Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы S_3 симметрической группы $\mathscr{S}_{p^3}$

К. БУЗАШИ (Дебрецен)*

Одной из важных задач теории групп является задача описания всех нормальных делителей заданной группы.

В работах Л. Калужнина [3], [4] описаны все характеристические подгруппы силовской p-подгруппы симметрической гуппы $\mathscr{S}_{p^n}$ (p-простое число). В работах А. И. Вейра [5], [7] описываются характеристические подгруппы силовской p-подгруппы классических матричных групп над конечными полями.

Среди нормальных делителей конечной группы особую роль играют ядра неприводимых комплексных представлений, так как любой нормальный делитель группы может быть представлен в виде пересечения некоторых из этих ядер. В работе С. Д. Бермана [1] указан общий алгоритм для построения ядер неприводимых представлений произвольной конечной нильпотентной группы. В его же работе [2] этот метод применяется для построения всех ядер неприводимых представлений для группы G' всех треугольных матриц порядка n над простым полем, что, в свою счередь, позволяет найти всевозможные их пересечения, то есть все нормальные делители группы G'.

Силовские p-подгруппы S_n симметрической группы $\mathscr{S}_{p^n}$, наряду с группой треугольных матриц, являются универсальными p-подгруппами, поэтому большой интерес представляет описание всех нормальных делителей этой группы. Описание ядер всех пеприводимых представлений силовской p-подгруппы S_n симметрической группы $\mathscr{S}_{p^n}$ является важным средством для нахождения всех нормальных делителей группы в виде всевозможных пересечений этих ядер.

Настоящая работа решает поставленную задачу для группы $\mathscr{S}_{p^n}$ в случае $n \leqq 3$. В работе используется упомянутый высше алгоритм работы [1] и с помощью этого метода даётся описание ядер всех неприводимых комплексных представлений силовской p-подгруппы симметрической группы $\mathscr{S}_{p^n}$ при $n \leqq 3$.

*) K. Buzási (Debrecen).

§ 2.

Некоторые замечания о структуре сплетения трёх циклических групп простого порядка

В этом параграфе даются некоторые соотношения между базисными элементами рассматриваемого класса конечных групп. Исследуются взаимные коммутаторы элементов группы и даются очень важные для дальнейших рассуждений формулы и факты.

Пусть G является силовской p-подгруппой симметрической группы $\mathscr{S}_3$, то есть является сплетением трёх циклических групп простого порядка p, и задаётся определяющими соотношениями

$$a_{11}^p = e, \dots, a_{1p}^p = e, \quad a_{21}^p = e, \dots, a_{2p}^p = e, \dots, a_{p1}^p = \\ = e, \dots, a_{pp}^p = e, \quad b_1^p = e, \dots, b_p^p = e, \quad c^p = e$$

$$(2.1) \qquad b_i^{-1} a_{kl} b_i = \begin{cases} a_{kl}, & \text{если } i \neq k; \\ a_{kl+1}, & \text{если } i = k; \text{ (число } l \text{ приводистя по mod } p), \end{cases}$$

$$c^{-1} a_{kl} c = a_{k+1,l} \qquad (l = 1, \dots, p;\ k \text{ приводится по mod } p),$$

$$c^{-1} b_i c = b_{i+1} \qquad (i \text{ приводится по mod } p).$$

Введём новый базис, предложенный Вейром в работе [2]:
Очевидно, элемент $x = cb_1$ имеет порядок p^2. Определим элементы

$$y_1 = a_{11}; \quad y_i = x^{-1} y_{i-1} x \qquad (i = 2, 3, \dots, p^2).$$

Тогда элементы

$$(2.2) \qquad \alpha_1 = y_1; \quad \alpha_i = (x, \alpha_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, p^2)$$

образуют базис подгруппы $A = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{pp}\}$, а элементы

$$\beta_1 = b_1; \quad \beta_i = (x, \beta_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, p)$$

— базис подгруппы $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$. Значит вся группа G является полупрямым произведением

$$G = A \cdot B \cdot \{x\}.$$

В обозначениях (2. 1) и (2. 2) группа G имеет следующий центральный ряд [2]:

$$(2.3) \qquad \{\alpha_{p^2}\} \subset \{\alpha_{p^2}, \alpha_{p^2-1}\} \subset \dots \subset \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_{p+1}\} \subset \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_p\} \cdot \{\beta_p\} \subset \\ \dots \subset \{\alpha_{p^2}, \dots, \alpha_2\} \cdot \{\beta_p, \dots \beta_2\}.$$

Он является и верхним, и нижним.

Положим

$$A_i = \{\alpha_{p^2}, \ldots, \alpha_i\}; \quad B_j = \{\beta_p, \ldots, \beta_j\}; \qquad (i = 2, \ldots, p^2)$$
$$A = \{\alpha_{p^2}, \ldots, \alpha_1\}; \quad B = \{\beta_p, \ldots, \beta_1\} \qquad (j = 2, \ldots, p)$$

Тогда центральный ряд (2. 3) можно записать в виде

$$A_{p^2} \subset A_{p^2-1} \subset \ldots \subset A_{p+1} \subset A_p \cdot B_p \subset A_{p-1} B_{p-1} \subset \ldots \subset A_2 B_2 \subset \subset A \cdot B \cdot \{x\} = G. \tag{2.4}$$

Между базисными элементами группы A имеют место следующие важные двойственные соотношения (эти соотношения не зависят от числа циклических групп, участвующих в сплетении, и поэтому теорему мы сформулируем и докажем в общем виде).

Теорема 1. *Пусть S_n-силовская p-подгруппа симметрической группы $\mathcal{S}_n$ и имеет место $S_{n+1} \cong A^{(n)} S_n$, где $A^{(n)}$ — элементарная абелевая группа порядка p^n. Пусть элемент $x \in A^{(n)}$ имеет порядок p^n, а $y_1, y_2, \ldots y_{p^n}$ такие элементы из $A^{(n)}$, что $y_i = x^{-1} y_{i-1} x$ $(i=2, \ldots, p^n)$. Тогда в обозначениях $\alpha_1 = y_1$, $\alpha_j = (x, \alpha_{j-1})$ $(j=2, 3, \ldots, p^n)$ имеют место двойственные формулы*

$$\alpha_i = \prod_{\nu=1}^{i} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}; \quad y_i = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n)$$

где $C_{i-1}^{\nu-1}$ — коэффициенты бинома Ньютона.

Доказательство. Докажем сначала первую формулу. Формула очевидна для $i=1$. Предположим, что она уже доказана для всех натуральных чисел, меньших i $(1 \leqq i \leqq p^n)$, и докажем для i. Имеем

$$\alpha_i = (x, \alpha_{i-1}) = x^{-1} \alpha_{i-1}^{-1} x \alpha_{i-1} = x^{-1} \left(\prod_{\nu=1}^{i-1} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \right)^{-1} x \alpha_{i-1} =$$
$$= \prod_{\nu=1}^{i-1} (x^{-1} \cdot y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \cdot x)^{-1} \cdot \alpha_{i-1} = \prod_{\nu=1}^{i-1} (y_{\nu+1}^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}})^{-1} \cdot \alpha_{i-1} =$$
$$= \prod_{\nu=2}^{i} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-2}} \cdot \prod_{\nu=1}^{i-1} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} = y_1 \cdot \prod_{\nu=2}^{i-1} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} [C_{i-2}^{\nu-2} + C_{i-2}^{\nu-1}]} \cdot y_i^{(-1)^{i-1}} =$$
$$= y_1 \cdot \prod_{\nu=2}^{i-1} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} \cdot y_i^{(-1)^{i-1}} = \prod_{\nu=1}^{i} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}.$$

В доказательстве мы пользовались определениями (2. 1), (2. 2) и известным свойством биномиальных коэффициентов

$$C_{i-2}^{\nu-2} + C_{i-2}^{\nu-1} = C_{i-1}^{\nu-1}.$$

Теперь докажем вторую формулу, пользуясь также индуктивным методом.

Формула верна для $i=1$. Тогда, используя предположение индукции, получим

$$y_i = x^{-1} y_{i-1} x = x^{-1} \prod_{\nu=1}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \cdot x = \prod_{\nu=1}^{i-1} x^{-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \cdot x =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{i-1} (x^{-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} x \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}}) \cdot \prod_{\nu=1}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{i-1} (x, \alpha_\nu^{-1})^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} = \prod_{\nu=1}^{i-1} \alpha_{\nu+1}^{-(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} \prod_{\nu=1}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} =$$

$$= \prod_{\nu=2}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-2}} \cdot \prod_{\nu=1}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-2}^{\nu-1}} = \alpha_1 \cdot \left(\prod_{\nu=2}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} [C_{i-2}^{\nu-2} + C_{i-2}^{\nu-1}]} \right) \cdot \alpha_i^{(-1)^{i-1}} =$$

$$= \alpha_1 \prod_{\nu=2}^{i-1} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} \cdot \alpha_i^{(-1)^{i-1}} = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что условия теоремы всегда выполняются, так как в S_n всегда найдётся такой элемент x, который имеет порядок p^n, а в $A^{(n)}$ всегда можно подобрать элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяющие условиям теоремы.

Таким образом, для группы G имеют место в обозначениях (2. 2) следующие формулы:

$$\text{(2. 5)} \qquad \begin{aligned} &\alpha_i = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}; \quad y_i = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^2) \\ &\beta_j = \prod_{\nu=1}^{j} b_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{j-1}^{\nu-1}}; \quad b_j = \prod_{\nu=1}^{j} \beta_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{j-1}^{\nu-1}}; \qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим некоторые свойства взаимных коммутаторов элементов группы G.

Лемма 2. $(b_i, \alpha_m) \in \{\alpha_{p^2}, \alpha_{p^2-1}, \ldots, \alpha_{p+1}\}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p$ *и* $1 \leqq m \leqq p$.

