Eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens

Von J. SZABÓ (Debrecen)

L. ECKHART ([1]) hat in 1937 ein in kurzer Zeit weit verbreitetes, und jetzt im allgemeinen nach ihm benanntes Verfahren, das Eckhartsche Einschneiderverfahren, entwickelt, wodurch aus zwei axonometrischen Bildern einer räumlichen Konfiguration ausgehend, durch Einschneiden von zwei Parallelstrahlbüschel ein neues axonometrisches Bild erzeugbar ist. (siehe Abb. 1.). Sind die als Ausgang dienenden axonometrischen Bilder Monge-Projektionen, so erhält man ein sehr schnelles Verfahren zur Erzeugung eines axonometrischen Bildes.

Wir wollen in dieser Arbeit ein analoges Verfahren beschreiben, das von zwei perspektivischen Bildern ausgehend durch Einschneiden von zwei geeigneten zentralen Strahlenbüscheln zu einem neuen perspektivischen Bild führt.

Die Möglichkeit der Erzeugung einer Zentralprojektion ist von O. TAMMI ([3]) durch analytische Mittel untersucht worden.

Wir verstehen in dieser Arbeit unter einem perspektivischen Bild durchwegs ein (singuläres) kollineares Bild des Raumes auf die Ebene. *)

Wir wollen dieses Verfahren zentrales Einschneideverfahren nennen. Es ist leicht einzusehen, daß wir entweder die als Ausgangspunkte benutzten zwei perspektivischen Bilder; oder die Zentren der Strahlenbüscheln beliebig annehmen können, wenn wir als Ergebnis unseres Verfahrens wieder ein perspektivisches Bild erhalten wollen. Verwenden wir nämlich das zentrale Einschneideverfahren für eine Gerade, so bringen wir solche Strahlen zum Schnitt, die einander entsprechenden Punkte von zwei projektiven Punktreihen projizieren, was im allgemeinen nach einem Satz von Steiner zu einem Kegelschnitt führt. Dieser Kegelschnitt degeneriert — wie bekannt — nur dann zu einem Geradenpaar wenn die projizierenden Strahlenbüschel sich in einer perspektivischen Lage befinden.

Wir stellen notwendige und hinreichende Bedingungen für die gegenseitige Lage der als Ausgangspunkte angewandten perspektivischen Bilder und der Projektionszentren auf. Diese Bedingungen können erfüllt werden, so daß das Verfahren als eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneiderverfahrens betrachtet werden kann. Wir untersuchen auch einige Spezialfälle, so z. B. den Fall, wenn die Ausgangsbilder gewisse Seitenrisse sind. Wir gelangen zu einem, vom Stadpunkt der praktischen Anwendungen bemerkenswerten Fall, wenn diese Seitenrisse einfache Mongesche Projektionen sind. Wir erhalten dann ein einfaches und schnelles Verfahren zur Erzeugung eines perspektivischen Bildes.

*) Siehe E. STIEFEL [2] S. 124—125.

1. Wir betrachten ein räumliches Gebilde **K** und ein dazu gebundenes Koordinatensystem $O(x, y, z)$ mit dem Ursprung O und mit den Achsen x, y, z. $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ seien zwei perspektivische Bilder von **K** in derselben Zeichebene. Die Bilder eines

