Ein kombiniertes Randwertproblem im Einheitskreis

Von MANFRED WALK (Jena)

Wir betrachten im R_2 den Einheitskreis $\Omega=\{(x_1, x_2);\ x_1^2+x_2^2<1\}$ und außerdem einen elliptischen Differentialoperator der Form

$$Lu=\Delta u+b_i D_i u-au.$$

Dabei ist Δ der Laplacesche Operator, $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ und es sind b_i, $i=1, 2$ und a vorgegebene Funktionen. Wir vereinbaren, daß über doppelt auftretende Indizes stets summiert wird.

Als kombiniertes Randwertproblem bezeichnen wir die Aufgabe, eine Funktion u zu finden, die für eine auf $\partial\Omega_1=\{(x_1, x_2);\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_1\geqq 0\}$ gegebene Funktion ψ und für eine auf $\partial\Omega_2=\{(x_1, x_2);\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_1<0\}$ gegebene Funktion φ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} &Lu=0\\ (1)\qquad &u|_{\partial\Omega_1}=\psi\\ &lu=M_i D_i u|_{\partial\Omega_2}=\varphi. \end{aligned}$$

$M=(M_1, M_2)$ bezeichnet den äußeren Normalenvektor des Randes $\partial\Omega=\partial\Omega_1+\partial\Omega_2$. In dieser Arbeit wird die Lösbarkeit der Aufgabe (1) in dem von S. L. SOBOLEW in [1] charakterisierten Raum $W_2^{(2)}(\Omega)$ untersucht. Zum Existenznachweis einer Lösung verwenden wir das Verfahren der stetigen Fortsetzung von Operatoren ausgehend von einem zu (1) anlogen kombinierten Problem für den Laplaceschen Operator. Dieses Verfahren wurde bereits in [2] von C. MIRANDA erfolglreich zum Nachweis der Existenz einer Lösung des kombinierten Problems in Hölderstetigen Räumen, die mit einer geeigneten Gewichtsfunktion ausgestattet sind, sowie in [3] von O. A. LADYJENSKAJA zum Nachweis der Existens einer Lösung des Dirichletschen Problems in $W_2^{(2)}$ verwendet. Es stützt sich auf einige a priori Abschätzungen für die mutmaßliche Lösung der zu untersuchenden Probleme. In [4], Kapitel 1 wurde gezeigt, daß im Spezialfall $b_i=a=0$ das kombinierte Problem im klassischen Sinne gelöst werden kann, wenn sich ψ und φ in Form von Fourierreihen darstellen lassen, ψ differenzierbar ist und φ sowie die Ableitungen von ψ Funktionen von beschränkter Schwankung sind. Die Lösung u ergibt sich in diesem Falle als in Ω zweimal stetig differenzierbare Funktion, die durch die Auflösung unendlichdimensionaler algebraischer linearer Gleichungssysteme konstruiert werden kann. Verwendet man die in [4], Kapitel 1 demonstrierte Methode, so kann man zeigen, daß das kombinierte Problem für den Laplaceschen Operator eine sogar in $\Omega+\partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbare Lösung besitzt, wenn ψ viermal und φ dreimal stetig differenzierbar sowei ψ fünfmal und φ viermal stückweise stetig differenzierbar ist.

Bevor wir die notwendigen a priori Abschätzungen herleiten, geben wir die für die Untersuchung wichtigsten Funktionenräume an. Wir benötigen die Räume $W_2^{(k)}(\Omega)$, $k=0, 1, 2$. Dabei ist $W_2^{(0)}(\Omega)=L_2(\Omega)$ und wir verwenden als Normen:

$$u\in W_2^{(2)}(\Omega), \|u\|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{2} (D_i D_j u)^2+(\operatorname{grad} u)^2+u^2\right] dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u\in W_2^{(1)}(\Omega), \|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx+\int_{\partial\Omega_1} u^2\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u\in W_2^{(0)}(\Omega), \|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega u^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Sobolewschen Räume $W_2^{(k)}(\partial\Omega)$, $k=1, 2$ bezüglich des Randes $\partial\Omega$ wurden in [5] präzisiert und es wurden geeignete Normen $\|u\|_{k,\partial\Omega}$ konstruiert, die wir hier nicht weiter erläutern. Eine wichtige Rolle spielen die folgenden Unterräume aus $W_2^{(2)}(\Omega)$:

$$E = \{v; v\in W_2^{(2)}(\Omega), \Delta v = 0, v|_{\partial\Omega_1} = 0, lu = 0\},$$

$$W = \{u; u\in W_2^{(2)}(\Omega), u|_{\partial\Omega_1}\in W_2^{(2)}(\partial\Omega_1), lu \in W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)\}.$$