Доказательство. Ввиду (2. 5),

$$(b_i, \alpha_m) = \left(b_i, \prod_{\nu=1}^{m} y_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{m-1}^{\nu-1}} \right) = (y_i \cdot y_{p+i}^{-1})^{(-1)^{i-1} C_{m-1}^{i-1}},$$

так как имеет место очевидная формула

$$b_i^{-1} \cdot y_{kp+r} \cdot b_i = \begin{cases} e, & r \neq i \\ y_{(k+1)p+r}, & r = i, \end{cases}$$

а в запись α_m при $1 \leqq m \leqq p$ входят только степени элементов $y_1\ y_2, \ldots, y_m$. Тогда

$$y_i \cdot y_{p+i}^{-1} = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{p+i} \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{p+i-1}^{\nu-1}} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1} [C_{i-1}^{\nu-1} - C_{p+i-1}^{\nu-1}]} \cdot \prod_{\nu=i+1}^{p} \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{p+i-1}^{\nu-1}} \cdot \prod_{\nu=p+1}^{p+i} \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{p+i-1}^{\nu-1}}.$$

Положим

$$K_1 = \prod_{\nu=1}^{i} \alpha_\nu^{(-1)^{\nu-1}[C_{i-1}^{\nu-1} - C_{p+i-1}^{\nu-1}]}; \quad K_2 = \prod_{\nu=i+1}^{p} \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{p+i-1}^{\nu-1}};$$

$$K_3 = \prod_{\nu=p+1}^{p+i} \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{p+i-1}^{\nu-1}}.$$

Имеем

$$C_{i-1}^{\nu-1} - C_{p+i-1}^{\nu-1} = \frac{(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot[i-(\nu-1)]}{(\nu-1)!} - \frac{[p+(i-1)]\cdot\ldots\cdot[p+(i-\nu+1)]}{(\nu-1)!} =$$

$$= \frac{-p^{(\nu-1)} - p^{\nu-2}R_{\nu-2} - p^{\nu-3}\cdot R_{\nu-3} - \ldots - pR_1}{(\nu-1)!} = \frac{pR}{(\nu-1)!} \equiv 0 \pmod p,$$

так как $\nu \leqq p$ при $i \leqq p$, поэтому показатель элемента α_ν делится на p. Точно так же

$$C_{p+i-1}^{\nu-1} = \frac{[p+(i-1)]\cdot[p+(i-2)]\cdot\ldots\cdot[p+(i-\nu+1)]}{(\nu-1)!},$$

ибо при $p \geqq \nu > i$ в числителе содержится более чем $i-1$ множителей, значит один из них должен совпадать с p, а $\nu \leqq p$. Следовательно, элемент

$$y_i \cdot y_{p+i}^{-1} = \prod_{\nu=p+1}^{p+i} \alpha_\nu^{-(-1)^{\nu-1} C_{p+i-1}^{\nu-1}}$$

принадлежит прямому произведению циклических подгрупп, порождённых элементами $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_{p^2}$. Лемма 2. доказана.

Замечание: *Для элемента α_m, где $m > p$, лемма 2 также справедлива.*

Это непосредственно вытекает из строения центрального ряда (2. 4) группы G. Действительно, для любого $m > p$ из того, что A_m/A_{m+1} является центром фактогруппы G/A_{m+1}, следует, что $(b_i, \alpha_m) \in A_{m+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p$.

Следствие 3. $(\beta_i, \alpha_m) \in A_{p+1}$ для всех $1 \leqq i, m \leqq p$.

Доказательство. Рассмотрим элемент

$$(b_\nu b_\mu, \alpha_m) = b_\mu^{-1}(b_\nu, \alpha_m) b_\mu (b_\mu, \alpha_m) = \left(b_\mu, (b_\nu, \alpha_m)^{-1}\right)\cdot(b_\nu, \alpha_m)\cdot(b_\mu, \alpha_m).$$

Так как α_i принадлежит абелевому нормальному делителю A, то

$$(b_\mu, \alpha_i \cdot \alpha_j) = (b_\mu, \alpha_i)\cdot(b_\mu, \alpha_j).$$

По Лемме 2.

$$(b_\nu, \alpha_m) \in A_{p+1},$$

и значит

$$(b_\nu, \alpha_m)^{-1} = \alpha_{p^2}^{k_{p^2}} \cdot \ldots \cdot \alpha_{p+1}^{k_{p+1}}.$$

Следовательно

$$\left(b_\mu, (b_\nu, \alpha_m)^{-1}\right) = (b_\mu, \alpha_{p^2}^{k_{p^2}} \cdot \ldots \cdot \alpha_{p+1}^{k_{p+1}}) = (b_\mu, \alpha_{p^2}^{k_{p^2}}) \cdot \ldots \cdot (b_\mu, \alpha_{p+1}^{k_{p+1}}) =$$

$$= (b_\mu, \alpha_{p^2})^{k_{p^2}} \cdot \ldots \cdot (b_\mu, \alpha_{p+1})^{k_{p+1}},$$

причём каждый из взаимных коммутаторов, в силу замечания к лемме 2, лежит в A_{p+1}.

Коммутаторы (b_ν, α_m) и (b_μ, α_m) по лемме 2 лежат в A_{p+1}. Значит $(b_\nu \cdot b_\mu, \alpha_m) \in A_{p+1}$ для всех $\nu, m = 1, 2, \ldots, p$.

Применяя этот результат к (β_i, α_m), имеем:

$$(\beta_i, \alpha_m) = \left(\prod_{\nu=1}^{i} b_\nu^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}}, \alpha_m \right) \in A_{p+1}.$$

Следствие 3. доказано.

Следствие 4. $(\beta_i, \alpha_m) \in A_{p+1}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p$ *и* $1 \leqq m \leqq p^2$.

Доказательство очевидно, так как ввиду следствия 3 можно рассмотреть только случай $p < m \leqq p^2$. Но это уже следует из строения центрального ряда (2. 4) группы G так же, как в доказательстве замечания к лемме 2.

Следствие 5. $(\beta_i^\nu, \alpha_m) \in A_{p+1}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq m \leqq p^2$ *и* $1 \leqq \nu < p$.

Доказательство. Применим метод индукции по ν. При $\nu = 1$, всилу следствия 4. утверждение верно. Предположим, что $(\beta_i^{\nu-1}, \alpha_m) \in A_{p+1}$.

Тогда

$$(\beta_i^\nu, \alpha_m) = (\beta_i \cdot \beta_i^{\nu-1}, \alpha_m) = \big(\beta_i^{\nu-1}(\alpha_m, \beta_i)\big) \cdot (\beta_i, \alpha_m) \cdot (\beta_i^{\nu-1}, \alpha_m).$$

Множитель (β_i, α_m) на основании следствия 4 принадлежит подгруппе A_{p+1}, а по предположению индукции $(\beta_i^{\nu-1}, \alpha_m) \in A_{p+1}$. Осталось показать, что $(\beta_i^{\nu-1}, (\alpha_m, \beta_i)) \in A_{p+1}$.

По следствию 4 $(\alpha_m, \beta_i) \in A_{p+1}$, и, значит

$$(\alpha_m, \beta_i) = \alpha_{p^2}^{\delta_{p^2}} \cdot \ldots \cdot \alpha_{p+1}^{\delta_{p+1}}.$$

Но $\alpha_j \in A_{p+1}$ $(j = p+1, \ldots, p^2)$, где A_{p+1} — абелев нормальный делитель группы G, поэтому

$$\big(\beta_i^{\nu-1}, (\alpha_m, \beta_i)\big) = (\beta_i^{\nu-1}, \alpha_{p^2}^{\delta_{p^2}}) \cdot \ldots \cdot (\beta_i^{\nu-1}, \alpha_{p+1}^{\delta_{p+1}}) = (\beta_i^{\nu-1}, \alpha_{p^2})^{\delta_{p^2}} \cdot \ldots \cdot (\beta_i^{\nu-1}, \alpha_{p+1})^{\delta_{p+1}},$$

где каждый сомножитель лежит уже в A_{p+1} по предположению индукции. Следствие 5 доказано.

Попутно нами доказано

Следствие 6. $(\beta_i^\nu, a) \in A_{p+1}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq \nu \leqq p$, $a \in A$.

Используя предыдущие утверждения, можно доказать следующую теорему, которая будет многократно применяться в дальнейших рассуждениях.

Теорема 7. $(b, a) \in A_{p+1}$ *для всех* $b \in B$, $a \in A$.

Доказательство. Элемент b можно представить в виде

$$b = \beta_p^{\mu_p} \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}} \cdot \ldots \cdot \beta_1^{\mu_1}.$$

Доказательство проведём методом индукции по числу множителей $b_i^{\mu_i}$ в выражении элемента b.

Имеем

$$(a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \beta_2^{\mu_2}) = (a, \beta_2^{\mu_2}) \cdot (a, \beta_1^{\mu_1}) \cdot \big((a, \beta_1^{\mu_1}), \beta_2^{\mu_2}\big).$$

По следствию 6., элементы $(a, \beta_2^{\mu_2})$ и $(a, \beta_1^{\mu_1})$ лежат в A_{p+1}, и, следовательно $((a, \beta_1^{\mu_1}), \beta_2^{\mu_2}) \in A_{p+1}$.

Предположим, что

$$(a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}}) \in A_{p+1}.$$

Тогда

$$(a, b) = (a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}} \cdot \beta_p^{\mu_p}) = (a, \beta_p^{\mu_p}) \cdot (\alpha, \beta_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}}) \cdot ((a, \beta_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{p-1}^{\mu_{p-1}}), \beta_p^{\mu_p}).$$

Элемент $(a, \beta_p^{\mu_p})$ по следствию 6 лежит в A_{p+1}; второй множитель по предположению индукции также лежит в A_{p+1}, и, снова применяя следствие 6., получим, что третий множитель принадлежит подгруппе A_{p+1}. Теорема доказана.

§ 3.

Линейные части характеров неприводимых представлений рассматриаемой группы G

В этом параграфе мы будем пользоваться обозначениями предыдущего параграфа. Найдём полную систему линейных частей характеров неприводимых представлений группы G. Вычисление характеров производится методом продолжения характеров ,предложенным С. Д. Берманом в работе [1].

Метод заключается в следующем. Пусть дана конечная нильпотентная группа G_1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — характеры центра Z группы G_1. Определим ядро H_i для каждого характера x_i $(i=1, 2, \ldots, r)$. Рассмотрим факторгруппу G_1/H_i по подгруппе H_i. Построим такую группу A_i, для которой факторгруппа A_i/H_i является центром факторгруппы G_1/H_i. Характер x_i линейно продолжим (в смысле [1]) в подгруппе A_i. Пусть таким продолжениями характера x_i в группе A_i являются характеры $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$.

Найдём ядро H_{ij} для каждого характера x_{ij} и построим такую группу A_{ij}, для которой факторгруппа A_{ij}/H_{ij} является центром факторгруппы G_1/H_{ij}, затем линейно продолжим характер x_{ij} в группе A_{ij}.

С полученными характерами потом поступим опять так же. И т. д. После конечного числа шагов получим все линейные части характеров комплексных представлений группы G_1.

В дальнейшем фразу „линейное продолжение'' характеров будем понимать в смысле работы [1].

Введём обозначения для характеров:

(k_j) будет означать характер подгруппы A_k, принимающий значение 1 на всех базисных элементах α_i $(i = k+1, k+2, \ldots, p^2)$ и значение ξ^j на элементе α_k (ξ — первообразный корень p-ой степени из единицы, $j = 0, 1, \ldots, p-1$).

(k_i, r_j) — характер подгруппы $A_k B_r$, принимающий значение 1 на всех α_m, β_n $(m = k+1, \ldots, p^2;\ n = r+1, \ldots, p)$, на α_k равный ξ^i, и ξ^j на β_r $(i, j = 0, 1, \ldots, p-1)$. $(k_j;^{\varrho_l} r_i)$ означает характер подгруппы

$$A_k \cdot B_r \cdot \left\{ \beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, \begin{matrix} \beta_{r-\sigma}^{\nu} \alpha_{k-\sigma} \text{ (при нечётном } \sigma) \\ \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^{\nu} \text{ (при чётном } \sigma) \end{matrix} \right\},$$

равный 1 на всех элементах α_m, β_n $(m = k+1, \ldots, p^2;\ n = r+1, \ldots, p)$,

$$\beta^{\nu}_{r-\mu}\alpha_{k-\mu}\left(\mu=1, 3, \ldots, \begin{matrix}\sigma-2\,(\text{нечётн. } \sigma)\\ \sigma-1\,(\text{чётное } \sigma)\end{matrix}\right),$$

$$\alpha_{k-\lambda}\beta^{\nu}_{r-\lambda}\left(\lambda=2,4, \ldots, \begin{matrix}\sigma-1, (\sigma-\text{нечётное})\\ \sigma, (\sigma-\text{чётное})\end{matrix}\right),$$

но на α_k; β_r равный ξ^j; ξ^i, на $\alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}$ — ξ^l (при чётном σ) и на $\beta^{\nu}_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma}$ — ξ^l (пру нечётном σ), где $i,j=1, 2, \ldots, p-1$; $l=0, 1, \ldots, p-1$.

