Da auf Grund der Sobolewschen Einbettungssätze jede Funktion $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ zu jeder beliebigen Potenz integrierbar ist und es eine Konstante $C>0$, gibt, so daß

$$\|u\|_{L_{2q}(\Omega)} \leqq C\|u\|_{1,\Omega}$$

erfüllt ist, folgt (2) sofort aus (3).

Hilfssatz 1. *Es gibt eine absolute Konstante* $C>0$, *so daß jede Funktion* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *der Ungleichung*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \tag{4}$$

genügt.

Beweis. Es ist sicher

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx = -\int_\Omega \Delta u \cdot u\, dx + \int_{\partial\Omega} lu \cdot u\, d\sigma. \tag{5}$$

Verwendet man die Höldersche Ungleichung und die Sobolewschen Einbettungssätze, so erhält man

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leqq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})\|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{0,\partial\Omega_1}^2.$$

Da für beliebige $\varepsilon>0$ und beliebige reelle Zahlen α, β stets

$$\alpha\beta \leqq \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\beta^2$$

ist, ergibt sich

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leqq \frac{\varepsilon C}{2}\|u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{C}{2\varepsilon}(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})^2 + \|u\|_{0,\partial\Omega_1}^2,$$

woraus (4) sofort für ein genügend kleines ε folgt. Es sei τ eine relle Zahl mit $0 \leqq \tau \leqq 1$. Wir betrachten eine Familie von Operatoren der Form

$$L_\tau = \Delta + \tau(L-\Delta).$$

Hilfssatz 2. *Wenn die Funktionen* b_i *und* a *den angegebenen Bedingungen genügen und außerdem* $a \geqq a_0$ *für eine geeignete Konstante* a_0 *ist, so existiert ein* $C>0$, *welches nicht von* τ *mit* $0<\tau_0 \leqq \tau \leqq 1$ *abhängt, so daß jede Funktion* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *der Ungleichung*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqq C(\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \tag{6}$$

genügt.

Beweis. Aus der Identität (5) folgt

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \int_\Omega \tau a u^2\, dx = -\int_\Omega L_\tau u \cdot u\, dx + \int_{\partial\Omega} lu \cdot u\, d\sigma + \int_\Omega \tau b_i D_i u \cdot u\, dx.$$

Ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 erhält man daraus

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,dx + \tau_0 a_0 \int_\Omega u^2\,dx \leqq$$

$$\leqq (\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})\,\|u\|_{1,\Omega} + \frac{\varepsilon C}{2}\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,dx + \frac{C}{2\varepsilon}\,\|u\|_{0,\Omega}^2.$$

Für $\varepsilon = 1/C$ ergibt das

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,dx + \left(\tau_0 a_0 - \frac{C^2}{2}\right)\int_\Omega u^2\,dx \leqq$$

$$\leqq (\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})\,\|u\|_{1,\Omega}.$$

Wird a_0 so gewählt, daß $\left(\tau_0 a_0 - \dfrac{C^2}{2}\right) > 0$ ist, so steht auf der linken Seite der letzten Ungleichung eine zu $\|u\|_{1,\Omega}$ äquivalente Norm. Darum ist diese Ungleichung mit der Abschätzung (6) evident.

Hilfssatz 3. *Wenn die Funktionen b_i und a die Bedingungen des Hilfssatzes 2 erfüllen, so existiert eine Konstante $C>0$, die nicht von τ mit $0<\tau_0\leqq\tau\leqq 1$ abhängt, so daß jede Funktion $u\in W$ der Ungleichung*

(7) $$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügt.

Beweis. In [5] wurde gezeigt, daß für jede Funktion $u\in C_2(\Omega+\partial\Omega)$ die Ungleichung

(8) $$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2} + \|u\|_{1,\Omega})$$

erfüllt ist, wobei C eine unabhängige Konstante ist. Daraus folgt

(9) $$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|L_\tau u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2} + \|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}).$$

Aus den Ungleichungen (2), (6) und (9) folgt die Abschätzung (7). Indem man die Funktionen $u\in W$ durch unendlich oft differenzierbare Funktionen approximiert, erhält man die Gültigkeit der Ungleichung (7) auch für alle Funktionen $u\in W$.

Angenommen es wäre $u\in W_2^{(2)}(\Omega)$ eine Lösung des kombinierten Randwertproblemes

$$\Delta u = 0,\quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi,\quad lu = \varphi.$$

In diesem Fall müßten die vorgegebenen Funktionen ψ und φ notwendig einer Integralidentität der Form

(10) $$\int_{\partial\Omega_1} M_i D_i v\cdot\psi\,d\sigma = \int_{\partial\Omega_2} \varphi\cdot v\,d\sigma$$

für alle $v\in E$ genügen. Denn für beliebige Funktionen u, $v\in W_2^{(2)}(\Omega)$ ist sicher

(11) $$\int_\Omega \Delta u\cdot v\,dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\,dx = \int_{\partial\Omega} M_i D_i u\cdot v\,d\sigma.$$

Außerdem gilt

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx = \int_{\partial\Omega} M_i D_i v \cdot u\, d\sigma - \int_\Omega \Delta v \cdot u\, dx.$$

Ist u die angenommene Lösung des kombinierten Problems und $v \in E$, so folgt (10) unmittelbar aus den letzten beiden Gleichungen.

Satz 1. *Für jedes Element* $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ *existiert genau eine Funktion* $u \in W$, *die Lösung des kombinierten Problems*

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi, \quad lu = \varphi$$

ist und die der Ungleichung

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}) \tag{12}$$

genügt, wobei C eine von u unabhängige absolute positive Konstante ist.

Dieser Satz besagt nichts weiter, als daß $H_0 \subset H_\Delta$ ist.

Beweis. Es sei $(0, \psi, \varphi) \in H_0$. Dann gibt es Folgen ψ_ν und φ_ν beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit der Eigenschaft

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu = \psi, \quad \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu = \varphi.$$