Dabei ist E der Raum der Eigenfunktionen des kombinierten Problems für den Laplaceschen Operator in $W_2^{(2)}(\Omega)$. Außerdem führen wir noch den Raum

$$H = W_2^{(0)}(\Omega)\times W_2^{(2)}(\partial\Omega_1)\times W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$$

und die Unterräume

$$H_0 = \left\{(0, \psi, \varphi); \psi\in W_2^{(2)}(\partial\Omega_1), \varphi\in W_2^{(1)}(\partial\Omega_2), \int_{\partial\Omega_1} \psi M_i D_i v\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_2} \varphi v\, d\sigma, v\in E\right\},$$

$$H_L = \{(\mathrm{L}u, u|_{\partial\Omega_1}, lu); u\in W\}$$

ein. H ist offensichtlich ein Banachraum und wir definieren die Norm eines Elementes $(f, \psi, \varphi)\in H$ durch

$$\|(f, \psi, \varphi)\|_H = \|f\|_{0,\Omega}+\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1}+\|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}.$$

Wir werden als nächstes einige grundlegende Ungleichungen herleiten. Es seien die Funktionen b_i in Ω stetig und beschränkt und $a\in \bigcup_{q<1} L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)$. Dann gibt es eine Konstante $C>0$, so daß für jedes $u\in W_2^{(1)}(\Omega)$

(2) $$\|b_i D_i u-au\|_{0,\Omega} \leqq C\|u\|_{1,\Omega}$$

gilt. Tatsächlich, man erhält offensichtlich nach Anwendung der Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung

(3) $$\|b_i D_i u-au\|_{0,\Omega} \leqq \max_{\Omega, i=1,2} |b_i|\, \|D_i u\|_{0,\Omega}+\|a\|_{L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)}\|u\|_{L_{2q}(\Omega)}.$$

Da auf Grund der Sobolewschen Einbettungssätze jede Funktion $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ zu jeder beliebigen Potenz integrierbar ist und es eine Konstante $C > 0$, gibt, so daß

$$\|u\|_{L_{2q}(\Omega)} \leqq C\|u\|_{1,\Omega}$$

erfüllt ist, folgt (2) sofort aus (3).

Hilfssatz 1. *Es gibt eine absolute Konstante* $C > 0$, *so daß jede Funktion* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *der Ungleichung*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \tag{4}$$

genügt.

Beweis. Es ist sicher

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx = -\int_\Omega \Delta u \cdot u\, dx + \int_{\partial\Omega} lu \cdot u\, d\sigma. \tag{5}$$

Verwendet man die Höldersche Ungleichung und die Sobolewschen Einbettungssätze, so erhält man

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leqq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})\|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{0,\partial\Omega_1}^2.$$

Da für beliebige $\varepsilon > 0$ und beliebige reelle Zahlen α, β stets

$$\alpha\beta \leqq \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\beta^2$$

ist, ergibt sich

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leqq \frac{\varepsilon C}{2}\|u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{C}{2\varepsilon}(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})^2 + \|u\|_{0,\partial\Omega_1}^2,$$

woraus (4) sofort für ein genügend kleines ε folgt. Es sei τ eine relle Zahl mit $0 \leqq \tau \leqq 1$. Wir betrachten eine Familie von Operatoren der Form

$$L_\tau = \Delta + \tau(L - \Delta).$$

Hilfssatz 2. *Wenn die Funktionen* b_i *und* a *den angegebenen Bedingungen genügen und außerdem* $a \geqq a_0$ *für eine geeignete Konstante* a_0 *ist, so existiert ein* $C > 0$, *welches nicht von* τ *mit* $0 < \tau_0 \leqq \tau \leqq 1$ *abhängt, so daß jede Funktion* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *der Ungleichung*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqq C(\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \tag{6}$$

genügt.