$(k_i, r_j, 1_l)$ означает характер группы $A_k \cdot B_r \cdot \{x\}$, принимающий значение 1 на всех элементах α_m, β_n $(m = k+1, \ldots, p^2;\ n = r+1, \ldots, p)$, но принимающий значение ξ^i на α_k, значение ξ^j на β_r и значение ξ^l на x $(i, j, l = 0, 1, \ldots, p-1)$.

При этих обозначениях имеют место следующие факты:

Теорема 8. *Характер (k_0) подгруппы A_k имеет продолжения вида $(k-1_j)$ в подгруппе A_{k-1} для всех $p+1 < k \leqq p^2$ $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$.*

Доказательство, Ядром характера (k_0) является подгруппа A_k. Согласно (2. 4), центром факторгруппы G/A_k является фактогруппа A_{k-1}/A_k; поэтому подгруппой, в которой характер (k_0) может иметь продолжения, является подргуппа A_{k-1}. В этой подгруппе все продолжения характера (k_0) имеют вид $(k-1_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Теорема 9. *Характер (k_j) подгруппы A_k не имеет продолжения ни в одной подгруппе группы G, для всех $p+1 \leqq k \leqq p^2$ $(j = 1, 2, \ldots, p-1)$.*

Доказательство, Ядром характера (k_j) является подгруппа A_{k+1}, Так как, ввиду (2. 4), A_k/A_{k+1} является центром факторгруппы G/A_{k+1}, и подгруппой, в которой характер (k_j) может иметь продолжения, является только A_k, в которой характер (k_j) уже определён. Теорема доказана.

Теорема 10. *Характер $(p+1_0)$ подгруппы A_{p+1} имеет линейные продолжения (p_i, p_j) в подгруппе A_p, B_p $(i,j = 0, 1, \ldots, p-1)$.*

Доказательство. Ядром характера $(p+1_0)$ является подгруппа A_{p+1}. Поэтому подгруппой, в которой характер $(p+1_0)$ имеет линейные продолжения, является $A_p\ B_p$. В этой подгруппе все линейные продолжения характера $(p+1_0)$ имеют вид (p_i, p_j) $(i, j = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Теорема 11. *Характер вида (k_0, k_0) подгруппы A_kB_k имеет в качестве всех линейных продолжений в подгруппе $A_{k-1}B_{k-1}$ характеры типа $(k-1_i, k-1_j)$ $(i, j = 0, 1, \ldots, p-1)$ для всех $2 < k \leqq p$.*

Доказательство. Ядром характера (k_0, k_0) является подгруппа A_kB_k, поэтому, из строению центрального ряда (2. 4) вытекает, что подгруппой, в которой характер (k_0, k_0) может иметь линейные продолжения, является подгруппа $A_{k-1} \cdot B_{k-1}$. В этой подгруппе все линейные продолжения характера (k_0, k_0) имеют вид $(k-1_i, k-1_j)$ $(i, j = 0, 1, \ldots, p-1)$. Теорема доказана.

Теорема 12. *Все линейные продолжения характера* $(2_0, 2_0)$ *подгруппы* $A_2 \cdot B_2$ *в* G *имеют вид* $(1_i, 1_j, 1_l)$ $(i, j, l = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Доказательство: Ядром характера $(2_0, 2_0)$ является подгруппа $A_2 \cdot B_2$, поэтому, утверждение следует из строения центрального ряда (2. 4).

Теорема 13. *Характер вида* (k_0, r_j) *подгруппы* $A_k \cdot B_r$ *имеет в группе* $A_{k-1}B_r$ *в качестве всех линейных продолжений характеры типа* $(k-1_i, r_j)$ $(i = 0, \ldots, \ldots, p-1, j = 1, \ldots, p-1)$ *для всех* $1 < k \leqq p$, $1 \leqq r \leqq p$.

Доказательство. Ядром характера (k_0, r_j) является подгруппа $A_k B_{r+1} = R$. Рассмотрим факторгруппу G/R. Она порождается смежными классами

$$\alpha_{k-1} R, \alpha_{k-2} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_r R, \beta_{r-1} R, \ldots, \beta_1 R, xR.$$

Покажем, что $\alpha_{k-1}R$ принадлежит центру Z факторгруппы G/R. Действительно, $(\alpha_{k-1}, \alpha_m) = e$ для всех $m = 1, 2, \ldots, p^2$. Далее $(\alpha_{k-1}, \beta_n) \in A_{p+1} \subseteqq R$ для всех $n = 1, 2, \ldots, p$ и $1 < k \leqq p$ (по Теореме 7.), а $(x, \alpha_{k-1}) = \alpha_k \in A_k \subseteqq R$ по определению элементов α_i (2. 2).

Краме того $\beta_r R \in Z$, так как по Теореме 7., $(\beta_r, \alpha_m) \in A_{p+1} \subseteqq R$ для всех $m = 1, 2, \ldots, p^2$, и $(x, \beta_r) = \beta_{r+1} \in B_{r+1} \subseteqq R$.

Очевидно, другие смежные классы, порождающие факторгруппу G/R, не принадлежат центру Z, так как, например, $(x, \alpha_m) = \alpha_{m+1} \notin R$ для всех $1 \leqq m < k-1$, и $(x, \beta_n) = \beta_{n+1} \notin R$ для всех $1 \leqq n < r$.

Покажем, что никакое произведение этих смежных классов $(\neq e)$ не лежит в Z. В самом деле, для произвольного $(\neq e)$ элемента $\alpha_{k-2}^{\sigma_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \alpha_1^{\sigma_1} \in \{\alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_1\}$ (σ_i — произвольные целые числа, $i = 1, 2, \ldots, k-2$), имеем

$$(x, \alpha_{k-2}^{\sigma_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \alpha_1^{\sigma_1}) = \alpha_{k-1}^{\sigma_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \alpha_2^{\sigma_1} \notin R.$$

Точно так же можно показать, что $(x, \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \cdot \ldots \cdot \beta_1^{\delta_1}) \notin R$ для любого элемента $\beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \cdot \ldots \cdot \beta_1^{\delta_1} \neq e$.

Рассмотрим теперь произведение ba, где $b, a \neq e$,

$$a \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-2}\}, \quad b \in \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}\}.$$

Тогда

$$(x, ba) = (x, a) \cdot (x, b) \cdot ((x, b), a).$$

По теореме 7, множитель $((x, b), a) \in A_{p+1}$, где A_{p+1} — абелев нормальный делитель группы G. Поэтому найдётся такой элемент $a_{p+1} \in A_{p+1}$, что $(x, b) \cdot ((x, b), a) = a_{p+1}(x, b)$. Тогда

$$(x, ba) = a_{p+1}(x, a) \cdot (x, b).$$

Но $(x, b) \in \{\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_r\}$, и поэтому элемент (x, ba) не может принадлежать ядру $R = A_k B_{r+1}$.

Остаётся заметить, что произвольный элемент из G имеет вид $a_1 b_1 x$, но найдутся такие элементы a' и b' $(a_1, a' \in A, b_1, b' \in B)$, что $a_1 b_1 x = x a' b'$. Тогда

$$(x, a_1 b_1 x) = (x, x a' b') = (x, a' b').$$

Здесь выполняется только $a' \in A$, $b' \in B$. Однако можно записать $a' = a_2 a_3$ и $b' = b_2 b_3$, где

$$a_3 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-2}\}, \quad b_3 \in \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}\}.$$

Значит в выражении

$$a'b' = a_2 a_3 b_2 b_3 = a_3(a_2 b_2) b_3$$

элемент $a_2 b_2$ порождает смежный класс центра Z, следовательно, элемент $a'b'$ порождает смежный класс, принадлежащий Z тогда и только тогда, если $a_3 b_3 R \in Z$.

Таким образом, центром факторгруппы G/R является факторгруппа $A_{k-1} \cdot B_r / R$. Значит характер (k_0, r_j) линейно продолжается в подгруппе $A_{k-1} \cdot B_r$. Очевидно, все эти линейные продолжения имеют вид $(k-1_i, r_j)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots \ldots, p-1)$. Теорема доказана.

Теорема 14. *Характер типа (k_j, r_0) подгруппы $A_k \cdot B_r$ $(1 \leqq j < p)$ имеет в качестве всех линейных продолжений в подгруппе $A_k \cdot B_{r-1}$ характеры типа $(k_j, r-1_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ для всех $1 < r \leqq p$ и $r \leqq k \leqq p$.*

Доказательство. Ядром характера (k_j, r_0) является подгруппа $A_{k+1} B_r = R$.

Очевидно, факторгруппа G/R порождается смежными классами $\alpha_k R$, $\alpha_{k-1} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_{r-1} R, \beta_{r-2} R, \ldots, \beta_1 R, xR$. Так же, как в доказательстве теоремы 13, можно показать, что классы $\alpha_k R$ и $\beta_{r-1} R$ принадлежат центру Z факторгруппы G/R, но $\alpha_{k-1} R, \ldots, \alpha_1 R$ и никакое их произведение $(\neq R)$, а также $\beta_{r-2} R, \ldots, \beta_1 R$ и никакое их произведение $(\neq R)$ не принадлежат Z. Далее можно показать, что произвольный элемент вида ba, где $b, a \neq e$

$$a \in \{\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_1\}, \quad b \in \{\beta_{r-2}, \beta_{r-3}, \ldots, \beta_1,\},$$

не может порождать смежный класс центра Z.

Отсюда уже следует теорема 14.

Теорема 15. *Характер $(1_0, r_j)$ подгруппы $A \cdot B_r$ не имеет линейного продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < r \leqq p$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Доказательство. Ядром характера $(1_0, r_j)$ является подгруппа $A \cdot B_{r+1} = R$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 13, можно показать, что центром факторгруппы G/R является $A \cdot B_r / R$, то есть подгруппой, в которой характер $(1_0, r_j)$ может иметь линейные продолжения, является подгруппа $A \cdot B_r$, в которой характер $(1_0, r_j)$ уже определён. Теорема доказана.