Dabei findet die Konvergenz in den entsprechenden Räumen $W_2^{(2)}(\partial\Omega_1)$ bzw. $W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$ statt. Nach den über die klassische Lösbarkeit des kombinierten Problems gemachten Bemerkungen existiert dann eine Folge $u_\nu \in C_2(\Omega + \partial\Omega)$, so daß

$$\Delta u_\nu = 0, \quad u_\nu|_{\partial\Omega_1} = \psi_\nu, \quad lu_\nu = \varphi_\nu$$

erfüllt ist. Gemäß dem Hilfssatz 1 und der Ungleichung (8) ergibt sich, daß die Funktionen u_ν der Abschätzung

$$\|u_\nu\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi_\nu\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi_\nu\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügen. Infolgendessen konvergiert u_ν für $\nu \to \infty$ in der Norm von $W_2^{(2)}(\Omega)$ gegen eine Funktion u. Für diese ist die Ungleichung (12) erfüllt. Es erweist sich, daß u die gesuchte Lösung des kombinierten Problems ist. Denn aus

$$\|\Delta u\|_{0,\Omega} \leqq \|u - u_\nu\|_{2,\Omega} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$$

folgt $\Delta u = 0$. Außerdem ist gemäß den Sobolewschen Einbettungssätzen

$$\begin{aligned}\|u-\psi\|_{0,\partial\Omega_1} &\leqq \|u-u_\nu\|_{0,\partial\Omega_1} + \|\psi_\nu - \psi\|_{0,\partial\Omega_1} \leqq \\ &\leqq C(\|u-u_\nu\|_{2,\Omega} + \|\psi_\nu - \psi\|_{2,\partial\Omega_1}) \xrightarrow{\nu\to\infty} 0,\end{aligned}$$

woraus $u|_{\partial\Omega_1} = \psi$ folgt. Da die Identität (11) auch für alle $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$ erfüllt ist und φ_ν für $\nu \to \infty$ in der Norm von $W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$ gegen φ konvergiert, erhält man für die gewonnene Funktion u und $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_2} \varphi v\, d\sigma = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\partial\Omega_2} \varphi_\nu v\, d\sigma = \lim_{\nu\to\infty} \Big(\int_\Omega \Delta u_\nu \cdot v\, dx + \int_\Omega \operatorname{grad} u_\nu \operatorname{grad} v\, dx\Big) = \\ = \int_{\partial\Omega_2} lu \cdot v\, d\sigma.\end{aligned}$$

Also ist für alle Funktionen $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1}=0$

$$\int_{\partial\Omega_2} (\varphi - lu)v \, d\sigma = 0. \tag{13}$$

Insbesondere ist (13) für alle $v \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega+\partial\Omega)=\{v;\ v\in C_\infty(\Omega+\partial\Omega),\ v|_{\partial\Omega_1}=0\}$ und damit für alle $v\in L_p(\partial\Omega_2)$ mit $p>1$ erfüllt, da die Einschränkung der Funktionen aus $\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega+\partial\Omega)$ auf $\partial\Omega_2$ in $L_p(\partial\Omega_2)$ dicht liegt. Andererseits sind die Funktionen φ und lu auf Grund der Sobolewschen Einbettungssätze über $\partial\Omega_2$ zu jeder Potenz integrabel. Darum ist $(\varphi - lu)\in L_q(\partial\Omega_2)$ für eine reelle Zahl q mit $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ und somit ist die Identität (13) nur möglich, wenn $lu=\varphi$ ist. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt unmittelbar aus der Ungleichung (12).

Wir betrachten die Parameter τ mit $0\leqq\tau\leqq 1$. Dann wird durch die Gleichung

$$\Phi_\tau(u) = (L_\tau u, u|_{\partial\Omega_1}, lu)$$

eine Familie parameterabhängiger Abbildungen von W in H definiert. Diese Abbildungen sind linear und darum gilt

$$\Phi_\tau(u)=\Phi_0(u)+\tau\big(\Phi_1(u)-\Phi_0(u)\big).$$

Der Satz 1 besagt dann, daß H_0 in $H_\Delta=\Phi_0(W)$ enthalten ist, Φ_0 den Raum W umkehrbar eindeutig auf H_Δ abbildet und daß auf Grund der Ungeichung (8) und des Hilfssatzes 1 eine absolute Konstante $C>0$ existiert, so daß

$$\|\Phi_0^{-1}\| \leqq C$$

ist.

Satz 2. *Es seien b_i stetige beschränkte Funktionen in Ω und a eine Funktion aus $\bigcup_{q>1} L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)$, die stets größer als eine gewisse Konstante a_0 ist. Dann existiert für jedes Element $(0,\psi,\varphi)\in H_0$ genau eine Funktion $u\in W$, die Lösung des kombinierten Problems*

$$Lu=0,\quad u|_{\partial\Omega_1}=\psi,\quad lu=\varphi$$

ist und die der Ungleichung

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1}+\|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}) \tag{14}$$

genügt, wobei C eine von u unabhängige absolute positive Konstante ist.

Der Satz 2 sagt aus, daß H_0 in $H_L=\Phi_1(W)$ enthalten ist, Φ_1 den Raum W umkehrbar eindeutig auf H_L abbildet und daß eine absolute Konstante $C>0$ existiert, so daß

$$\|\Phi_1^{-1}\| \leqq C$$

ist.

Beweis. Wir zeigen, daß es ein $\tau_1>0$ gibt, so daß für jedes $(0,\psi,\varphi)\in H_0$ ein $u\in W$ mit

$$\Phi_{\tau_1}(u) = \Phi_0(u)+\tau_1\big(\Phi_{\tau_1}(u)-\Phi_0(u)\big) = (0,\psi,\varphi) \tag{15}$$

existiert. Offensichtlich ist die Lösbarkeit der Gleichung (15) äquivalent mit der Lösbarkeit von

$$(16) \qquad [I+\tau_1 \Phi_0^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)]u = \Phi_0^{-1}(0,\psi,\varphi),$$

wobei I den identischen Operator bezeichnet. Aus einem bekannten Satz der Funktionalanalysis folgt, daß die Gleichung (16) lösbar ist, wenn

$$\tau_1 \|\Phi_0^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)\| < 1$$

ist. Das ist aber für ein geeignetes $\tau_1 > 0$ der Fall, denn es gilt

$$\|\Phi_0^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)u\|_{2,\Omega} \leqq C\|(\Phi_1-\Phi_0)u\|_H = C\|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} \leqq C^* \|u\|_{2,\Omega}.$$

Folglich muß $0<\tau_1<\dfrac{1}{C^*}$ gewählt werden.

Es sei $0<\tau_0\leqq\tau_1$. Dann erfüllt die Lösung der Gleichung (15) infolge des Hilfssatzes 3 die Ungleichung

$$(17) \qquad \|u\|_{2,\Omega} \leqq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1}+\|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}).$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(18) \qquad \|\Phi_{\tau_1}^{-1}\| \leqq C.$$

Es gibt eine konstante Schrittlänge $d>0$, so daß auch die Gleichungen

$$\Phi_{\tau_1+d}(u) = (0,\psi,\varphi), \quad \Phi_{\tau_1+2d}(u) = (0,\psi,\varphi), \ldots$$

lösbar sind und man erreicht damit nach endlich vielen Schritten die Lösbarkeit der Gleichung

$$\Phi_1(u) = (0,\psi,\varphi).$$

Tatsächlich, es ist

$$\Phi_{\tau_1+d}(u) = \Phi_{\tau_1}(u) + d\big(\Phi_1(u)-\Phi_0(u)\big) = (0,\psi,\varphi)$$

äquivalent mit

$$[I+d\Phi_{\tau_1}^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)]u = \Phi_{\tau_1}^{-1}(0,\psi,\varphi).$$

Die letzte Gleichung ist aber für eine reelle Zahl d mit

$$0<d<\frac{1}{\|\Phi_{\tau_1}^{-1}(\Phi_1-\Phi_0)\|}$$

lösbar und die Lösung genügt gemäß der Behauptung des Hilfssatzes 3 der Ungleichung (17) mit einer absoluten Konstanten C, die nicht mehr von d abhängt. Darum ist

$$(19) \qquad \|\Phi_{\tau_1+d}^{-1}\| \leqq C,$$

wobei die Konstanten in (18) und (19) übereinstimmen. Damit wurde gezeigt, daß d eine konstante Schrittlänge ist und man nach endlich vielen Schritten die Abbildung Φ_1 erreicht.