Beweis. Aus der Identität (5) folgt

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \int_\Omega \tau a u^2\, dx = -\int_\Omega L_\tau u \cdot u\, dx + \int_{\partial\Omega} lu \cdot u\, d\sigma + \int_\Omega \tau b_i D_i u \cdot u\, dx.$$

Ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 erhält man daraus

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \tau_0 a_0 \int_\Omega u^2\, dx \leqq$$

$$\leqq (\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})\|u\|_{1,\Omega} + \frac{\varepsilon C}{2}\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \frac{C}{2\varepsilon}\|u\|_{0,\Omega}^2.$$

Für $\varepsilon = 1/C$ ergibt das

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \left(\tau_0 a_0 - \frac{C^2}{2}\right)\int_\Omega u^2\, dx \leqq$$

$$\leqq (\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})\|u\|_{1,\Omega}.$$

Wird a_0 so gewählt, daß $\left(\tau_0 a_0 - \frac{C^2}{2}\right) > 0$ ist, so steht auf der linken Seite der letzten Ungleichung eine zu $\|u\|_{1,\Omega}$ äquivalente Norm. Darum ist diese Ungleichung mit der Abschätzung (6) evident.

Hilfssatz 3. *Wenn die Funktionen b_i und a die Bedingungen des Hilfssatzes 2 erfüllen, so existiert eine Konstante $C > 0$, die nicht von τ mit $0 < \tau_0 \leqq \tau \leqq 1$ abhängt, so daß jede Funktion $u \in W$ der Ungleichung*

(7) $$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügt.

Beweis. In [5] wurde gezeigt, daß für jede Funktion $u \in C_2(\Omega + \partial\Omega)$ die Ungleichung

(8) $$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2} + \|u\|_{1,\Omega})$$

erfüllt ist, wobei C eine unabhängige Konstante ist. Daraus folgt

(9) $$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2} + \|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}).$$

Aus den Ungleichungen (2), (6) und (9) folgt die Abschätzung (7). Indem man die Funktionen $u \in W$ durch unendlich oft differenzierbare Funktionen approximiert, erhält man die Gültigkeit der Ungleichung (7) auch für alle Funktionen $u \in W$.

Angenommen es wäre $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ eine Lösung des kombinierten Randwertproblemes

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi, \quad lu = \varphi.$$

In diesem Fall müßten die vorgegebenen Funktionen ψ und φ notwendig einer Integralidentität der Form

(10) $$\int_{\partial\Omega_1} M_i D_i v \cdot \psi\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_2} \varphi \cdot v\, d\sigma$$

für alle $v \in E$ genügen. Denn für beliebige Funktionen $u, v \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ist sicher

(11) $$\int_\Omega \Delta u \cdot v\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx = \int_{\partial\Omega} M_i D_i u \cdot v\, d\sigma.$$

Außerdem gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\partial\Omega} M_i D_i v \cdot u \, d\sigma - \int_{\Omega} \Delta v \cdot u \, dx.$$

Ist u die angenommene Lösung des kombinierten Problems und $v \in E$, so folgt (10) unmittelbar aus den letzten beiden Gleichungen.

Satz 1. *Für jedes Element* $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ *existiert genau eine Funktion* $u \in W$, *die Lösung des kombinierten Problems*

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi, \quad lu = \varphi$$

ist und die der Ungleichung

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}) \tag{12}$$

genügt, wobei C eine von u unabhängige absolute positive Konstante ist.

Dieser Satz besagt nichts weiter, als daß $H_0 \subset H_\Delta$ ist.

BEWEIS. Es sei $(0, \psi, \varphi) \in H_0$. Dann gibt es Folgen ψ_ν und φ_ν beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit der Eigenschaft

$$\lim_{\nu \to \infty} \psi_\nu = \psi, \quad \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = \varphi.$$