Точно так же доказывается следующая

Теорема 16. *Характер $(k_j, 1_0)$ подгруппы $A_k B$ не имеет линейного продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < k \leqq p$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Теорема 17. *Характер $(k_i, 1_j)$ подгруппы $A_k B$ не имеет линейного продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < k \leqq p$, $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Доказательство. Рассмотрим характер $(k_i, 1_j)$ с фиксированными индексами k, i, j. Очевидно, ядром этого характера является подгруппа $A_{k+1} \cdot B_2\{\alpha_k \beta_1^{\nu}\}$ при $i+j \equiv 0 \pmod p$. Действительно,

$$(k_i, 1_j)[\alpha_k \beta_1^{\nu}] = (k_i, 1_j)[\alpha_k] \cdot [(k_i, 1_j)[\beta_1]]^{\nu} = \xi^i \cdot [\xi^j]^{\nu} = \xi^{i+j\nu} = e.$$

Обозначим ядро через R и рассмотрим факторгруппу G/R. Очевидно, она порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \alpha_{k-1} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_1 R, xR.$$

Легко показать, что смежные классы $\alpha_k R$ и $\beta_1 R$ принадлежат центру Z факторгруппы G/R, но ни другие смежные классы, порождающие G/R, ни их юбое рпоизведение $(\neq R)$ не принадлежат центру Z.

Таким образом, факторгруппа $A_k B/R$ — центр факторгруппы G/R, значит подгруппой, в которой характер $(k_i, 1_j)$ может иметь линейные продолжения, является сама подгруппа $A_k \cdot B$, в которой характер $(k_i, 1_j)$ уже определён. Теорема 17 доказана.

Точно так же доказывается следующая

Теорема 18. *Характер $(1_i, r_j)$ подгруппы $A \cdot B_r$ не имеет линейные продолжения ни в одной подгруппе группы G для всех $1 < r \leqq p$; $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Теорема 19. *Характер вида (k_i, r_j) подгруппы $A_k \cdot B_r$ имеет в подгруппе $A_k \cdot B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1}\}$ линейные продолжения вида $(k_i{}^{1l}, r_j)$ $(l = 0, 1, \ldots, p-1)$ для всех $1 < k, r \leqq p$, $1 \leqq i, j < p$ при условии $i + \nu j \equiv 0 \pmod p$.*

Доказательство. Фиксируем индексы k, r i, j. Тогда ядром характера (k_i, r_j) является подгруппа $A_{k+1} \cdot B_{r+1}\{\alpha_k \beta_r^{\nu}\} = R$ при $i + \nu j \equiv 0 \pmod p$.

Рассмотрим факторгруппу G/R. Она порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \alpha_{k-1} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_r R, \beta_{r-1} \beta_1 R, xR.$$

Очевидно, смежные классы $\alpha_k R$ и $\beta_r R$ принадлежат центру Z факторгруппы G/R.

Покажем, что смежный класс $\beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1} R$ также лежит в Z. Действительно

$$(x, \beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1}) = (x, \alpha_{k-1}) \cdot (x, \beta_{r-1}^{\nu}) \cdot ((x, \beta_{r-1}^{\nu}), \alpha_{k-1}) =$$
$$= \alpha_k \beta_r^{\nu} ((x, \beta_{r-1}^{\nu}), \alpha_{k-1}) = a_{p+1} \alpha_k \beta_r^{\nu} \in R,$$

так как по теореме 7 $((x, \beta_{r-1}^{\nu}), \alpha_{k-1}) \in A_{p+1}$, а A_{p+1} является нормальньм делителем в G, поэтому найдётся такой элемент $a_{p+1} \in A_{p+1}$, что

$$\beta_r^{\nu}((x, \beta_{r-1}^{\nu}), \alpha_{k-1}) = a_{p+1} \beta_r^{\nu}.$$

Покажем, что эти смежные классы порождают чентр Z. Очевидно, смежные классы

$$\alpha_{k-1} R, \alpha_{k-2} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_{r-1} R, \beta_{r-2} R, \ldots, \beta_1 R, xR$$

не лежат в Z, также $\alpha_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{k-1}^{\gamma_{k-1}} R (\neq R) \notin Z$ и $\beta_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} R (\neq R) \notin Z$. Рассмотрим теперь произвольный смежный класс baR, где $b \in B$ $a \in A$, и покажем, что он принадлежит центру Z только тогда, если является некоторым произведением смежных классов $\alpha_k R$, $\beta_r R$, $\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}R$. Действительно, пусть $a\in\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}$, $b\in\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}\}$.

Покажем сначала, что если имеет место

$$b = \beta_1^{\delta_1}\beta_2^{\delta_2}\cdot\ldots\cdot\beta_{r-1}^{\delta_{r-1}},$$

где хотя бы для одного $1\leqq n<r-1$ выполняется $\delta_n\not\equiv 0 \pmod p$, тогда смежный класс baR не лежит в центре Z. В самом деле,

$$b = \beta_n^{\delta_n}\cdot b_1, \quad \text{где} \quad b_1 = \beta_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot\beta_{n-1}^{\delta_{n-1}}\cdot\beta_{n+1}^{\delta_{n+1}}\cdot\ldots\cdot\beta_{r-1}^{\delta_{r-1}},$$

значит

$$(x, ba) = (x, \beta_n^{\delta_n}\cdot b_1\cdot a) = (x, a)\cdot(x, b_1)\cdot(x, \beta_n^{\delta_n})\cdot((x, b), a) =$$

$$= a'_{p+1}(x, a)(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n}\notin R,$$

так как по теореме 7 $((x, b), a)$ принадлежит нормальному делителю A_{p+1}, значит найдётся такой элемент $a'_{p+1}\in A_{p+1}$, что

$$(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n}\cdot((x, b), a) = a'_{p+1}(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n}.$$

Так как

$$(x, b_1) = \beta_2^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot\beta_n^{\delta_{n-1}}\cdot\beta_{n+2}^{\delta_{n+1}}\cdot\ldots\cdot\beta_r^{\delta_{r-1}},$$

значит произведение $(x, b_1)\beta_{n+1}^{\delta_n}$ содержит несократимый множитель $\beta_{n+1}^{\delta_n}$, не принадлежащий ядру R. Значит смежный класс baR может принадлежать центру Z только тогда, если имеет вид

$$\beta_{r-1}^{\mu}aR,$$

где $a\in\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}$.

Очевидно, достаточно рассматривать смежный класс вида $\beta_{r-1}^{\nu}aR$, где $a\in\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$, так как $\beta_{r-1}^{\mu}aR$ принадлежит центру Z факторгруппы G/R тогда и только тогда, если любой смежный класс вида $(\beta_{r-1}^{\mu}a)^m R$ $(m=1, 2, \ldots, p)$ принадлежит центру Z. Но в циклической группе, порождённой элементом $\beta_{r-1}^{\mu}a$, найдётся элемент вида $\beta_{r-1}^{\nu}a'$, где $a'\in A$. Однако, как уже отмечалось, с точки зрения принадлежности смежного класса $\beta_{r-1}^{\nu}a'R$ центру Z достаточно рассматривать только смежный класс $\beta_{r-1}^{\nu}aR$, где элемент $a\in\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}\}$.

Но тогда

$$(x, \beta_{r-1}^{\nu}a) = (x, a)\cdot\beta_r^{\nu}\cdot((x, \beta_{r-1}^{\nu}), a) = a''_{p+1}(x, a)\beta_r^{\nu},$$

где $\beta_r^{\nu}((x, \beta_{r-1}^{\nu}), a) = a''_{p+1}\beta_r^{\nu}$ по теореме 7, (A_{p+1} — нормальный делитель в G), $(x, a)\in\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k\}$. Очевидно, элемент (x, a) можно представить в виде

$$(x, a) = a_1\cdot\alpha_k,$$

где $a_1\in\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k\}$ и $\alpha_k\beta_r^{\nu}\in\{\alpha_k\beta_r^{\nu}\}$. Имеем

$$(x, \beta_{r-1}^{\nu}a) = a''_{p+1}a_1\alpha_k\beta_r^{\nu}$$

Очевидно, из $a_1\in\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k\}$ следует, что $(x, \beta_{r-1}^{\nu}a)\in R$ только тогда, если $a_1=e$, то есть $\beta_{r-1}^{\nu}a=\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}$, что и требовалось доказать.

Мы получили, что центром факторгруппы G/R является факторгруппа $A_k\cdot B_r\{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}\}/R$ при $i+\nu j\equiv 0 \pmod p$, значит группой, в которой характер

(k_i, r_j) имеет линейные продолжения, является подгруппа $A_k \cdot B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}\}$, в которой все линейные продолжения характера (k_i, r_j) имеют вид (k_i^{1l}, r_j) $(l = 0, 1, \ldots, p-1)$. Теорема 19 доказана.

Теорема 20. *Характер* $(k_i^{\sigma_0}, r_j)$ *подгруппы*

$$A_k \cdot B_r \cdot \left\{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, \begin{matrix}\alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}^{\nu}(\sigma\text{-чётное})\\ \beta_{r-\sigma}^{\nu}\alpha_{k-\sigma}(\sigma\text{-нечётное})\end{matrix}\right\}$$

имеет в подгруппе

$$A_k \cdot B_r \cdot \left\{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, \begin{matrix}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\alpha_{k-\sigma-1}(\sigma\text{-чётн.})\\ \alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu}(\sigma\text{-нечётн.})\end{matrix}\right.$$

линейные продолжения типа $(k_i^{\sigma+1_l}, r_j)$ $(l = 0, 1, \ldots, p-1)$ *для всех* $1 \leqq \sigma \leqq p-2$, $\sigma+1 \leqq k, r \leqq p, 1 \leqq i, j < p$.

Доказательство. Предположим, что σ чётное число и будем доказывать только для этого случая (для нечётного σ доказательство проводится точно так же).

Ядром характера $(k_i^{\sigma_0}, r_j)$ является подгруппа

$$A_{k+1} \cdot B_{r+1} \cdot \{\alpha_k\beta_r^{\nu}, \beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}^{\nu}\} = R.$$

Факторгруппа G/R порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \alpha_{k-1} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_r R, \ldots, \beta_1 R, xR.$$

Легко показать, что смежные классы $\alpha_k R, \beta_r R, \beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1} R, \ldots, \beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\alpha_{k-\sigma-1} R$ принадлежит центру Z факторгруппы G/R. Также легко убедиться, что

$$\alpha_{k-1} R, \ldots, \alpha_1 R, \beta_{r-1} R, \ldots, \beta_1 R, xR \notin Z;$$

$$\alpha_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{k-1}^{\delta_{k-1}} R (\neq R), \beta_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{r-1}^{\gamma_{r-1}} R (\neq R) \notin Z.$$

Покажем, что центр Z порождается смежными классами

$$\alpha_k R, \beta_r R, \beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1} R, \ldots, \beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\alpha_{k-\sigma-1} R.$$

В самом деле, рассмотрим произвольный смежный класс baR, где $b \in \{\beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_{r-1}\}$, $a \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$.

Покажем сначала, что если $baR \in Z$, то в выражение элемента b через базисные элементы β_n, элементы $\beta_{r-\sigma-2}, \ldots, \beta_1$ входят в нулевой степени. Действительно, если бы имело место

$$b = \beta_m^{\gamma_m} \cdot b_1 \cdot a \quad (\beta_m^{\gamma_m} \neq e, 1 \leqq m < r-\sigma-1, b_1 \in \{\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{r-1}\}),$$

то мы получили бы, что

$$(x, ba) = (x, a) \cdot (x, b_1) \cdot \beta_{m+1}^{\gamma_m}((x, b), a) = a_{p+1}(x, a)(x, b_1)\beta_{m+1}^{\gamma_m},$$

где $(x, b_1) \in \{\beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_r\}$, $a_{p+1} \in A_{p+1}$, $(x, b_1)\beta_{m+1}^{\gamma_m}((x, b), a) =$ $= a_{p+1}(x, b_1)\beta_{m+1}^{\gamma_m}$, (так как по теореме 7 элемент $((x, b), a)$ принадлежит абелевому нормальному делителю A_{p+1}). Но $\beta_{m+1}^{\gamma_m} \neq e$, значит $(x, ba) \notin R$, то есть смежный класс baR не принадлежал бы центру Z.