Literaturverzeichnis

[1] S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik, *Leningrad*, (1950)

[2] C. Miranda, Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche *Ann. Mat. purch. appl.*, IV *Ser.* **39** (1955), 279—303.

[3] O. A. Ladyjenskajy, Ein einfacher Beweis der Lösbarkeit von Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben für lineare elliptische Gleichungen *Vestnik Leningradskogo Universitetja Ser. Mathematik*, No **11** (1955).

[4] Kantorowitsch—Krylow, Näherungsmethoden der höheren Analysis, *Moskau—Leningrad* (1952).

[5] M. Walk, Verallgemeinerte Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen *Wissensch. Zeitschr. der Friedrich-Schiller Univ. Jena, Mathematisch—Naturwissenschaftliche Reihe, Heft* **5**, (1965).

(Eingegangen am 15. August 1966.)

Logarithmische Integrale

Von GERD WECHSUNG (Jena)

Anknüpfend an E. Kummers bedeutende Arbeit aus dem Jahre 1840 ([6]) verstehen wir unter einem logarithmischen Integral n-ter Ordnung eine Funktion der Gestalt

$$(0) \qquad F(z) = \int_{c_n}^{z} f_n(x_n) \int_{c_{n-1}}^{x_n} f_{n-1}(x_{n-1}) \dots \int_{c_1}^{x_2} f_1(x_1)\, dx_1 \dots dx_n$$

mit rationalen Funktionen $f_1, \dots, f_n$, vorausgesetzt, daß die unteren Integrationsgrenzen so gewählt sind, daß das Integral existiert. Die Untersuchungen über Inhaltsmessung von Simplexen in Räumen konstanter Krümmung, die auf L. SCHLÄFLI und N. J. LOBATSCHEWSKI zurückgehen, haben in ihrer Fortführung durch H. S. M. COXETER ([4]), W. MAIER ([9], [10], [11]) und J. BÖHM ([2], [3]) klargestellt, daß in Räumen kleiner Dimension spezielle logarithmische Integrale, nämlich die Polylogarithmen $L_n(z)$ (vgl. Formel (2)) für $n=2, 3$ als Inhaltsfunktionen auftreten. Von P. MÜLLER ([12]) und A. BLOCH und G. GUILLAUMIN ([1]) wurde die Vermutung ausgesprochen, daß in Räumen höherer Dimension höhere Polylogarithmen die Funktion der Inhaltsmessung übernehmen würden. Die Arbeiten von J. Böhm (insbesondere [3] zeigten), daß im 7-dimensionalen Raum die Inhaltsmessung im wesentlichen von einer Funktion $\int_0^z \frac{L_3(t)\, dt}{t-c}$ geleistet wird. Alle Versuche, diese Funktion, die für $c=0$ in den Tetralogarithmus übergeht, durch diesen auszudrücken, scheiterten, so daß sich die Frage erhob, ob die Zurückführung von $\int_0^z \frac{L_3(t)\, dt}{t-c}$ auf $L_4(z)$ überhaupt möglich ist. Diese aus geometrischen Untersuchungen stammende Frage ist Anlaß der vorstehenden rein funktionentheoretischen Untersuchungen über logarithmische Integrale.

Die logarithmischen Integrale werden als Funktionen der komplexen Veränderlichen z aufgefaßt. Das Studium des Verzweigungsverhaltens dieser Funktionen führt zu einer Klassifizierung der logarithmischen Singularitäten und damit zu einer Einteilung der logarithmischen Integrale in verschiedene Typen. (Nr. 2). Damit läßt sich die Angabe einer Isomorphie der als Vektorraum aufgefaßten Gesamtheit aller Integrale der Form (0) auf einen finiten Koordinatenraum bewerkstelligen (Nr. 3), wodurch alle Probleme, die logarithmische Integrale betreffen, auf Probleme in linearen Räumen reduziert werden. Die Zurückführung von Produkten logarithmischer Integrale auf die Basis dieses Raumes führt zu einer Fülle von Beziehungen, die als Verallgemeinerungen der Eulerschen Relation des Dilogarithmus angesehen werden können (Nr. 4). In Nr. 5 werden lineare Funktionalgleichungen logarithmischer Integrale angegeben. Das oben formulierte aus der Geometrie erwachsene Problem erscheint als Frage nach der Existenz einer linearen Abhängigkeit bestimmter Elemente des genannten Vektorraumes, die in Nr. 7 negativ entschieden wird.

1. Der Vektorraum der logarithmischen Integrale n-ter Ordnung

Durch Partialbruchzerlegung und notfalls partielle Integration läßt sich (0) auf Integrale der Form

$$(1) \qquad F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right) = \int_{b_n}^{z} \frac{dt_n}{t_n - a_n} \int_{b_{n-1}}^{t_n} \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1} - a_{n-1}} \cdots \int_{b_1}^{t_2} \frac{dt_1}{t_1 - a_1}$$

und solche, bei denen man mit weniger als n Integrationen auskommt, zurückführen. Die Funktionen (1) sind von H. Poincaré ([13]) und Lappo—Danilewski ([7]) zur Behandlung von Differentialgleichungen herangezogen worden. Mit Lappo—Danilewski wollen wir die Funktionen (1) Hyperlogarithmen nennen. Für $n=1$ stellt (1) wesentlich den Logarithmus, für $n=2$ wesentlich den Dilgarithmus dar (vergl. Lewin [8], Formel (8. 5)).

Spezialfälle der Hyperlogarithmen sind die Polygarithmen. Unter dem n-Logarithmus $L_n(z)$ versteht man die Funktion

$$(2) \qquad L_n(z) = -F_n\left(\begin{matrix} 1, 0, \ldots, 0 \\ 0, 0, \ldots, 0 \end{matrix}\middle| z\right)$$

Um algebraische Methoden stärker wirksam werden zu lassen, betrachten wir stets die Gesamtheit aller Integrale der Form (0) mit festem n, die einen linearen Vektorraum M_n bilden. Dies soll zunächst entwickelt werden.