Dabei findet die Konvergenz in den entsprechenden Räumen $W_2^{(2)}(\partial\Omega_1)$ bzw. $W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$ statt. Nach den über die klassische Lösbarkeit des kombinierten Problems gemachten Bemerkungen existiert dann eine Folge $u_\nu \in C_2(\Omega + \partial\Omega)$, so daß

$$\Delta u_\nu = 0, \quad u_\nu|_{\partial\Omega_1} = \psi_\nu, \quad lu_\nu = \varphi_\nu$$

erfüllt ist. Gemäß dem Hilfssatz 1 und der Ungleichung (8) ergibt sich, daß die Funktionen u_ν der Abschätzung

$$\|u_\nu\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi_\nu\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi_\nu\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügen. Infolgendessen konvergiert u_ν für $\nu \to \infty$ in der Norm von $W_2^{(2)}(\Omega)$ gegen eine Funktion u. Für diese ist die Ungleichung (12) erfüllt. Es erweist sich, daß u die gesuchte Lösung des kombinierten Problems ist. Denn aus

$$\|\Delta u\|_{0,\Omega} \leqq \|u - u_\nu\|_{2,\Omega} \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$$

folgt $\Delta u = 0$. Außerdem ist gemäß den Sobolewschen Einbettungssätzen

$$\|u - \psi\|_{0,\partial\Omega_1} \leqq \|u - u_\nu\|_{0,\partial\Omega_1} + \|\psi_\nu - \psi\|_{0,\partial\Omega_1} \leqq$$
$$\leqq C(\|u - u_\nu\|_{2,\Omega} + \|\psi_\nu - \psi\|_{2,\partial\Omega_1}) \xrightarrow{\nu \to \infty} 0,$$

woraus $u|_{\partial\Omega_1} = \psi$ folgt. Da die Identität (11) auch für alle $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$ erfüllt ist und φ_ν für $\nu \to \infty$ in der Norm von $W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$ gegen φ konvergiert, erhält man für die gewonnene Funktion u und $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$

$$\int_{\partial\Omega_2} \varphi v \, d\sigma = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\partial\Omega_2} \varphi_\nu v \, d\sigma = \lim_{\nu \to \infty} \Big(\int_{\Omega} \Delta u_\nu \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_\nu \operatorname{grad} v \, dx \Big) =$$
$$= \int_{\partial\Omega_2} lu \cdot v \, d\sigma.$$

Also ist für alle Funktionen $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1}=0$

$$\int_{\partial\Omega_2} (\varphi - lu)v\, d\sigma = 0. \tag{13}$$

Insbesondere ist (13) für alle $v \in \mathring{C}_\infty(\Omega+\partial\Omega) = \{v;\ v \in C_\infty(\Omega+\partial\Omega),\ v|_{\partial\Omega_1}=0\}$ und damit für alle $v \in L_p(\partial\Omega_2)$ mit $p>1$ erfüllt, da die Einschränkung der Funktionen aus $\mathring{C}_\infty(\Omega+\partial\Omega)$ auf $\partial\Omega_2$ in $L_p(\partial\Omega_2)$ dicht liegt. Andererseits sind die Funktionen φ und lu auf Grund der Sobolewschen Einbettungssätze über $\partial\Omega_2$ zu jeder Potenz integrabel. Darum ist $(\varphi - lu) \in L_q(\partial\Omega_2)$ für eine reelle Zahl q mit $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ und somit ist die Identität (13) nur möglich, wenn $lu=\varphi$ ist. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt unmittelbar aus der Ungleichung (12).

Wir betrachten die Parameter τ mit $0 \leqq \tau \leqq 1$. Dann wird durch die Gleichung

$$\Phi_\tau(u) = (L_\tau u, u|_{\partial\Omega_1}, lu)$$

eine Familie parameterabhängiger Abbildungen von W in H definiert. Diese Abbildungen sind linear und darum gilt

$$\Phi_\tau(u) = \Phi_0(u) + \tau\big(\Phi_1(u) - \Phi_0(u)\big).$$

Der Satz 1 besagt dann, daß H_0 in $H_\Delta = \Phi_0(W)$ enthalten ist, Φ_0 den Raum W umkehrbar eindeutig auf H_Δ abbildet und daß auf Grund der Ungeichung (8) und des Hilfssatzes 1 eine absolute Konstante $C>0$ existiert, so daß

$$\|\Phi_0^{-1}\| \leqq C$$

ist.

Satz 2. *Es seien b_i stetige beschränkte Funktionen in Ω und a eine Funktion aus $\bigcup_{q>1} L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)$, die stets größer als eine gewisse Konstante a_0 ist. Dann existiert für jedes Element $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ genau eine Funktion $u \in W$, die Lösung des kombinierten Problems*

$$Lu=0, \quad u|_{\partial\Omega_1}=\psi, \quad lu=\varphi$$

ist und die der Ungleichung

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}) \tag{14}$$

genügt, wobei C eine von u unabhängige absolute positive Konstante ist.