Получается, что для смежного класса, baR, принадлежащего Z, элемент b имеет вид

$$b = \beta_{r-1}^{\gamma_{r-1}} \cdot \ldots \cdot \beta_{r-\sigma-1}^{\gamma_{r-\sigma-1}}.$$

Ввиду того, что $a \in A$, где A нормальный делитель в G, можно записать

$$ba = (\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1})^{\mu_1} \cdot (\alpha_{k-2}\beta^{\nu}_{r-2})^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (\beta^{\nu}_{r-\sigma-1}\alpha_{k-\sigma-1})^{\mu_{\sigma+1}} \cdot a_1,$$

где $\nu\mu_1 \equiv \gamma_{r-1} \pmod p$, ..., $\nu\mu_{\sigma+1} \equiv \gamma_{r-\sigma-1} \pmod p$, $a_1 \in A$. Так как множители $(\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k+1})^{\mu_1}$, ..., $(\beta^{\nu}_{r-\sigma-1}\alpha_{k-\sigma-1})^{\mu_{\sigma+1}}$ порождают некоторые смежные классы центра Z, то элемент ba порождает смежный класс центра Z тогда и только тогда, если $a_1 R \in Z$. Однако можно записать

$$a_1 = a_2 a_3, \quad \text{где} \quad a_2 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}, \quad a_3 \in A_k.$$

Здесь $a_3 R \in Z$, значит $baR \in Z$ только тогда, если $a_2 = e$.

Мы получили, что произвольный смежный класс baR лежит в центре Z только тогда, если является некоторым произведением смежных классов

$$\alpha_k R, \beta_r R, \beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1} R, \ldots, \beta^{\nu}_{r-\sigma-1}\alpha_{k-\sigma-1} R.$$

Значит

$$Z = A_k B_r \cdot \{\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \beta_{r-2}, \ldots, \beta^{\nu}_{r-\sigma-1}\alpha_{k-\sigma-1}\}/R,$$

или, в случае нечётного σ:

$$Z = A_k B_r \cdot \{\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta^{\nu}_{r-2}, \ldots, \alpha_{k-\sigma-1}\beta^{\nu}_{r-\sigma-1}\}/R.$$

То есть подгруппой, в которой характер $(k_i^{\sigma;0}\, r_j)$ имеет линейные продолжения, является подгруппа

$$A_k B_r \cdot \left\{\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta^{\nu}_{r-2}, \ldots, \begin{matrix} \beta^{\nu}_{r-\sigma-1}\alpha_{k-\sigma-1} & (\sigma\ \text{-чётное}) \\ \alpha_{k-\sigma-1}\beta^{\nu}_{r-\sigma-1} & (\sigma\text{-нечётное}) \end{matrix}\right\},$$

в которой все линейные продолжения характера $(k_i^{\sigma;0}\, r_j)$ имеют вид: $(k_i^{\sigma+1;l}\, r_j)$ $(l = 0, 1, \ldots, p-1)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь характер вида $(k_i^{\sigma;l}\, r_j)$ $(0 < l < p)$. Ядром этого характера является подгруппа

$$R = A_{k+1} B_{r+1} \left\{\alpha_k\beta^{\nu}_r, \beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, \ldots, \begin{matrix} \alpha_{k-\sigma+1}\beta^{\nu}_{r-\sigma+1}, \beta^{\mu}_r(\beta^{\nu}_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma}), & (\sigma\text{-нечётное}) \\ \beta^{\nu}_{r-\sigma+1}\alpha_{k-\sigma+1}, (\alpha_{k-\sigma}\beta^{\nu}_{r-\sigma})\beta^{\mu}_r, & (\sigma\ \text{-чётное}) \end{matrix}\right\},$$

где $i + \nu j \equiv 0 \pmod p$, $l + \mu j \equiv 0 \pmod p$.

Для краткости будем рассматривать только случай нечётного σ (случай чётного σ доказывается совершенно аналогично).

Покажем, что R — ядро характера $(k_i^{\sigma;l}\, r_j)$. Действительно, этот характер является продолжением характера $(k_i^{\sigma-1;0}\, r_j)$ с ядром

$$R' = A_{k+1} B_{r+1} \cdot \{\alpha_k\beta^{\nu}_r, \beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{k-\sigma+1}\beta^{\nu}_{r-\sigma+1}\}$$

(по теореме 20). Тогда R' является подгруппой ядра R. На элементе $\beta^{\mu}_r(\beta^{\nu}_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma})$ характер $(k_i^{\sigma;l}\, r_j)$ обращается в единицу при $l + \mu j \equiv 0 \pmod p$. Ясно, что на элементе $(\beta^{\nu}_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma})^{\mu_1}\alpha_k$ при соответствующем выборе μ_1 характер $(k_i^{\sigma;l}\, r_j)$ также равен 1, однако этот элемент принадлежит подгруппе, порождённой элементами $\alpha_k\beta^{\nu}_r$ и $\beta^{\mu}_r(\beta^{\nu}_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma})$. Значит ядро

$$R = R' \cdot \{\beta^{\mu}_r(\beta^{\nu}_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma})\}.$$

Покажем теперь, что центр Z факторгруппы G/R порождается смежными классами $\alpha_k R$, $\beta_r R$ и $(\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}R$. Они, очевидно, принадлежат центру Z, так как

$$(x, \alpha_k) = \alpha_{k+1} \in R, \quad (x, \beta_r) = \beta_{r+1} \in R, \quad (b, \alpha_k) \in A_{k+1} \subset R$$

для всех $b \in B$; и $(a, \beta_r) \in A_{p+1} \subset R$ для всех $a \in A$ (по теореме 7). Точно так же

$$(x, \alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\beta_{r-1}^{\mu}) = (x, \beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\beta_{r-1}^{\mu}) \cdot (x, \alpha_{k-\sigma-1}) \cdot$$
$$\cdot \left((x, \alpha_{k-\sigma-1}), \beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\beta_{r-1}^{\mu}\right) = \beta_{r-\sigma}^{\nu}\beta_r^{\mu}\alpha_{k-\sigma}a_{p+1} \in R$$

по teopeме 7.

Покажем, что все смежные классы центра Z порождаются этими смежными классами.

Пусть $b'a'R \in Z$-произвольный смежный класс центра Z, где $b' \in B$, $a' \in A$. Очевидно, он представим в виде baR, где $b \in \{\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}\}$, $a \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$, так как $\beta_r R \in Z$, $\alpha_k R \in Z$, а $\alpha_m \in R$ для всех $m > k$, также $\beta_n \in R$ для всех $n > r$. Пусть b имеет вид:

$$b = \beta_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}}.$$

Покажем, что в предположении $baR \in Z$ выполняется $\delta_h = 0$ для всех $h < r - \sigma - 1$. Действительно,

$$(x, ba) = (x, a)(x, b) \cdot ((x, b), a) = a_{p+1}(x, a)\beta_2^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \beta_r^{\delta_{r-1}} \in R,$$

так как по теореме 7 $((x, b), a) \in A_{p+1}$, значит найдётся такой элемент a_{p+1} в нормальном делителе A_{p+1} группы G, что имеет место записанное равенство. Это выражение можно записать в виде

$$(x, ba) = a_{p+1}a_1(\alpha_k\beta_r^{\nu})^{\gamma_{r-1}} \cdot (\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1})^{\gamma_{r-2}} \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k-\sigma+1}\beta_{r-\sigma+1}^{\nu})^{\gamma_{r-\sigma}} \cdot$$
$$\cdot (\beta_r^{\mu}\beta_{r-\sigma}^{\nu}\alpha_{k-\sigma})^{\gamma} \cdot \beta_{r-\sigma-1}^{\delta_{r-\sigma-2}} \cdot \ldots \cdot \beta_2^{\delta_1},$$

где $\nu\gamma \equiv \delta_{r-\sigma-1} \pmod p$, $\nu\gamma_{r-1} + \mu\gamma \equiv \delta_{r-1} \pmod p$, $\nu\gamma_{r-\sigma} \equiv \delta_{r-\sigma} \pmod p$, … …, $\nu\gamma_{r-2} \equiv \delta_{r-2} \pmod p$. Но $(x, ba) \in R$ только тогда, если $\beta_{r-\sigma-1}^{\delta_{r-\delta-2}} \cdot \ldots \cdot \beta_2^{\delta_1} \in R$, то есть если $\delta_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots, r - \sigma - 2$. Получим значит, что в выражение элемента b через базис $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ не входят базисные элементы $\beta_1, \ldots, \beta_{r-\sigma-2}$. Тогда элемент ba имеет вид

$$ba = \beta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \cdot \ldots \cdot \beta_{r-\sigma-1}^{\delta_{r-\sigma-1}} \cdot a,$$

где $a \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$. Очевидно, его можно записать в виде

$$ba = (\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1})^{\gamma'_{r-1}} \cdot (\alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu})^{\gamma'_{r-2}} \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k-\sigma+1}\beta_{r-\sigma+1}^{\nu})^{\gamma'_{r-\sigma+1}} \cdot$$
$$\cdot [\beta_r^{\mu}(\beta_{r-\sigma}^{\nu}\alpha_{k-\sigma})]^{\gamma'_{r-\sigma}} \cdot [(\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}]^{\gamma'_{r-\sigma-1}} \cdot \beta_r^{-\mu\gamma'_{r-\sigma}} \cdot a_2,$$

где

$$a_2 \in A, \nu\gamma'_{r-2} \equiv \delta_{r-2}, \ldots, \nu\gamma'_{r-\sigma} \equiv \delta_{r-\sigma}, \nu\gamma'_{r-1} + \mu\gamma'_{r-\sigma-1} \equiv \delta_{r-1} \pmod p.$$

Так как $\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1} \in R, \ldots, \beta_r^{\mu}(\beta_{r-\sigma}^{\nu}\alpha_{k-\sigma}) \in R$, то элемент ba порождает тот же смежный класс по R, как элемент

$$[(\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}]^{\gamma'_{r-\sigma-1}} \cdot \beta_r^{-\mu\gamma'_{r-\sigma}} \cdot a_2.$$

Но

$$(\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}R\in Z,\quad \beta_r R\in Z,$$

и $a_3 R\in Z$, где $a_3\in\{\alpha_k, \ldots, \alpha_{p^2}\}$; значит

$$[(\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}]^{\gamma'_{r-\sigma-1}}\cdot\beta_r^{-\mu\gamma'_{r-\sigma}}\cdot a_2 R\in Z$$

тогда и только тогда, если $a_4 R\in Z$, где $a_2=a_3\cdot a_4$ и $a_3\in\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$. Последнее выполняется только тогда, если $a_4=e$.