K sei der Körper der komplexen Zahlen. Wir gehen aus vom Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen über K. M_1 sei die Menge aller Funktionen, die sich als einfache unbestimmte Integrale über Funktionen aus $K(z)$ darstellen lassen. Wegen der Linearität der Integraloperation und wegen der Moduleigenschaft von $K(z)$ ist M_1 ein Modul, der zu $K(z)$ gehörige Integralmodul. Wir bilden den $K(z)$-Modul M_1^*, der aus allen Funktionen der Form

$$\sum_{i=1}^{p} r_i(z) F_1\left(\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix}\middle| z\right) + s(z)$$

$\left(\text{mit beliebigem } p \text{ und beliebigen } r_i, s \in K(z),\ F_1\left(\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix}\middle| z\right) \in M_1\right)$ besteht. Der zu M_1 gehörige Integralmodul heiße M_2. Nun bilden wir wieder den $K(z)$-Modul M_2^* und fahren in dieser Weise fort. Dabei entsteht eine Folge ineinander geschachtelter Moduln

$$K(z) \subset M_1 \subset M_1^* \subset \ldots \subset M_{n-1}^* \subset M_n.$$

Da K und $K(z)$ Körper sind, sind alle M_i und M_i^* sogar lineare Vektorräume über K bzw. über $K(z)$.

Im Anschluß hieran erscheint folgende Definition sinnvoll.

Definition 1: Eine Funktion heißt ***eigentliches*** logarithmisches Integral n-ter Ordnung, wenn sie in M_n, aber nicht bereits in M_{n-1} liegt.

Wenn es bei einem Integral f nur auf den Bestandteil f_n n-ter Ordnung ankommt, ist es nützlich, zur Erhörung der Übersichtlichkeit eine raumsparende Abkürzung einzuführen:

$$f = f_n + \varepsilon_{n-1}.$$

Dabei soll ε_{n-1} alle Summanden niedrigerer als n-ter Ordnung enthalten. Darüber hinaus wollen wir festsetzen, für verschiedene Anteile niedrigerer als n-ter Ordnung stets dasselbe Symbol ε_{n-1} zu verwenden. Es ist dann z. B. $\varepsilon_n + \varepsilon_m = \varepsilon_m$ für $n \leqq m$. Eine erste einfache Anwendung dieser Schreibweise ist die folgende Beziehung, die ausdrückt, daß die Änderung der untern Grenzen in (1) nur eine Änderung höchstens $(n-1)$-ter Ordnung für den Hyperlogarithmus bedeutet:

$$F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{matrix}\middle| z\right) = F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right) + \varepsilon_{n-1}. \tag{3}$$

2. Klassifizierung logarithmischer Singularitäten

Die Untersuchung des Verhaltens der Funktion $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ an ihren Singularitäten erweist sich als grundlegend für alle folgenden Ausführungen. Als Singularitäten kommen nur die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_n, \infty$ in Frage.

Wir nennen zunächst einen Satz, der die Art des Wachstums von $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ an den Singularitäten beschreibt.

Satz 1. *Es gilt*

$$F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right) = O\big((\log(z-a_i))^n\big) \quad \text{für} \quad z \to a_i \tag{4}$$

$$F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right) = O\big((\log z)^n\big) \quad \text{für} \quad z \to \infty. \tag{5}$$

Der Beweis ergibt sich leicht durch vollständige Induktion über n, wenn man die Rekursion

$$F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right) = \int_{b_n}^{z} \frac{F_{n-1}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_{n-1} \\ b_1, \ldots, b_{n-1} \end{matrix}\middle| t\right)}{t-a_n}\, dt \tag{6}$$

berücksichtigt.

$F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ ist eine Funktion auf einer Überlagerungsfläche $R(a_1, \ldots, a_r, \infty)$ der in $a_1, \ldots, a_n, \infty$ punktierten Ebene. Zur Trennung eindeutiger Zweige wird die z-Ebene von jedem Punkte $a_1, \ldots, a_n$ nach ∞ so aufgeschnitten, daß die Schnitte sich nicht überkreuzen. Als Hauptzweig erklären wir denjenigen, der bei Integration gemäß (6) aus dem Hauptzweig von $F_{n-1}\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_{n-1}\\ b_1, \dots, b_{n-1}\end{matrix}\middle| z\right)$ entsteht, wenn der Integrationsweg keinen Schnitt überquert. Der Hauptzweig von $F_1\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle| z\right)$ ist durch $F_1\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle| b_1\right)=0$ eindeutig festgelegt, wenn feststeht, wie der Schnitt von a_1 nach ∞ verläuft.

Über das Verzweigungsverhalten der Funktion $F_n\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_n\\ b_1, \dots, b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ beweisen wir folgenden

Satz 2. *Bei einem im Hauptblatt beginnenden positiven Umlauf um a_i (und kein weiteres $a_j, j \neq i$) nimmt $F_n\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_n\\ b_1, \dots, b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ den additiven Umlaufsbeitrag $\Delta_i F_n$ an, wobei gilt*

$$\Delta_i F_n = 2\pi i F_{i-1}\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_{i-1}\\ b_1, \dots, b_{i-1}\end{matrix}\middle| a_i\right) F_{n-i}\left(\begin{matrix}a_{i+1}, \dots, a_n\\ a_i, \dots, a_i\end{matrix}\middle| z\right) \tag{7}$$

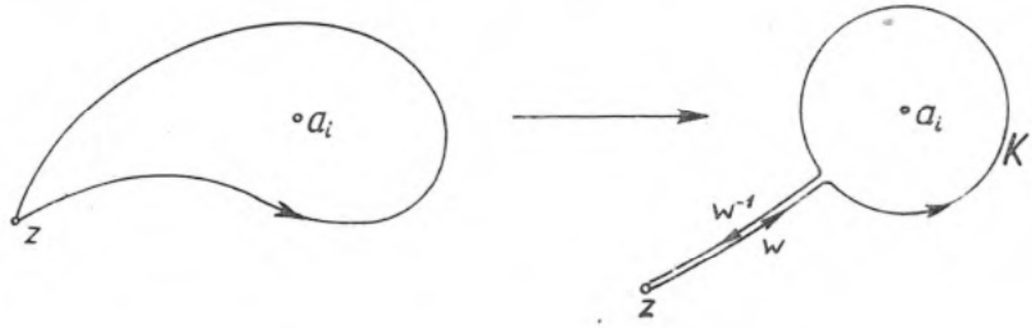
mit der zusätzlichen Definition $F_0 \equiv 1$.

Beweis. (Vollständige Induktion) $n=1$: $\Delta_1 F_1 = 2\pi i$ stimmt mit dem bekannten Verhalten von $F_1\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle| z\right)=\log\dfrac{z-a_1}{b_1-a_1}$ bei $z=a_1$ überein.