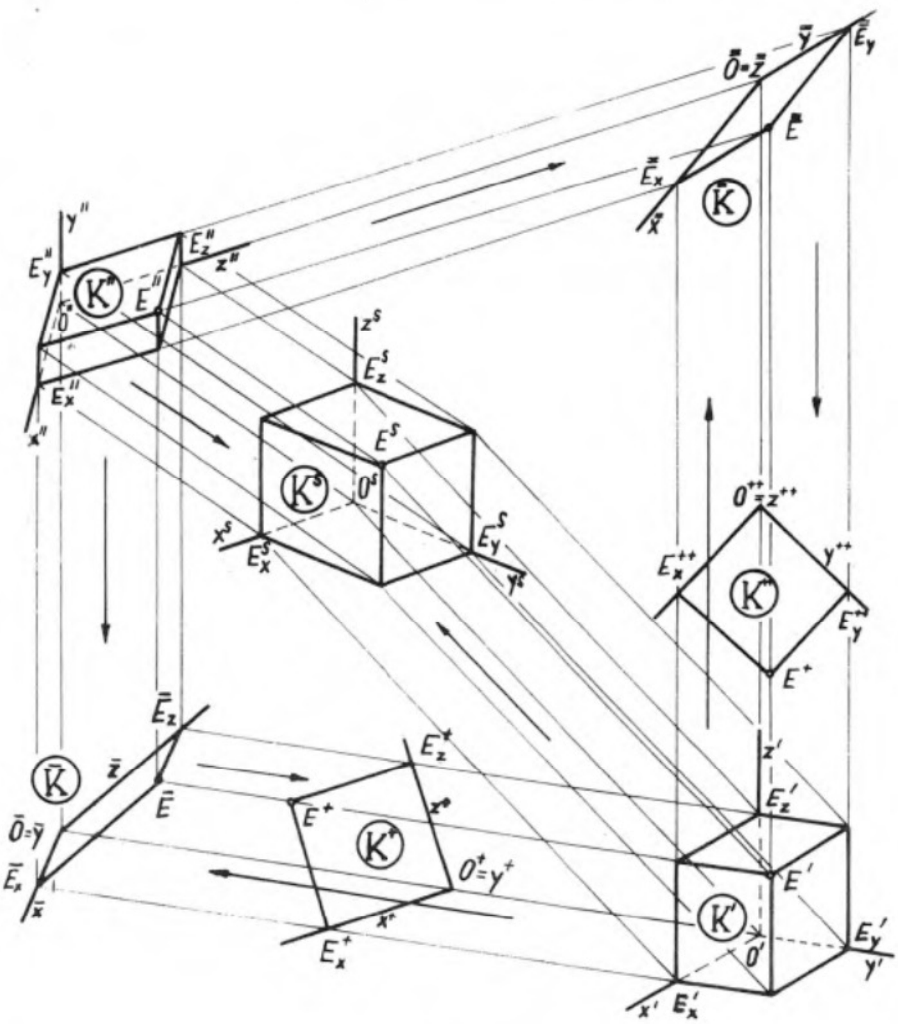

Abb. 1

Punktes $P \in \mathbf{K}$ in $\mathbf{K}'$, bzw. $\mathbf{K}''$ bezeichnen wir mit P', bzw. P''. Nehmen wir jetzt zwei Zentren S' und S'' und bringen wir die Linien $S'P'$ und $S''P''$ zum Einschneiden. Dieses Verfahren wird zentrales Einschneideverfahren genannt. Das so entstandene Bild $\mathbf{K}^*$ ist im allgemeinen kein perspektivisches Bild von **K**.

Satz 1. *Das zentrale Einschneideverfahren führt dann und nur dann zu einem perspektivischen Bild* $\mathbf{K}^S$, *wenn an den Achsen* x, y, z *solche von* O *verschiedene Punkte* L_x, L_y, L_z *existieren, für welche* L'_x, L'_y, L'_z *und* L''_x, L''_y, L''_z *auf die Verbindungsgerade* $S'S''$ *fallen, und* $S'O' \nparallel S''O''$.