Мы получили, что если $baR\in Z$, то смежный класс baR выражается через смежные классы

$$\alpha_k R, \beta_r R, (\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}R.$$

Следовательно подгруппой, в которой характер $(k_i{}^{\sigma_1}_{;} r_j)$ имеет линейные продолжения, является подгруппа

$$A_k B_r\cdot\{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, \beta_{r-\sigma}^{\nu}\alpha_{k-\sigma}, (\alpha_{k-\sigma-1}\beta_{r-\sigma-1}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu}\}$$

(при нечётном σ, и подгруппа

$$A_k B_r\cdot\{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, \alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}^{\nu}, \beta_{r-1}^{\mu}(\beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\alpha_{k-\sigma-1})\}$$

при чётном σ), в которой характер $(k_i{}^{\sigma_1}_{;} r_j)$ продолжается так: либо на последнем образующем элементе равен единице, либо принимает на ней значение ζ^m $(m\not\equiv 0 \pmod p)$. Обозначим эти характеры соответственно символами:

$$\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0\\
\vdots & \vdots\\
0 & 0\\
k_i & r_j\\
\left.\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right\}\sigma-1 & \\
l & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0\\
\vdots & \vdots\\
0 & 0\\
k_i & r_j\\
\left.\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right\}\sigma-1 & \\
l & \\
m &
\end{array}$$

то есть, используем схему, введённую в работе [7]. Для нашей группы она имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\alpha_{p^2} & & \\
\alpha_{p^2-1} & & \\
\vdots & & \\
\alpha_p & \beta_p & \\
\alpha_{p-1} & \beta_{p-1} & \\
\vdots & \vdots & \\
\alpha_2 & \beta_2 & \\
\alpha_1 & \beta_1 & x
\end{array}.$$

В обозначении характеров на место того базисного элемента, (например α_k) на котором данный характер равен единице, пишем знак 0 (иногда для подчёркивания номера базисного элемента пишем знак k_0), на место того базисного элемента, на котором данный характер $=\zeta^\nu$, ставим знак ν (иногда знак k_ν). Например характер (k_i, r_0) в такой записи имеет вид

$$
\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & \vdots \\
k_i & \vdots \\
 & 0 \\
 & r_0.
\end{array}
$$

Если характер определён на произведении некоторых степеней базисных элементов из A и B (то есть если характер определяется в такой подгруппе, которая получается расширением группы с помощью такого произведения элементов), то соответствующий знак пишем на середину между столбцами базисных элементов из A и B на номер ниже от нижестоящего базисного элемента из α_k и β_r. Тогда нами доказана следующая

Теорема 21. *Характер вида* $(k_i^{\sigma_l} r_j)$ *подгруппы*

$$
A_k B_r \cdot \left\{ \beta^\nu_{r-1}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta^\nu_{r-2}, \ldots, \begin{matrix} \alpha_{k-\sigma}\beta^\nu_{r-\sigma} & \sigma \text{ -чётное} \\ \beta^\nu_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma} & (\sigma\text{ -нечётное}) \end{matrix} \right\}
$$

имеет в подгруппе

$$
A_k \beta_r \cdot \left\{ \beta^\nu_{r-1}\alpha_{k-1}, \ldots, \begin{matrix} \alpha_{k-\sigma}\beta^\nu_{r-\sigma}, \beta^\mu_{r-1}(\beta_{r-\sigma-1}\alpha_{k-\sigma-1}) \; (\sigma\text{-чётное}) \\ \beta^\nu_{r-\sigma}\alpha_{k-\sigma}, (\alpha_{k-\sigma-1}\beta^\nu_{r-\sigma-1})\beta^\mu_{r-1} \; (\sigma\text{-нечётное}) \end{matrix} \right\}
$$

линейные продолжения вида

$$
\begin{array}{ccc}
0 & & \\
\vdots & & \\
0 & & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
0 & & 0 \\
k_i & & r_j \\
 & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \sigma-1 & \\
 & l & \\
 & 0 &
\end{array}
\qquad \text{и} \qquad
\begin{array}{ccc}
0 & & \\
\vdots & & \\
0 & & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
0 & & 0 \\
k_i & & r_j \\
 & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \sigma-1 & \\
 & l & \\
 & m &
\end{array}
$$

для всех $1 \leqq i, j, l, m < p$; $1 \leqq \sigma \leqq p-1$; $\sigma+1 \leqq k$, $r \leqq p$ *при* $l + j\mu \equiv 0 \pmod{p}$.

Вообще имеют место следующие факты:

Теорема 22. *Характер вида*

$$\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0\\
\vdots & \vdots\\
0 & 0\\
k_i & r_j\\
\multicolumn{2}{c}{\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}\sigma-1}\\
\multicolumn{2}{c}{l}\\
\multicolumn{2}{c}{x_1}\\
\multicolumn{2}{c}{x_2}\\
\multicolumn{2}{c}{\vdots}\\
\multicolumn{2}{c}{x_{\lambda-1}}\\
\multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}$$

подгруппы

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, g\}$$

имеет в подгруппе $A_k B_r\{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \ldots, g, g'\}$, *линейные продолжения вида*

$$\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0\\
\vdots & \vdots\\
0 & 0\\
k_i & r_j\\
\multicolumn{2}{c}{\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}\sigma-1}\\
\multicolumn{2}{c}{l}\\
\multicolumn{2}{c}{x_1}\\
\multicolumn{2}{c}{\vdots}\\
\multicolumn{2}{c}{x_{\lambda-1}}\\
\multicolumn{2}{c}{0}\\
\multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0\\
\vdots & \vdots\\
0 & 0\\
k_i & r_j\\
\multicolumn{2}{c}{\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}\sigma-1}\\
\multicolumn{2}{c}{l}\\
\multicolumn{2}{c}{x_1}\\
\multicolumn{2}{c}{\vdots}\\
\multicolumn{2}{c}{x_{\lambda-1}}\\
\multicolumn{2}{c}{0}\\
\multicolumn{2}{c}{n}
\end{array}$$

где при $g = \alpha_{h_1}\beta_{h_2}^{\delta_{h_2}} \cdot \ldots \cdot \beta_{h_q}^{\delta_{h_q}}$ *имеет место* $g' = \left(\alpha_{h_1-1}^{-1} \cdot \beta_{h_2-1}^{-\delta_{h_2}} \cdot \ldots \cdot \beta_{h_q-1}^{-\delta_{h_q}}\right)^{-1}$ *для всех* $1 \leqq i, j, l, x_1, \ldots, x_{\lambda-1}, n < p$ *и если ни один из номеров* $h_1, h_2, \ldots, h_q$ *не равен единице.*

Теорема 23. *Характер вида*

$$
\begin{array}{ll}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
k_i & r_j \\
\multicolumn{2}{l}{\left.\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right\}\sigma-1} \\
l & \\
x_1 & \\
\vdots & \\
x_{\lambda-1} & \\
x_\lambda &
\end{array}
\qquad (1 \leqq x_\lambda < p)
$$

подгруппы

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, g\}$$

имеет в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, g, \beta_{r-1}^{\mu} g'\},$$

линейные продолжения вида

$$
\begin{array}{ll}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
k_i & r_j \\
\multicolumn{2}{l}{\left.\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right\}\sigma-1} \\
l & \\
x_1 & \\
\vdots & \\
x_\lambda & \\
0 &
\end{array}
\qquad \text{и} \qquad
\begin{array}{ll}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
k_i & r_j \\
\multicolumn{2}{l}{\left.\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right\}\sigma-1} \\
l & \\
x_1 & \\
\vdots & \\
x_\lambda & \\
x_{\lambda+1} &
\end{array}
\qquad (1 \leqq x_{2+1} < p)
$$

где при

$$g = \alpha_{h_1}\beta_{h_2}^{\delta_{h_2}} \cdot \ldots \cdot \beta_{h_q}^{\delta_{h_q}}$$

выполняется

$$g' = (\alpha_{h_1-1}^{-1}\beta_{h_2-1}^{-\delta_{h_2}} \cdot \ldots \cdot \beta_{h_q-1}^{-\delta_{h_q}})^{-1};$$

и $x_\lambda + j\mu \equiv 0 \pmod p$ *для всех* $1 \leqq i, j, l, x_1, \ldots, x_2, x_{\lambda+1} \leqq p$, *и если ни один из номеров* $h_1, h_2, \ldots, h_q$ *не равен единице.*

Доказательство двух последних теорем проводим одновременно. Будем пользоваться методом индукции по числу индексов x_η в характерах теорем.

Рассмотрим сначала характер

$$\begin{array}{cc} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ k_i & r_j \\ \multicolumn{2}{c}{\left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \sigma - 1.} \\ \multicolumn{2}{c}{l} \\ \multicolumn{2}{c}{x_1} \end{array}$$

Он является продолжением характера $(k_i \overset{\sigma_l}{;} r_j)$, значит, (по теореме 21) он определён в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1},\ \alpha_{k-2} \beta_{r-2}^{\nu},\ \ldots,\ \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^{\nu},\ \beta_{r-1}^{\mu} (\beta_{r-\sigma-1}^{\nu} \alpha_{k-\sigma-1})\},\ \begin{matrix} i + \nu j \equiv 0 \\ l + \mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod p$$

(будем рассматривать только случай чётного σ). В зависимости от того, $x_1 = 0$, или $x_1 \neq 0$, ядром характера является подгруппа

$$R_0 = A_{k+1} B_{r+1} \{\alpha_k \beta_r^{\nu},\ \ldots,\ \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^{\nu},\ \beta_{r-1}^{\mu} (\beta_{r-\sigma-1}^{\nu} \alpha_{k-\sigma-1})\},\ \begin{matrix} i + \nu j \equiv 0 \\ l + \mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod p,$$

или

$$R_1 = A_{k+1} B_{r-1} \{\alpha_k \beta_r^{\nu},\ \ldots,\ \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^{\nu},\ \beta_r^{\mu_1} [\beta_{r-1}^{\mu} (\beta_{r-\sigma-1}^{\nu} \alpha_{k-\sigma-1})]\},\ \begin{matrix} i + \nu j \equiv 0 \\ l + \mu j \equiv 0 \\ x_1 + \mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod p$$

Как и в доказательстве теоремы 21, можно показать, что факторгруппа G/R_0 порождается смежными классами $\alpha_k R_0, \beta_r R_0$ и $(\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^{\nu}) \beta_{r-2}^{\mu} R_0$, а факторгруппа G/R_1 порождается смежными классами $\alpha_k R_1, \beta_r R_1$ и $(\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^{\nu}) \beta_{r-2}^{\mu} \beta_{r-1}^{\mu_1} R_1$. То есть подгруппа, в которой наш характер имеет лигнейные продолжения, имеет вид

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1},\ \ldots,\ \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^{\nu},\ \beta_{r-1}^{\mu} (\beta_{r-\sigma-1}^{\nu} \alpha_{k-\sigma-1}),\ (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^{\nu}) \beta_{r-2}^{\mu}\} (\text{при } x_1 = 0),$$

или

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^{\nu} \alpha_{k-1},\ \ldots,\ \alpha_{k-\sigma} \beta_{r-\sigma}^{\nu},\ \beta_{r-1}^{\mu} (\beta_{r-\sigma-1}^{\nu} \alpha_{k-\sigma-1}),\ (\alpha_{k-\sigma-2} \beta_{r-\sigma-2}^{\nu}) \beta_{r-2}^{\mu} \beta_{r-1}^{\mu_1}\}$$
$$(\text{при } x_1 \neq 0),$$

где линейные продолжения задаются по теоремам 22 и 23.