Die Formeln (7) seien für n richtig. Zur Berechnung von $\Delta_i F_{n+1}$ hat man bei Berücksichtigung der Rekursion (6) das Umlaufsintegral

$$\oint_{z, a_i^+}^{z} \frac{F_n\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_n\\ b_1, \dots, b_n\end{matrix}\middle| t\right)}{t-a_{n+1}}\, dt = \Delta_i F_{n+1} \tag{8}$$

längs eines Weges zu berechnen, der von z ausgehend nur den Punkt a_i, keinen Punkt a_j mit $j \neq i$, umläuft und keinen Schlitz überschreitet, wobei vom Integranden der Hauptzweig zu nehmen ist. Dieses Integral entspricht nämlich dem Zusatz, den $F_{n+1}\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_{n+1}\\ b_1, \dots, b_{n+1}\end{matrix}\middle| z\right)$ bei analytischer Fortsetzung längs des genannten Weges erfährt. Der Weg kann folgendermaßen deformiert werden:



Wegen des logarithmischen Verhaltens des Integranden bei a_i $(i=1, \dots, n)$ nach (4) strebt das Integral über K gegen 0, wenn der Radius von K gegen 0 geht. Es bleibt

$$\Delta_i F_{n+1} = \int_z^{a_i} \frac{F_n\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}\!\left| t\right)}{t-a_{n+1}} dt + \int_{a_i}^{z} \frac{F_n\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{pmatrix}\!\left| t\right) + \Delta_i F_n}{t-a_{n+1}} dt = \int_{a_i}^{z} \frac{\Delta_i F_n}{t-a_{n+1}} =$$

$$= 2\pi i F_{i-1}\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{i-1} \\ b_1, \dots, b_{i-1} \end{matrix}\middle| a_i\right) F_{n-i+1}\left(\begin{matrix} a_{i+1}, \dots, a_{n+1} \\ a_i, \dots, a_i \end{matrix}\middle| z\right) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n,$$

Aus (8) folgt nach dem Residuensatz

$$\Delta_{n+1} F_{n+1} = 2\pi i F_n \left(\begin{matrix} a_1 \dots a_n \\ b_1 \dots b_n \end{matrix}\middle| a_{n+1}\right)$$

Die Formeln (7) gelten also auch für $n+1$ und damit für alle n.

Dieser Satz legt die folgende Definition nahe.

Definition 2. Ein Verzweigungspunkt der Funktion $f(z)$ heißt logarithmische Singularität (logarithmischer Verzweigigungspunkt) k-ter Art, wenn $f(z)$ bei Umlaufung dieses Punktes als additiven Umlaufsbeitrag ein eigentliches logarithmisches Integral $(k-1)$-ter Ordnung besitzt $(k \geqq 2)$. Unter einer logarithmischen Singularität 1. Art verstehen wir einen Verzweigungspunkt des Logarithmus.

Nach den Ausführungen zu Beginn der Nr. 1 sind die Hyperlogarithmen F_n und deren Linearkombinationen die einzigen möglichen eigentlichen logarithmischen Integrale n-ter Ordnung. Satz 2 liefert damit den

Hilfssatz. *Ein eigentliches logarithmisches Integral n-ter Ordnung besitzt höchstens logarithmische Singularitäten n-ter Art.*

Damit beweisen wir

Satz 3. $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ *ist ein eigentliches logarithmisches Integral n-ter Ordnung.*

Beweis. (Vollständige Induktion)

Bekanntlich ist der Logarithmus nicht auf rationale Funktionen zurückführbar und damit ein eigentliches logarithmisches Integral 1. Ordnung im Sinne von Definition 1. F_{n-1} sei eigentliches logarithmiches Integral $(n-1)$-ter Ordnung. F_n ist als Element von M_n ein Integral höchstens n-ter Ordnung. Da F_n nach Satz 2 und der Induktionsvoraussetzung eine logarithmische Singularität n-ter Art besitzt, ist F_n nach dem Hilfssatz ein eigentliches logarithmisches Integral n-ter Ordnung.

Die Relationen (7) ermöglichen einen vollständigen Überblick über das Verhalten der Funktion $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ auf ihrer Riemannschen Fläche. Sind nämlich $U_1, \dots, U_n$ einfache positive Umläufe um $a_1, \dots, a_n$, so gelangt man zum allgemeinen Blatt der Riemannschen Fläche, indem man $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ unter Berücksichtigung der Relationen (7) längs des allgemeinen Weges

$$U_n^{k_{ns}} \dots U_1^{k_{1s}} \dots U_n^{k_{n1}} \dots U_1^{k_{11}}, \quad k_{ij} \text{ ganze Zahlen,}$$

fortsetzt, wobei zu beachten ist, daß die gemäß (7) hinzukommenden Umlaufsbeiträge ihrerseits an einigen Stellen $a_1, \ldots, a_n$ verzweigt sind und bei weiterer Fortsetzung selbst zu neuen Umlaufsbeiträgen Anlaß geben.

Die Riemannschen Flächen der Polylogarithmen wurden auf diese Weise in [14] und [15] beschrieben.

3. Strukturuntersuchung von M_n

Oft ist es beim Operieren in M_n nur erforderlich, diejenigen Anteile der Funktionen zu kennen, die eigentliche logarithmische Integrale n-ter Ordnung sind, während die Anteile niedrigerer Ordnung erst in zweiter Linie interessieren. Daher ist es angebracht, den Quotientenraum $E_n = M_n/M_{n-1}$ zu betrachten. E_n besteht aus allen Restklassen

$$\hat{f} = f + M_{n-1} = \{f + g : g \in M_{n-1}\}$$

mit $f \in M_n$. Ist f bereits ein Element von M_{n-1}, so ist $\hat{f} = 0$, d. h. die Elemente von M_{n-1} gehören zur Restklasse 0. Nach (3) liegen $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$ und $F_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{matrix}\middle| z\right)$ stets in derselben Restklasse nach M_{n-1}. Diese Restklasse wird also allein durch $a_1, \ldots, a_n$ bestimmt. Daher ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 3. $F_n(a_1, \ldots, a_n; z) = \hat{F}_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\middle| z\right)$.

Da E_n ein linearer Vektorraum ist, muß E_n zu einem finiten Koordinatenraum $\varphi_d(K)$ isomorph sein. (Siehe z.B. G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Kap. 2, Springer-Verlag, 1960) Diese grundlegende Isomorphie soll jetzt hergestellt werden, was durch Vermittlung der logarithmischen Singularitäten gelingt.