BEWEIS. *Die Bedingungen sind notwendig.* Existierten nämlich solche Punkte L_x, L_y, L_z nicht, so wären die x^S, y^S, z^S (oder mindestens eine von ihnen) keine Geraden. Dies bedeutet, daß $S', L'_x, L'_y, L'_z, L''_z, L''_y, L''_x, S''$ kollinear sein müssen. Wäre weiterhin $S'O' \| S''O''$, so würde sich O^S in den Unendlich stoßen, und wir würden kein perspektivisches Bild erhalten. L_x, L_y, L_z müssen weiterhin von O verschieden sein. Würde nämlich einer von ihnen, z.B. L_x mit O zusammenfallen, so müßten $S', L'_x = O', L''_x = O'', S''$ kollinear sein. Wir betrachten diejenige an O liegende Gerade g von $\mathbf{K}$, dessen Bild g' in $\mathbf{K}'$ ein mit O' zusammenfallender Punkt ist (siehe Abb. 2.). Ähnlicherweise betrachten wir die an O liegende Gerade h von $\mathbf{K}$, dessen Bild h'' in $\mathbf{K}''$ mit O'' zusammenfällt. Die Bilder g^* und h^* von g und h in $\mathbf{K}^*$ ergeben sich nach unserem zentralen Einschneideverfahren als Punkte. Ist $\mathbf{K}^*$ ein perspektivisches Bild von $\mathbf{K}$, so muß es ein projektives Bild $\mathbf{K}^* = \pi(Z(\mathbf{K}))$ einer Zentralprojektion $Z(\mathbf{K})$ von $\mathbf{K}$ sein. Da $g^* = \pi(Z(g))$ ein Punkt ist, muss auch $Z(g)$ ein Punkt sein. Dies kann aber nur dann vorkommen, wenn das Projektionszentrum an g liegt. Dasselbe gilt auch für h (den wir von g verschieden annehmen können). Dies bedeutet, daß das Projektionszentrum der Zentralprojektion Z mit dem Schnittpunkt O von g und h identish sein muß. Dann müssten aber auch $Z(x)$, $Z(y)$ und $Z(z)$ und daher auch $\pi(Z(x)) = x^*$, $\pi(Z(y)) = y^*$, $\pi(Z(z)) = z^*$ Punkte sein, was für ein perspektivisches Bild unmöglich ist. Dies beweist, daß L_x, L_y, L_z von O notwendigerweise verschieden sein müssen, wenn wir $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^S$ erreichen wollen.

Abb. 2

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Betrachten wir einen beliebigen Punkt $P \in \mathbf{K}$. P^* liegt nach unserer Konstruktion auf der Verbindungsgeraden $S'P'$. Wir beweisen, daß diese Abbildung geradentreu ist. Sei nämlich g eine Gerade von K, und G ihr Schnittpunkt mit der Ebene $\sigma = [L_x, L_y, L_z]$. σ' fällt dann — nach den Bedingungen des Satzes — mit der Geraden $S'S''$ zusammen. Daher fällt auch G' auf $S'S''$. Dasselbe gilt offensichtlich für G'; d.h. auch G'' liegt an $S'S''$. Da aber g' und g'' zu g projektive Punktreihen sind, so führt unser zentrales Einschneideverfahren nach dem Satz von Steiner zu einer Geraden g^*; d.h. die Abbildung ist geradentreu. Die Abbildung $\mathbf{K}' \to \mathbf{K}^*$ ist dann aber eine zentrale Kollineation. Das bedeutet, daß die Abbildung $\mathbf{K} \to \mathbf{K}' \to \mathbf{K}^*$ eine Projektivität, und daher $\mathbf{K}^*$ ein perspektivisches Bild von $\mathbf{K}$ ist, welches wir mit $\mathbf{K}^s$ bezeichnen.

Wir bemerken daß die Bedingungen des Satzes auf mannigfache Weise erfüllbar sind. Wir können z.B. L_x, L_y, L_z beliebig wählen, und dann noch S', S''; O', U'_x, U'_y, U'_z; O'', U''_x, U''_y, U''_z willkürlich aufnehmen (siehe Abb. 3). Wir wissen, daß ein perspektivisches Bild $\mathbf{K}'$ oder $\mathbf{K}''$ von $\mathbf{K}$ festgesetzt ist, wenn O', O'' und noch an jeder Achse die Bilder von zwei weiteren Punkten festgewählt sind. Setzen wir die Bilder L'_x, L'_y, L'_z; L''_x, L''_y, L''_z als die Schnittpunkte von x', y', z'; x'', y'', z'' und der Geraden $S'S''$ fest, so ist auch $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$ festgesetzt und zwar auf solche Weise, daß auch die Bedingungen des Satzes erfüllt sind.