Der Satz 2 sagt aus, daß H_0 in $H_L = \Phi_1(W)$ enthalten ist, Φ_1 den Raum W umkehrbar eindeutig auf H_L abbildet und daß eine absolute Konstante $C>0$ existiert, so daß

$$\|\Phi_1^{-1}\| \leqq C$$

ist.

Beweis. Wir zeigen, daß es ein $\tau_1 > 0$ gibt, so daß für jedes $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ ein $u \in W$ mit

$$\Phi_{\tau_1}(u) = \Phi_0(u) + \tau_1\big(\Phi_{\tau_1}(u) - \Phi_0(u)\big) = (0, \psi, \varphi) \tag{15}$$

existiert. Offensichtlich ist die Lösbarkeit der Gleichung (15) äquivalent mit der Lösbarkeit von

$$[I+\tau_1 \Phi_0^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)]u = \Phi_0^{-1}(0,\psi,\varphi), \tag{16}$$

wobei I den identischen Operator bezeichnet. Aus einem bekannten Satz der Funktionalanalysis folgt, daß die Gleichung (16) lösbar ist, wenn

$$\tau_1 \|\Phi_0^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)\| < 1$$

ist. Das ist aber für ein geeignetes $\tau_1>0$ der Fall, denn es gilt

$$\|\Phi_0^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)u\|_{2,\Omega} \leqq C\|(\Phi_1-\Phi_0)u\|_H = C\|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} \leqq C^*\|u\|_{2,\Omega}.$$

Folglich muß $0<\tau_1<\dfrac{1}{C^*}$ gewählt werden.

Es sei $0<\tau_0\leqq\tau_1$. Dann erfüllt die Lösung der Gleichung (15) infolge des Hilfssatzes 3 die Ungleichung

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1}+\|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}). \tag{17}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\|\Phi_{\tau_1}^{-1}\| \leqq C. \tag{18}$$

Es gibt eine konstante Schrittlänge $d>0$, so daß auch die Gleichungen

$$\Phi_{\tau_1+d}(u) = (0,\psi,\varphi), \quad \Phi_{\tau_1+2d}(u) = (0,\psi,\varphi), \ldots$$

lösbar sind und man erreicht damit nach endlich vielen Schritten die Lösbarkeit der Gleichung

$$\Phi_1(u)=(0,\psi,\varphi).$$

Tatsächlich, es ist

$$\Phi_{\tau_1+d}(u) = \Phi_{\tau_1}(u)+d(\Phi_1(u)-\Phi_0(u)) = (0,\psi,\varphi)$$

äquivalent mit

$$[I+d\Phi_{\tau_1}^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)]u = \Phi_{\tau_1}^{-1}(0,\psi,\varphi).$$

Die letzte Gleichung ist aber für eine reelle Zahl d mit

$$0<d<\frac{1}{\|\Phi_{\tau_1}^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)\|}$$

lösbar und die Lösung genügt gemäß der Behauptung des Hilfssatzes 3 der Ungleichung (17) mit einer absoluten Konstanten C, die nicht mehr von d abhängt. Darum ist

$$\|\Phi_{\tau_1+d}^{-1}\| \leqq C, \tag{19}$$

wobei die Konstanten in (18) und (19) übereinstimmen. Damit wurde gezeigt, daß d eine konstante Schrittlänge ist und man nach endlich vielen Schritten die Abbildung Φ_1 erreicht.

Literaturverzeichnis

[1] S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik, *Leningrad,* (1950)

[2] C. Miranda, Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche *Ann. Mat. purch. appl.,* IV *Ser.* **39** (1955), 279—303.

[3] O. A. Ladyjenskajy, Ein einfacher Beweis der Lösbarkeit von Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben für lineare elliptische Gleichungen *Vestnik Leningradskogo Universitetja Ser. Mathematik,* No **11** (1955).

[4] Kantorowitsch—Krylow, Näherungsmethoden der höheren Analysis, *Moskau—Leningrad* (1952).

[5] M. Walk, Verallgemeinerte Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen *Wissensch. Zeitschr. der Friedrich-Schiller Univ. Jena, Mathematisch—Naturwissenschaftliche Reihe, Heft* **5**, (1965).

(Eingegangen am 15. August 1966.)