$\hat{f} \neq 0$ sei eine Restklasse aus E_n, f_0 ein fester Vertreter von $\hat{f}$. a sei eine logarithmische Singularität n-ter Art von f_0 mit dem Umlaufsbeitrag φ_0. Ein beliebiges Element $f \in \hat{f}$ hat die Darstellung $f = f_0 + g$ mit $g \in M_{n-1}$. Da $g \in M_{n-1}$ ist, kann a nach dem Hilfssatz der vorigen Nr. höchstens eine logarithmische Singularität $(n-1)$-ter Art von g sein, d.h. der Umlaufsbeitrag γ von g bei a liegt sicher in M_{n-2}. Also ist der Umlaufsbeitrag von f bei a gegeben durch

$$\varphi = \varphi_0 + \gamma \quad \text{mit} \quad \varphi_0 \in M_{n-1},\ \gamma \in M_{n-2}.$$

Durchläuft f die ganze Restklasse $\hat{f}$, so liegt der Umlaufsbeitrag bei a stets in der Restklasse $\hat{\varphi} \in E_{n-1}$. Daher ist es sinnvoll, der *Restklasse* $\hat{f} \in E_n$ die logarithmische Singularität n-ter Art a mit dem „Umlaufsbeitrag" $\hat{\varphi} \in E_{n-1}$ zuzuordnen. Weiter wird definiert: Ist b eine logarithmische Singularität $(n-1)$-ter Art von $\hat{\varphi}$, wobei $\hat{\varphi}$ Umlaufsbeitrag von $\hat{f} \in E_{n-1}$ ist, so soll b eine logarithmische Singularität $(n-1)$-ter Art von $\hat{f}$ genannt werden. Analog sind die Singularitäten niederer Art definiert.

Wenn $\hat{f} \in E_n$ die Singularitäten $a_1, \ldots, a_k$ n-ter Art mit den entsprechenden Umlaufsbeiträgen $2\pi i\, \hat{\varphi}_1, \ldots, 2\pi i \hat{\varphi}_k$ $(\in E_{n-1})$ besitzt, so bilden wir ein Symbol $\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_k \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \end{matrix}\right)$ und treffen die Zuordnung

(9) $$\hat{f} \to \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_k \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \end{matrix}\right)$$

In diesen Symbolen dienen die a_i nur als Indizes zur Markierung der Komponenten. Gilt

$$\hat{f} \to \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots, a_k \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l+1}, \ldots, \hat{\varphi}_k \end{pmatrix}, \quad \hat{g} \to \begin{pmatrix} a_{l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m \\ \hat{\psi}_{l+1}, \ldots, \hat{\psi}_k, \hat{\psi}_{k+1}, \ldots, \hat{\psi}_m \end{pmatrix}$$

so ist, wenn $a_i \neq a_j$

$$\widehat{f+g} \to \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, & \ldots, & a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l+1} + \hat{\psi}_{l+1}, & \ldots, & \hat{\varphi}_k + \hat{\psi}_k, \hat{\psi}_{k+1}, \ldots, \hat{\psi}_m \end{pmatrix}$$

Selbstverständlich ist mit (9) auch für komplexes α die Zuordnung richtig:

$$\alpha\hat{f} \to \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_k \\ \alpha\hat{\varphi}_1, \ldots, \alpha\hat{\varphi}_k \end{pmatrix}$$

Daher bildet die Gesamtheit S_n der bei (9) entstehenden Symbole einen linearen Vektorraum. Da die Zuordnung eindeutig und relationentreu ist, ist S_n homomorphes Bild von E_n.

Satz 4. *Die Zuordnung* (9) *bewirkt einen Isomorphismus von E_n auf S_n.*

Beweis. $\hat{f}$ und $\hat{g}$ mögen beide demselben Vektor $\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_k \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \end{pmatrix}$ entsprechen. Dann gilt wegen der Relationentreue

$$\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} \to \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_k \\ 0, \ldots, 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\hat{h}$ ist diejenige Restklasse aus E_n, die keine einzige logarithmische Singularität n-ter Art besitzt. Dann muß sie die Restklasse 0 sein, d.h. $\hat{f} = \hat{g}$, d.h. (9) ist ein Isomorphismus.

Zur Klärung der Struktur von S_n benötigen wir einen Satz über die Existenz einer Funktion mit vorgschriebenem Umlaufsverhalten

Satz 5. Zu jedem Vektor $\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_k \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \end{pmatrix}$ mit beliebigem endlichen k, beliebigen komplexen Stellen a_i und beliebigen Restklassen $\hat{\varphi}_i \in E_{n-1}$ gibt es stets genau ein $\hat{f} \in E_n$, dem bei der Zuordnung (9) der Vektor $\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_k \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \end{pmatrix}$ entspricht.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es Restklassen $\hat{f}_i$ gibt die bei (9) zu $\begin{pmatrix} a_i \\ \hat{\varphi}_i \end{pmatrix}$ führen. Wegen der Isomorphie der Zuordnung (9) ist nämlich die in Satz 5 behauptete Restklasse $\hat{f}$ die Summe $\hat{f}_1 + \ldots + \hat{f}_k$. Nach Satz 3 kann man sich darauf beschränken, daß ein Vektor $\begin{pmatrix} a \\ F_{n-1}(b_1, \ldots, b_{n-1}; z) \end{pmatrix}$ gegeben ist. Nach Satz 2 ist $F_n(a, b_1, \ldots, b_n; z)$ eine Restklasse, der gemäß (9) der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ F_{n-1}(b_1, \ldots, b_{n-1}; z) \end{pmatrix}$ entspricht. Die eindeutige Bestimmtheit dieser Restklasse folgt genau wie beim Beweis dafür, daß (9) einen Isomorphismus bewirkt.

Folgerung: Es gibt stets logarithmische Integrale, die genau an vorgeschriebenen Stellen vorgeschriebene logarithmische Singularitäten (d.h. vorgeschriebenes Umlaufsverhalten) besitzen.

Nach diesem Satz kann jede Stelle a der komplexen Ebene als Singularität eines Elements $\hat{f} \in E_n$ mit einem beliebigen Umlaufsbeitrag $\hat{\varphi} \in E_{n-1}$ auftreten. S_n besteht daher aus allen Symbolen der Form $\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_m \\ \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_m \end{pmatrix}$, wobei $a_1, \ldots, a_m$ beliebig ausgewählte Stellen der komplexen Ebene mit beliebigem endlichen m beliebigen $\hat{\varphi}_i \in E_{n-1}$ bedeuten. Daher ist S_n nichts weiter als das finite kartesische Produkt

$$S_n = (E_{n-1}^K)_{finit}$$

d.h. derjenige Teilraum des kartesischen Produkts E_{n-1}^K, dessen Vektoren nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten besitzen. Wir haben damit den wichtigen

Satz 6. *Es ist*

$$E_n \cong (E_{n-1}^K)_{finit}. \tag{10}$$

Dieser Satz zeigt, wie die Struktur von E_n durch die Struktur von E_{n-1} beschrieben werden kann.