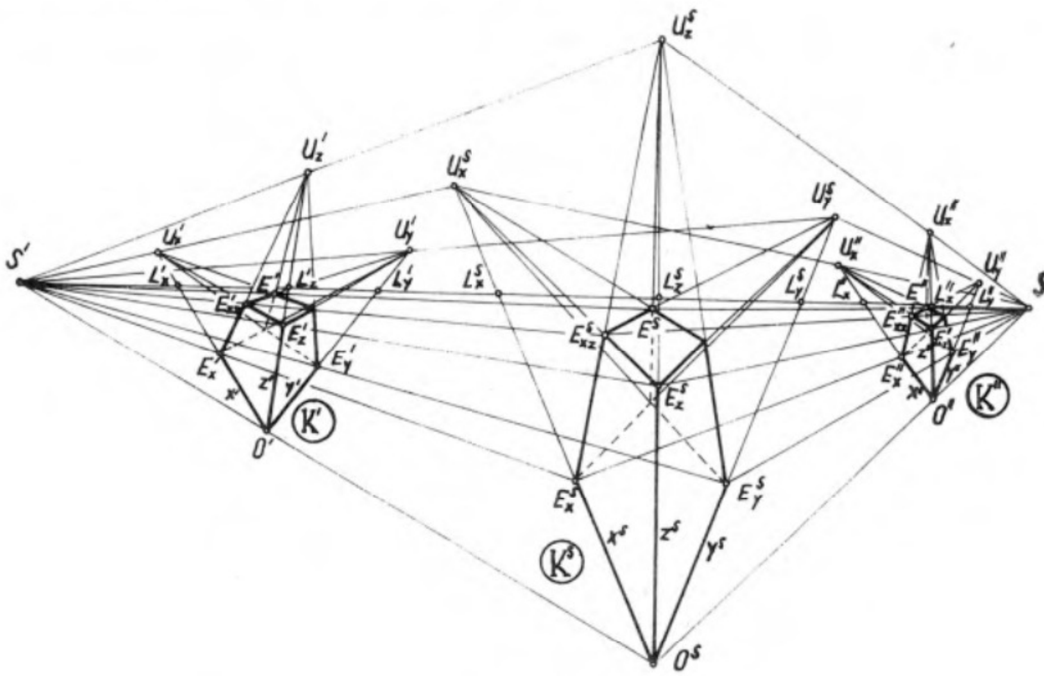

Abb. 3

2. $\mathbf{K}_{yz}$ bezeichne den Seitenriß von K aus der Richtung der x Achse. Wir wollen jetzt aus $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ ausgehend durch unser zentrales Einschneideverfahren ein solches perspektivisches Bild von $\mathbf{K}$ erzeugen, für welches die Bilder der mit der x Achse parallelen Geraden überall in Punkte degenerieren. Ein solches perspektivisches Bild von $\mathbf{K}$ werden wir ein perspektivisches Bild des Seitenrisses $\mathbf{K}_{yz}$ nennen.

Satz 2. *Das zentrale Einschneideverfahren führt aus zwei perspektivischen Bildern* $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$ *ausgehend dann und nur dann zu einem perspektivischen Bild des Seitenrisses* $\mathbf{K}_{zy}$, *wenn*

a) $S' = U'_x$, $S'' = U''_x$ *gilt, und*

b) *auf der y und der z Achse solche Punkte* L_y, L_z *existieren, daß* S', L'_y, L'_z, L''_z, L''_y, S'' *kollinear sind, und*

c) $S'O' \nparallel S''O''$ *gilt.*

BEWEIS. *Die Bedingungen sind notwendig.* Wäre nämlich a) nicht erfüllt, so könnte x^* mit O^* nicht zusammenfallen, und unser Bild $\mathbf{K}^*$ wäre kein perspektivisches Bild von $\mathbf{K}_{yz}$.