Пусть нами уже построен характер

$$\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
k_i & r_j \\
\multicolumn{2}{c}{\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}\sigma-1,} \\
\multicolumn{2}{c}{l} \\
\multicolumn{2}{c}{x_1} \\
\multicolumn{2}{c}{\vdots} \\
\multicolumn{2}{c}{x_{\bar{k}}}
\end{array}$$

и он определён в подгруппе

$$A_k B_r \cdot \{\beta_{r-1}^{\nu}\,\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}\,\beta_{r-2}^{\nu}, \ldots, g_1, \ldots, g_{\bar{k}}\},$$

где элементы $g_1, g_2, \ldots, g_{\bar{k}}$ построены по индуктивному предположению, согласно теоремам 22 и 23, значит не содержат в своём выражении через базисные элементы множителей β_η с индексами $\eta < r-(\sigma+\bar{k})$. Ядром этого характера является подгруппа

$$R_0' = A_{k+1} B_{r+1} \cdot \{\alpha_k \beta_r^{\nu}, \beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \ldots, g_1, \ldots, g_{\bar{k}}\} \quad \text{при} \quad x_{\bar{k}} = 0$$

и

$$R_1' = A_{k+1} B_{r+1} \{\alpha_k \beta_r^{\nu}, \beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \ldots, g_1, \ldots, g_{\bar{k}}\beta_r^{\mu_{\bar{k}}}\} \quad \text{при} \quad x_{\bar{k}} \neq 0.$$

(предполагается $g_{\bar{k}} = ab, a \in A, b \in B$). Можно показать, что центр факторгруппы G/R_0' порождается смежными классами $\alpha_k R_0'$, $\beta_r R_0'$ и $g_{\bar{k}-1}' R_0'$, а центр факторгруппы G/R_1' порождается смежными классами $\alpha_k R_1'$, $\beta_r R_1'$ и $\beta_r^{\mu_{\bar{k}}} g_{\bar{k}-1}' R_1'$, где при

$$g_{\bar{k}} = \alpha_{\lambda_1} \beta_{\lambda_2}^{\delta_{\lambda_2}} \cdot \ldots \cdot \beta_{\lambda_\varrho}^{\delta_{\lambda_\varrho}}$$

имеет место

$$g_{\bar{k}-1}' = \left(\alpha_{\lambda_1}^{-1} \cdot \beta_{\lambda_2-1}^{-\delta_{\lambda_2}} \cdot \ldots \cdot \beta_{\lambda_\varrho-1}^{-\delta_{\lambda_\varrho}}\right)^{-1},$$

и выполняется $x_{\bar{k}} + \mu_{\bar{k}} j \equiv 0 \pmod{p}$.

Значит характер имеет линейные продолжения в подгруппе

$$A_k B_r \{\beta_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \ldots, g_1, \ldots, g_{\bar{k}}, g_{\bar{k}-1}'\} \quad \text{при} \quad x_{\bar{k}} = 0,$$

и

$$A_k B_r \{B_{r-1}^{\nu}\alpha_{k-1}, \ldots, g_1, \ldots, g_{\bar{k}}, \beta_{r-1}^{\mu_{\bar{k}}} g_{\bar{k}-1}'\} \quad \text{при} \quad x_{\bar{k}} \neq 0,$$

откуда уже теоремы следуют.

Из теорем 22 и 23 непосредственным следствием получается следующая

Теорема 24. *Характеры, приведённые в условиях теорем 22 и 23, не имеют линейные продолжения ни в какой подгруппе группы G, если хотя бы один из померов $h_1, \ldots, h_q$ равен единице.*

Следствие очевидно, так как единственно возможные линейные продолжения характеров определены в подгруппах

$$A_k B_r \{\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, g, g'\},$$

или, в случае теоремы 23,

$$A_k B_r \{\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}, \ldots, g, \beta^{\mu}_{r-1} g'\},$$

где элемент g' уже не имеет смысла.

С помощью высше изложенных результатов можно построить полную систему линейных частей характеров группы G. Продолжение характеров проводится по схеме I. Значит, характеры $(p_0^2), \ldots, (p+2_0)$ продолжаются в подгруппах $A_{p^2-1}, \ldots, A_{p+1}$ соответственно, разделяясь на два вида характеров $(p^2-1_0), (p^2-1_i); \ldots; (p+1_0), (p+1_i)$ $(i=1, 2, \ldots, p-1)$, вторые из которых $((p^2-1_i), \ldots, (p+1_i))$ дальше не продолжаются.

Характер $(p+1_0)$ продолжается в подгуппе $A_p B_p$, разделяясь на четыре вида характеров $(p_0, p_0), (p_i, p_0), (p_0, p_i), (p_i, p_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Характеры (p_i, p_0) и (p_0, p_i) при фиксированном i продолжаются в подгруппах $A_p B_{p-1}$ и $A_{p-1} B_p$ соответственно, расщепляясь на два характера вида $(p_i, p-1_0), (p_i, p-1_j)$ и $(p-1_0, p_i), (p-1_j, p_i)$ соответственно $(j=1, 2, \ldots, p-1)$.

Характер же (p_i, p_j) при фиксированных i и j продолжается в подгруппе $A_p B_p \{\beta^{\nu}_{p-1}\alpha_{p-1}\}$ при $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$, расщепляясь на два характера вида $(p_i{}^{1_0}_{,} p_j), (p_i{}^{1_l}_{,} p_j)$ $(i = 1, \ldots, p-1)$.

Вообще, характер „главного типа", то есть типа (k_0, k_0) продолжается в подгруппе $A_{k-1} B_{k-1}$, где расщепляется на четыре характера типа $(k-1_0, k-1_0)$, $(k-1_i, k-1_0), (k-1_0, k-1_i)$ $k-1_i, k-1_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Характеры (k_i, r_0) и (k_0, r_i) при фиксированном i линейно продолжаются в подгруппах $A_k B_{r-1}$ и $A_{k-1} B_r$ соответственно, расщепляясь на два характера вида $(k_i, r-1_0), (k_i, r-1_j)$ и $(k-1_0, r_i), (k-1_j, r_i)$ $(j = 1, \ldots, p-1, ; 1 \leqq k, r < p)$.

Характер (k_i, r_j) при фиксированных i и j линейно продолжается в подгруппе $A_k B_r \{\beta^{\nu}_{r-1}\alpha_{k-1}\}$ при условии $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$, распадаясь на два характера типа $(k_i{}^{1_0}_{,} r_j)$, $(k_i{}^{1_l}_{,} r_j)$ $(l = 1, \ldots, p-1)$.

Последующее продолжение полученных в последнем случае характеров производится по теоремам 22, 23

Линейные части характеров группы G получаются из таких характеров, группа определения которых содержит образующий элемент, в выражение через базисные элементы которого входит хотя бы один из множителей α_1 или β_1, x в некоторой $(\neq 0)$ степени.

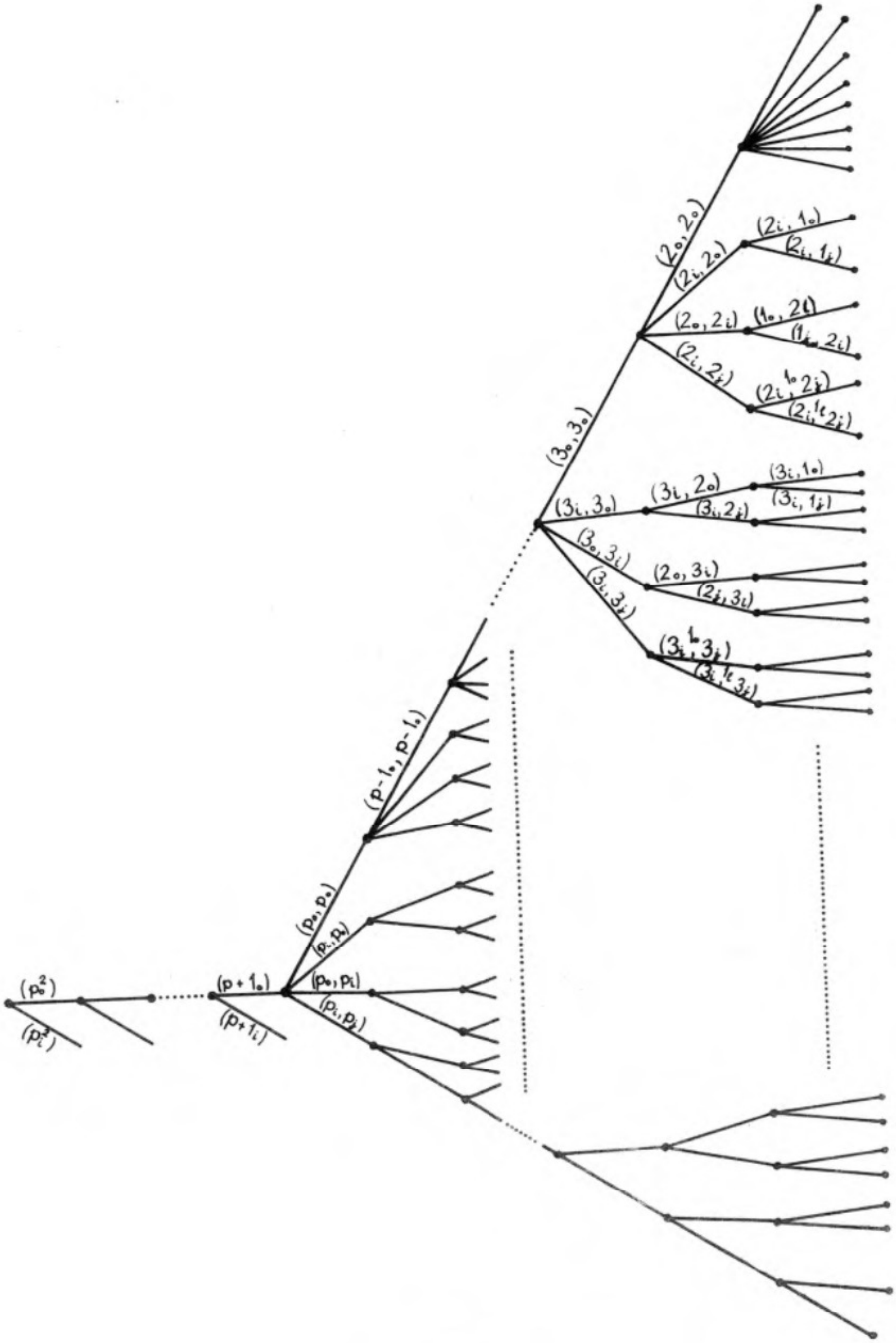
Всех характеров получается:

p^2-p — не продолжающихся до A_p, а после: $8+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+3\cdot 2^{p-1} = 2+3\cdot 2^p$.

§ 4.