Es liegt nahe, den durch (10) gegebenen Isomorphismus zu iterieren, wodurch man zu folgendem Ergebnis gelangt:

Satz 7. *Es ist*

$$E_n \cong (E_{n-m}^{(K^m)})_{finit} \tag{11}$$

und speziell für $m = n$

$$E_n \simeq (K^{(K^n)})_{finit} = \varphi_c(K) \tag{12}$$

wobei K^m *das m-fache kartesische Produkt von K mit sich selbst und c die Kardinalzahl von K bedeutet.*

Damit ist die gewünschte Isomorphie zu einem finiten Koordinatenraum hergestellt. (12) bedeutet ausführlich: Der Klasse $\hat{f} \in E_n$ entspricht ein Vektor aus $\varphi_c(K)$, dessen „Komponentennummern" geordnete n-Tupel komplexer Zahlen sind. Dabei hat die Komponente mit der „Nummer" $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann den Wert $\alpha \neq 0$, wenn

(1.) a_1 eine Singularität von $\hat{f}$ mit dem Umlaufsbeitrag $\hat{\varphi}(\in E_{n-1})$

(2.) a_2 eine Singularität von $\hat{\varphi}$ mit dem Umlaufsbeitrag $\hat{\chi}(\in E_{n-2})$

$\vdots$

$(n-1.)$ a_{n-1} eine Singularität von ... mit dem Umlaufsbeitrag $\hat{\omega}(\in E_1)$

$(n.)$ a_n eine Singularität von $\hat{\omega}$ mit dem Umlaufsbeitrag $\alpha(\in K)$.

Eine einfache Folgerung aus Satz 7 ist

Satz 8. Die Klassen der Hyperlogarithmen n-ter Ordnung bilden eine Basis von E_n.

Beweis. Dem Hyperlogarithmus $F_n(a_1, \ldots, a_n; z)$ entspricht nach Satz 7 der Vektor $\begin{pmatrix} (a_1, \ldots, a_n) \\ 1 \end{pmatrix}$, welcher Basisvektor von $\varphi_c(K)$ ist. Die Gesamtheit der Hyperlogarithmen n-ter Ordnung entspricht daher eineindeutig einer Basis von $\varphi_c(K)$. Also bilden die Klassen der Hyperlogarithmen n-ter Ordnung eine Basis von E_n.

4. Verallgemeinerung der Eulerschen Relation des Dilogarithmhus

Von L. Euler ([5]) stammt u.a. folgende Gleichung für den Dilogarithmus $L_2(z)$

$$L_2(z)+L_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \log z \log(1-z), \tag{13}$$

die ein Produkt zweier Logarithmen durch eine geeignete Linearkombination von Dilogarithmen auszudrücken gestattet. Diese Relation wird durch den folgenden Satz verallgemeinert.

Satz 9. *Das Produkt zweier Hyperlogarithmen der Ordnungen n_1 und n_2 ist ein eigentliches logarithmisches Integral der Ordnung $n=n_1+n_2$, und es gilt die Formel*

$$F_{n_1}(a_1, \ldots, a_{n_1}; z) F_{n_2}(a_{n_1+1}, \ldots, a_n; z) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in P_{n_1,n}} F_n(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}; z), \tag{14}$$

wobei die Summation über alle Permutationen der Menge $P_{n_1,n}$ zu erstrecken ist. $P_{n_1,n}$ enthält dabei sämtliche Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$, bei denen die Zahlen $1, \ldots, n_1$ und die Zahlen $n_1+1, \ldots, n$ jeweils in der natürlichen Reihenfolge vorkommen.

Beweis. (Vollständige Induktion).

1.) $n=2$. Hier kommt nur $n_1=n_2=1$ in Frage. Es sei

$$f(z) = F_1\left(\begin{matrix}a_1\\b_1\end{matrix}\middle| z\right) \cdot F_1\left(\begin{matrix}a_2\\b_2\end{matrix}\middle| z\right).$$

Bei Anwendung von (9) entsteht die Zuordnung

$$f(z) \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ F_1\left(\begin{matrix}a_2\\b_2\end{matrix}\middle| z\right) & F_1\left(\begin{matrix}a_1\\b_1\end{matrix}\middle| z\right) \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 5 ist $g(z)=F_2(a_1, a_2; z)+F_2(a_2, a_1; z)$ eine Klasse aus E_2, der bei (9) der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ F_1(a_2; z) & F_1(a_1; z) \end{pmatrix}$$

entspricht. Daher besitzt die Funktion

$$F_2\left(\begin{matrix}a_1, a_2\\b_1, b_2\end{matrix}\middle| z\right) + F_2\left(\begin{matrix}a_2, a_1\\b_2, b_1\end{matrix}\middle| z\right) - F_1\left(\begin{matrix}a_1\\b_1\end{matrix}\middle| z\right) \cdot F_2\left(\begin{matrix}a_2\\b_2\end{matrix}\middle| z\right)$$

höchstens logarithmische Singularitäten 1. Art. Nach der Folgerung aus Satz 5 gibt es ein logarithmisches Integral 1. Ordnung ε_1 derart, daß die Funktion

$$F_2\left(\begin{matrix}a_1, a_2\\b_1, b_2\end{matrix}\middle| z\right) + F_2\left(\begin{matrix}a_2, a_1\\b_2, b_1\end{matrix}\middle| z\right) - F_1\left(\begin{matrix}a_1\\b_1\end{matrix}\middle| z\right) \cdot F_1\left(\begin{matrix}a_2\\b_2\end{matrix}\middle| z\right) - \varepsilon_1$$

überall in der z-Ebene unverzweigt ist, so daß sie schon in $K(z)$ liegt. Da diese

Funktion außerdem nach Satz 1 überall geringeres als polartiges Wachstum aufweist, ist sie eine Konstante:

$$F_2\left(\begin{matrix}a_1, a_2\\ b_1, b_2\end{matrix}\middle| z\right) + F_2\left(\begin{matrix}a_2, a_1\\ b_2, b_1\end{matrix}\middle| z\right) = F_1\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle| z\right)\cdot F_1\left(\begin{matrix}a_2\\ b_2\end{matrix}\middle| z\right) + \varepsilon_1.$$

Beim Übergang zu den Restklassen modulo M_1 entsteht daraus

$$F_2(a_1, a_2; z) + F_2(a_2, a_1; z) = F_1(a_1; z)F_1(a_2; z). \tag{15}$$

2.) Der Induktionsschluß verläuft ganz nach dem Vorbild des Induktionsbeginns, so daß auf seine mit großer Schreibarbeit verbundene Ausführung verzichtet weden kann.

