfe der Hamelschen Basis angegeben werden (S. [8]), und $f(x)=G(x)$ $x\in D_f$ ist die allgemeine Lösung von (1). Erfüllen sich für die Funktion f Regularitätsvoraussetzungen (z. B. Stetigkeit, Meßbarkeit usw.) so können wir f in expliziter Weise angeben, weil die stetigen (bzw. meßbaren) Lösungen der Cauchyschen Gleichung $\big(G(x)=cx\big)$ bekannt sind (S. [1]). Im letzten Falle haben wir natürlich vorausgesetzt, daß $E=V$ ist.

§ 3.

Wir wollen jetzt einige ergänzende Bemerkungen zu unseren Ergebnissen machen und einige offene Probleme stellen.

A. Topologische Probleme

Hierher gehören die vorangehenden Untersuchungen in ihrer Gesamtheit. Wir haben für die Menge D topologische Eigenschaften vorausgesetzt, welche zur Existenz einer einzigen Erweiterung (bzw. Quasierweiterung) einer auf der Menge D additiven Funktion f geführt haben. Wir wollen jetzt die folgende Bemerkungen machen.

1. Hat die Menge D (auf der die Funktion f additiv ist) einen inneren Punkt, so kann f höchstens eine Quasierweiterung (bzw. Erweiterung) haben. Dann gibt es nämlich eine Kreisplatte $K_r(u, v)$, so daß $K_r(u, v)\subset D$ ist. Nach Satz 3 existiert dann eine und nur eine Quasierweiterung G der auf der Menge $K_r(u, v)$ additiven Funktion f, und diese Funktion G ist eine Quasierweiterung von f auch auf D, oder nicht. Im ersten Falle ist G offenbar die einzige Quasierweiterung.

2. Man kann eine Menge D und eine auf D additive Funktion f angeben, so daß D einen inneren Punkt besitzt und f demnoch keine Erweiterung (bzw. Quasierweiterung) hat. Ein einfaches Beispiel dafür ist folgendes:

$$D=H_r\cup\{(2r, 2r)\}$$

und

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{falls} \quad x\in[0,r) \\ 0 & \text{falls} \quad x=2r \quad \text{oder} \quad x=4r. \end{cases}$$

Dabei ist die Funktion $F(x)=x$ die einzige Erweiterung von f auf H_r, aber F ist keine Erweiterung von f auf D.

3. Es gibt auch solche D auf denen mehrere Erweiterungen von f existieren. Die aus einem einzigen Punkt (a, b) bestehende Menge D ist ein Beispiel dafür.

4. *Problem.* Es sei D eine Menge mit einem inneren Punkt. Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die auf D additive Funktion f eine Quasierweiterung hat. (Die Unizität der Quasierweiterung ist schon nach 1. gesichert.)

B. Metrische Probleme

In den Arbeiten [3] und [10] (s. noch [5], [9]) ist D eine solche ebene Menge, welche eine Komplementärmenge (bezüglich der ganzen Ebene) vom Maß Null besitzt. Dabei sucht man eine Funktion $F(x)$, für die die Gleichung $F(x+y)=$ $=F(x)+F(y)$ für alle $x, y\in V$ und $F(x)=f(x)$ fast überall erfüllt ist. (Hier ist f eine additive Funktion auf D und sie ist natürlich fast überall definiert.) In dieser

Form ist das Problem gelöst. Wir wollen jetzt ein *weiteres Problem* in dieser Richtung stellen. Es sei D eine Menge in der Ebene und $D' \subset D$, so daß $D \setminus D'$ eine meßbare Menge vom Maß Null ist. Ist f additiv auf D', so kann man fragen, ob es eine überall additive Funktion F gibt, für die $F(x)=f(x)$ fast überall (oder überall) auf D_f gilt.

C. Algebraische Probleme

Es sei G eine additiv geschriebene abelsche Gruppe und D eine Teilmenge von $G \times G = \{(x, y)|x, y \in G\}$. Es sei weiter $f(x)$ $(x \in G, f(x) \in E$, wo E eine abelsche Gruppe ist) eine solche Abbildung, daß für $(x, y) \in D$

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

gilt. Dann ist — mit den Bezeichnungen der Einführung — $f\colon D_f = D_x \cup D_y \cup D_{x+y} \to E$ und es kann *das folgende Problem* formuliert werden: Für welche D gibt es einen Homomorphismus $F\colon G \to E$ derart, daß $F(x)=f(x)$ falls $x \in D_f$ erfüllt ist. In diesem Fall können bezüglich D im allgemeinen nur algebraische Bedingungen gemacht werden. In diesem Zusammenhang sind einige Ergebnisse der Arbeit [4] (die aus einem anderen Problem ausgeht) von Interesse. Ist G eine topologische bzw. meßbare Gruppe, so kommen wir zum Problemkreis A. bzw. B. zurück.

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart*, 1961.

[2] J. Aczél—P. Erdős, The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for nonnegative numbers, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 259—265.

[3] N. G. de Bruijn, On almost additive functions *Colloq. Math.* **15** (1966), 59—63.

[4] Z. Daróczy—K. Győry, Die Cauchysche Funktionalgleichung über diskreten Mengen *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 249—255.

[5] P. Erdős, Problem 310, *Colloq. Math.* **7** (1960), 311.

[6] S. Golab—L. Losonczi, Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus I. Die lokalen Lösungen, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965) 158—175.

[7] S. Golab, Einige grundlegende Fragen der Theorie der Funktionalgleichungen, *Glasnik mat— fiz i astr. Zagreb* **20** (1965), 57—63.

[8] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$ *Math. Ann.* **60** (1905), 459—462.

[9] S. Hartman, A remark about Cauchy's equation, *Colloq. Math.* **8** (1961), 77—89.

[10] W. B. Jurkat, On Cauchy's functional equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 683—686.

(Eingegangen am 11. August 1966.)