Ядра неприводимых представлений группы G

В предыдущем параграфе описаны все линейные части характеров комплексных представлений группы G. Так как ядрами неприводимых представлений являются ядра линейных частей характеров представлений группы G, то, используя результаты предыдущего параграфа, можем построить полную



(p_0^2)
(p_i^2)
$(p+1_0)$
$(p+1_i)$
(p_0, p_0)
(p_i, p_0)
(p_0, p_i)
(p_i, p_j)
$(p-1_0, p-1_0)$
$(3_0, 3_0)$
$(3_i, 3_0)$
$(3_0, 3_i)$
$(3_i, 3_j)$
$(2_0, 2_0)$
$(2_i, 2_0)$
$(2_0, 2_i)$
$(2_i, 2_j)$
$(2_i, 1_0)$
$(2_i, 1_j)$
$(1_0, 2_i)$
$(3_i, 2_0)$
$(3_i, 2_j)$
$(3_i, 1_0)$
$(3_i, 1_j)$
$(2_0, 3_i)$
$(2_j, 3_i)$

Схема I.

систему ядер неприводимых комплексных представлений рассматриваемой в данной работе группы.

Очевидно, ядрами линейных характеров, не продолжающихся до A_p, будут подгруппы

$$\{e\}, A_{p^2}, A_{p^2-1}, \ldots, A_{p+2},$$

где A_μ является ядром характера $(\mu-1_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p-1$; $\mu = p+2, \ldots, p^2$ а $\{e\}$ является ядром характера (p_i^2).

Также очевидным следствием теорем предыдущего параграфа являются следующие факты, которых приводим без доказательства, так как эти результаты встречаются в доказательствах теорем параграфа 3.:

Теорема 25. *Ядром характеров, полученных последним шагом продолжения характеров „главного типа", являются следующие восем типов подгрупп группы* G: $G, A_2 B\{x\}, AB_2\{x\}, AB, A_2B_2\{\alpha_1\beta_1^\nu\}\{x\}$ *(при* $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$*)* $A_2B\{\alpha_1 x^\nu\}, AB_2\{\beta_1 x^\nu\}$ *(при* $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$*) и* $A_2B_2\{\alpha_1\beta_1^\nu, \alpha_1 x^\mu\}$ *(при* $i+\nu j \equiv 0$, $i+\mu j \equiv 0 \pmod p$*).*

Теорема 26. *Ядром характеров типа* $(k_i, 1_0), (1_0, k_i), (1_i, k_j)$ *и* $(k_i, 1_j)$· *являются подгруппы соответственно* $A_{k+1}B, AB_{k+1}, A_2B_{k+1}\{\alpha_1\beta_k^\nu\}$ *и* $A_{k+1} B_2\{\alpha_k\beta_1^\nu\}$ *при* $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$ *для всех* $1 \leqq k \leqq p$.

Теорема 27. *Ядром характеров типа* $(k_i^{\sigma_0} r_j)$ *и* $(k_i^{\sigma_1} r_j)$ *(где* $1 < k, r \leqq p$; $\min(k, r) - \sigma = 1$*) являются соответственно подгруппы*

$$A_{k+1} B_{r+1} \left\{\alpha_k\beta_r^\nu, \beta_{r-1}^\nu\alpha_{k-1}, \ldots, \begin{matrix} \alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}^\nu, & \sigma\text{-чётное} \\ \beta_{r-\sigma}^\nu\alpha_{k-\sigma}, & \sigma\text{-нечётное} \end{matrix}\right\}$$

при $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$, *и*

$$A_{k+1} B_{r+1} \left\{\alpha_k\beta_r^\nu, \ldots, \begin{matrix} \beta_{r-\sigma+1}^\nu\alpha_{k-\sigma+1}, (\alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}^\nu)\beta_r^\mu, & \sigma\text{-чётное} \\ (\alpha_{k-\sigma+1}\beta_{r-\sigma+1}^\nu), \beta_r^\mu(\beta_{r-\sigma}^\nu\alpha_{k-\sigma}), & \sigma\text{-нечётное} \end{matrix}\right\}$$

при $i+\nu j \equiv 0 \pmod p$, $l+\mu j \equiv 0 \pmod p$ *для каждого фиксированного* $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$.

Теорема 28. *Ядром характера*

$$\begin{array}{cc}
0 & \\
\vdots & \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
k_i & r_j \\
\multicolumn{2}{c}{\left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\}\sigma} \\
\multicolumn{2}{c}{\delta_1} \\
\multicolumn{2}{c}{\vdots} \\
\multicolumn{2}{c}{\delta_q}
\end{array}$$

(где $\min(k, r)-(\sigma+q) = 1,\ 1<k, r\leqq p)$ *является подгруппа*

$$A_{k+1}\,B_{r+1}\{\alpha_k\beta_r^{\nu}, \ldots, \alpha_{k-\sigma}\beta_{r-\sigma}^{\nu}, g_1, \ldots, g_q\} \qquad (\text{для чётного } \sigma),$$

где элементы $g_1, \ldots, g_q$ *имеют вид*

$$g_1 = \begin{cases} \beta_r^{\mu_1}(\beta_{r-\sigma-1}^{\nu}\alpha_{k-\sigma-1}), & \delta_1 \neq 0 \\ \beta_{r-\sigma-1}^{\nu_1}\alpha_{k-\sigma-1}, & \delta_1 = 0 \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} \alpha_{k-\sigma-2}\beta_{r-\sigma-2}^{\nu}, & \delta_1 = \delta_2 = 0 \\ (\alpha_{k-\sigma-2}\beta_{r-\sigma-2}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu_1}, & \delta_1 \neq 0,\ \delta_2 = 0 \\ (\alpha_{k-\sigma-2}\beta_{r-\sigma-2}^{\nu})\beta_r^{\mu_2}, & \delta_1 = 0,\ \delta_2 \neq 0 \\ (\alpha_{k-\sigma-2}\beta_{r-\sigma-2}^{\nu})\beta_{r-1}^{\mu_1}\beta_r^{\mu_2}, & \delta_1 \neq 0,\ \delta_2 \neq 0 \end{cases}$$

и т. д.
при условии

$$\begin{aligned} i+\nu j &\equiv 0 \\ \delta_1+\mu_1 j &\equiv 0 \\ \delta_2+\mu_2 j &\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p) \\ &\vdots \\ \delta_q+\mu_q j &\equiv 0, \end{aligned}$$

где $0\leqq\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q<p$.

Этим построение ядер всех неприводимых комплексных представлений группы G завершено.

Рассмотрим пример. Пусть $p=3$.

Характеры, не продолжающиеся дальше A_3:

$$(9_i), (8_i), (7_i), (6_i), (5_i), (4_i).$$

Характеры, полученные от характеров „главного типа" при последнем шаге продолжения:

$$(1_0, 1_0, 1_0),\ (1_i, 1_0, 1_0),\ (1_0, 1_i, 1_0),\ (1_0, 1_0, 1_i),\ (1_i, 1_j, 1_0),\ (1_i, 1_0, 1_j),\ (1_0, 1_i, 1_j),$$
$$(1_i, 1_j, 1_k) \qquad (i, j, k = 1, \ldots, p-1).$$

Остальные характеры:

$$(2_i, 1_0),\ (2_i, 1_j),\ (1_0, 2_j),\ (1_i,\ 2_j),\ (2_i \overset{1_0}{,} 2_j),\ (2_i \overset{1_l}{,} 2_j) \qquad (i, j, l, m = 1, \ldots, p-1)$$
$$(3_i, 1_0),\ (3_i, 1_j),\ (3_i \overset{1_0}{,} 2_j),\ (3_i \overset{1_l}{,} 2_j),\ (1_0, 3_j),\ (1_i, 3_j),\ (2_i \overset{1_0}{,} 3_j), (2_i \overset{1_l}{,} 3_j),\ (3_i \overset{2_0}{,} 3_j),$$
$$(3_i \overset{2_l}{,} 3_j).$$

Наконец ещё два характера:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ 3_i & & 3_j \\ & l & \\ & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ 3_i & & 3_j \\ & l & \\ & m. & \end{array}$$

Ядрами найденных характкров будут по порядке следования характеров:

$$\{e\}, A_9, A_8, A_7, A_6, A_5.$$

$$G; A_2 B\{x\}; AB_2\{x\}; AB; A_2 B_2\{\alpha_1 \beta_1^\nu\}\{x\}; A_2 B\{\alpha_1 x^\nu\}, AB_2\{\beta_1 x^\nu\}, A_2 B_2\{\alpha_1 \beta_1^\nu, \alpha_1 x^\mu\}$$

$$\text{\textit{при}} \begin{matrix} i+\nu j \equiv 0 \\ i+\mu k \equiv 0 \end{matrix} \pmod p$$

$$A_3 B; A_3 B_2\{\alpha_2 \beta_1^\nu\}; AB_3; A_2 B_3\{\alpha_1 \beta_2^\nu\}; A_3 B_3\{\alpha_2 \beta_2^\nu, \beta_1^\nu \alpha_1\}; A_3 \beta_3\{\alpha_2 \beta_2^\nu, \beta_2^\mu(\beta_1^\nu \alpha_1)\}$$

$$\text{\textit{при}} \begin{matrix} i+\nu j \equiv 0 \\ l+\mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod p.$$

$$A_4 B; A_4 B_2\{\alpha_3 \beta_1^\nu\}; A_4 B_3\{\alpha_3 \beta_2^\nu, \beta_1^\nu \alpha_2\}; A_4 B_2\{\alpha_3 \beta_2^\nu, \beta_2^\mu(\beta_1^\nu \alpha_2\}; AB_4; A_2 B_4\{\alpha_1 \beta_3^\nu\}.$$

$$A_3 B_4\{\alpha_2 \beta_3^\nu, \beta_2^\nu \alpha_1\}\ A_3 B_4\{\alpha_2 \beta_3^\nu, \beta_3^\mu(\beta_2^\nu \alpha_1)\}; A_4 B_4\{\alpha_3 \beta_3^\nu, \beta_2^\nu \alpha_2, \alpha_1 \beta_1^\nu\}$$

$$A_4 B_4\{\alpha_3 \beta_3^\nu, \beta_2^\nu \alpha_2, (\alpha_1 \beta_1^\nu) \beta_3^\mu\}$$

$$\text{\textit{при}} \begin{matrix} i+\nu j \equiv 0 \\ l+\mu j \equiv 0 \end{matrix} \pmod p.$$

Литература

[1] С. Д. Берман, О характерах конечных нильпотентных групп. *Успехи мат. наук* 1959, **14** № 5 (217—218).

[2] С. Д. Берман, Нормальные делители группы треугольных матриц над конечным полем. *Докл. и сообщ. Ужг. унив.* 1960, № 3, (50).

[3] L. Kaloujnine, Sur les p-groupes de Sylow du groupe symetrique de degré *m. C. R. Acad. Sci. Paris* **221** (1945), 222—224.

[4] L. Kaloujnine, La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **65** (1948), 239—276.

[5] A. I. Weir, Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 529—533.

[6] A. I. Weir, The Sylow subgroups of the symmetric group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 534—541.

[7] A. I. Weir, Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic prime to p, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 454—464.

(Поступило 29. VIII. *1966.)*