Die Formeln (14) können auf zweierlei Weise gedeutet werden. Einerseits besagen sie, daß das Produkt zweier Hyperlogarithmen der Ordnungen n_1 und n_2 ein Element aus $E_{n_1+n_2}$ ist. Andererseits drücken sie aus, daß eine passende Symmetrisierung der Singularitäten $a_1, \ldots, a_n$ des Hyperlogarithmus $F_n(a_1, \ldots, a_n; z)$ zurückfällt auf ein Produkt von Hyperlogarithmen niederer Ordnungen.

(14) kann selbstverständlich auf Produkte von mehr als zwei Faktoren ausgedehnt werden. Es gelten dann genau die entsprechenden Relationen der Form

$$F_{n_1}(a_1, \ldots, a_{n_1}; z) \ldots F_{n_k}(\ldots a_n; z) = \sum_P F_n(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}; z) \tag{16}$$

mit $n_1 + \ldots + n_k = n$ und analogen Summationsbedingungen. In E_n gibt es $p(n)$ verschiedenen Typen von solchen Produkten, wobei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n bedeutet. Dies gibt Anlaß zur

Definition 4. Integrale n-ter Ordnung der Form $F_{n_1} \cdot \ldots \cdot F_{n_k}$ $(n_1 + \ldots + n_k = n)$ sollen Funktionen vom Typ $\langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ genannt werden.

Die einfachste der Beziehungen (16) ist die Gleichung (15). Der Vergleich von (15) mit (13) zeigt die inhaltliche Übereinstimmung beider Relationen, wenn man beachtet, daß die in (15) vorhandene Permutation der singulären Stellen a_1 und a_2 in (13) durch das Argument $1-z$ bewirkt wird, wodurch die beiden singulären Stellen 0 und 1 von $L_2(z)$ vertauscht werden. Daher lassen sich die Relationen (16) als die natürlichen Verallgemeinerungen der Eulerschen Relation (13) ansprechen.

5. Verallgemeinerte Polylogarithmen

Die Polylogarithmen haben sich hinsichtlich ihrer Entstehungsweise durch wiederholte Integration rationaler Funktionen als spezielle Hyperlogarithmen erwiesen (2). Die Anwendung von Satz 2 auf diesen Spezialfall liefert das Ergebnis: $L_n(z)$ hat im Hauptblatt nur eine einzige im Endlichen liegende Singularität, nämlich $z=1$, mit dem Umlaufsbeitrag $-\dfrac{2\pi i}{(n-1)!}(\log z)^{n-1}$, was sich aus (7) durch Grenzübergang ergibt. (Eine ausführliche Untersuchung der Vieldeutigkeitsstruktur der Polylogarithmen findet sich in [15].)

Im Hinblick auf das Verzweigungsverhalten der Polylogarithmen liegt es nahe, in Verallgemeinerung derselben solche Funktionen zu betrachten, die an einer einzigen Stelle im Endlichen das Umlaufsverhalten

$$2\pi i \log(z-c_1)\log(z-c_2)\ldots\log(z-c_{n-1})$$

aufweisen. Die Existenz solcher Funktionen ist gesichert. Denn nach der Folgerung aus dem Satz 5 gibt es Funktionen, die an einer Stelle a_1 als Umlaufsbeitrag eine Funktion vom Typ $\langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ mit $n_1+\ldots+n_k=n-1$ besitzen. Nach Satz 5 ist die Restklasse dieser Funktionen modulo M_{n-1} in M_n, die wir mit $\{n_1, \ldots, n_k\}$ bezeichnen wollen, eindeutig bestimmt. Die von uns ins Auge gefaßten Funktionen vom Typ $\{1, 1, \ldots, 1\}$, die im wesentlichen bereits in [15] als *verallgemeinerte Polylogarithmen* eingeführt wurden, sollen wegen späterer Verwendung eine besondere Bezeichnung erhalten.

Definition 5. Die Restklasse modulo M_{n-1} in M_n derjenigen Funktionen, die an einer Stelle a_0 den Umlaufsbeitrag $2\pi i\log(z-a_1)\ldots\log(z-a_{n-1})$ aufweisen und sonst an keiner weiteren endlichen Stelle eine logarithmische Singularität n-ter Ordnung haben, werde mit $G_n(a_1, \ldots, a_{n-1}; a_0; z)$ bezeichnet.

Benutzt man (16) für die Partition $n-1=1+1+\ldots+1$, so erhält man

$$F_1(a_1;z)\cdot\ldots\cdot F_1(a_{n-1};z)=\sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})} F_{n-1}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}; z),$$

wobei über alle Permutationen der Zahlen 1 bis $n-1$ summiert wird. Nach Satz 5 wird damit

$$G_n(a_1, \ldots, a_{n-1}; a_0; z)=\sum_{(i_1,\ldots,i_{n-1})} F_n(a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}; z). \tag{17}$$

6. Funktionalgleichungen der Hyperlogarithmen

Die allgemeinste lineare Funktionalgleichung mit rationalen Argumenten im Bereich der logarithmischen Integrale kann wegen Satz 8 als Funktionalgleichung der Hyperlogarithmen aufgefaßt werden. Eine solche Relation wird bei Betrachtung in E_n zu einer homogenen Gleichung der Form

$$c_1F_n(a_{11}, \ldots, a_{1n};\ f_1(z))+\ldots+c_sF_n(a_{s1}, \ldots, a_{sn};\ f_s(z))=0 \tag{18}$$

mit rationalen Funktionen $f_1(z), \ldots, f_s(z)$. Die Funktionalgleichungen der Form (18) beherrscht man alle, wenn man die Basisdarstellung von $F_n(a_1, \ldots, a_n; f(z))$ mit rationalem $f(z)$ in M_n kennt. Diese wird durch Satz 7 geliefert. Dazu bemerken wir, daß $F_n(a_1, \ldots, a_n; f(z))$ überall dort Singularitäten n-ter Art besitzt, wo $f(z)=a_1$ oder $f(z)=\infty$ wird. Diese Stellen mögen $b_{11}, \ldots, b_{1p_1}$ heißen. (Für die Angabe der Basisdarstellung erweist es sich als günsig, die Polstellen von den a_1-Stellen nicht getrennt zu behandeln.) Dabei ist zu beachten, daß die b_{1j} mit gewissen Vielfachheiten α_{1j} auftreten können. Weiterhin seien $b_{21}, \ldots, b_{2p_2}$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2p_2}$ die a_2-Stellen und Pole von $f(z)$, d.h. die Singularitäten $(n-1)$-ter Art von $F_n(a_1, \ldots, a_n; f(z))$. Schließlich seien $b_{n1}, \ldots, b_{np_n}$ mit den Vielfachheiten $\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{np_n}$ die a_n-Stellen und Pole von $f(z)$, d.h. die Singularitäten 1. Art von F_n. Zu beachten ist, daß wir die Vielfachheit einer Polstelle als negative Zahl definieren!