Nehmen wir jetzt an, daß $\mathbf{K}^*$ ein perspektivisches Bild $\mathbf{K}^S_{yz}$ von $\mathbf{K}_{yz}$ ist. S' fällt an x, (siehe Abb. 4.) S'' fält an x'', aber a) ist nicht erfüllt z.B. gilt $S' \neq U'_x$. Wir zeigen, daß dies zu einem Wiederspruch führt. Wir betrachten einen von O verschiedenen Punkt P an der $O(y, z)$ Ebene. PU_x ist im Raum eine mit der x Achse parallele Gerade. Ihr Bild am Seitenriß $\mathbf{K}_{yz}$ und daher auch am $\mathbf{K}_{yz}^S$ ist ein Punkt. Die Relation zwischen $\mathbf{K}'_{yz} \subset \mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}_{yz}^S$ ist eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum S'. Wegen $S' \neq U'_x$ ist $P'U'_x$ kein Projektionsstrahl in dieser zentralen Kollineation, und daher kann $P^S U_x^S$ nicht in einen Punkt degenerieren, d.h. $\mathbf{K}_{yz}^S$ wäre kein perspektivisches Bild eines Seitenrisses von $\mathbf{K}_{yz}$ in Wiederspruch zu unserer Annahme. — Dies beweist die Notwendigkeit von a).

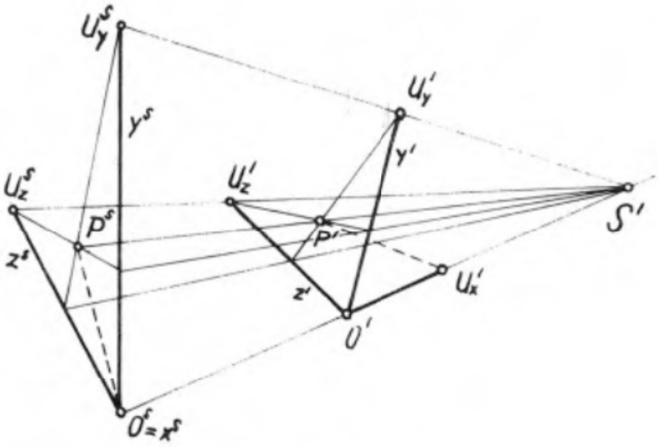

Abb. 4

Die Notwendigkeit von b), folgt aus dem Satz 1, nämlich ist das entstandene Bild ein perspektivisches Bild. Wir erhalten b) wenn der Punkt U_x die Rolle von L_x übernimmt.

Die Notwendigkeit von c) ist ebenso zu einschen, wie wir das im **1** getan haben.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Das entstandene $\mathbf{K}^*$ ist ein perspektivisches Bild von $\mathbf{K}$, da die Bedingungen des Satzes erfüllt sind. Weiterhin ist es auf Grund der Bedingung a) klar, das x^S zu einem mit O^S zusammenfallenden Punkt degeneriert, und die Bilder aller mit der x Achse parallelen Geraden degenerieren in je einen Punkt, was schon sichert, daß das entstandene perspektivische Bild $\mathbf{K}^S$ mit einem perspektivischen Bild eines Seitenrisses $\mathbf{K}_{yz}$ identisch ist (siehe Abb. 5.).

Man sieht auf ähnliche Weise wie am Ende des No. 1, daß die Bedingungen des Satzes 2. auf mannigfache Weise erfüllbar sind.

Die ausgezeichnete Rolle der x Achse in Satz 2 kann offensichtlich durch jede andere Achse übernommen werden.

3. Betrachten wir jetzt den Fall, wenn $\mathbf{K}'$ ein perspektivisches Bild $\mathbf{K}'_{yz}$ des Seitenrisses K_{yz}, und $\mathbf{K}''$ ein perspektivisches Bild $\mathbf{K}''_{xz}$ des Seitenrisses $\mathbf{K}_{xz}$ ist. Wir wollen untersuchen, in welcher Form sich die in Satz 1. beschriebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen die $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^S$ sichern, für die jetzt betrachteten speziellen $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ realisieren.

Satz 3. *Das zentrale Einschneiden der perspektivischen Bilder $\mathbf{K}'_{yz}$ und $\mathbf{K}'_{xz}$ der Seitenriße $\mathbf{K}_{yz}$ und $\mathbf{K}_{xz}$ führt dann und nur dann zu einem perspektivischen Bild $\mathbf{K}^S$, wenn*

a) *die Punkte S', U'_y, U''_x, S'' kollinear sind, und*

b) *auf der z Achse ein solcher von O verschiedener Punkt* L_z *existiert, daß auch* S', L'_z, L''_z, S'' *kollinear sind, und*

c) $S'O' \nparallel S''O''$ *gilt.*

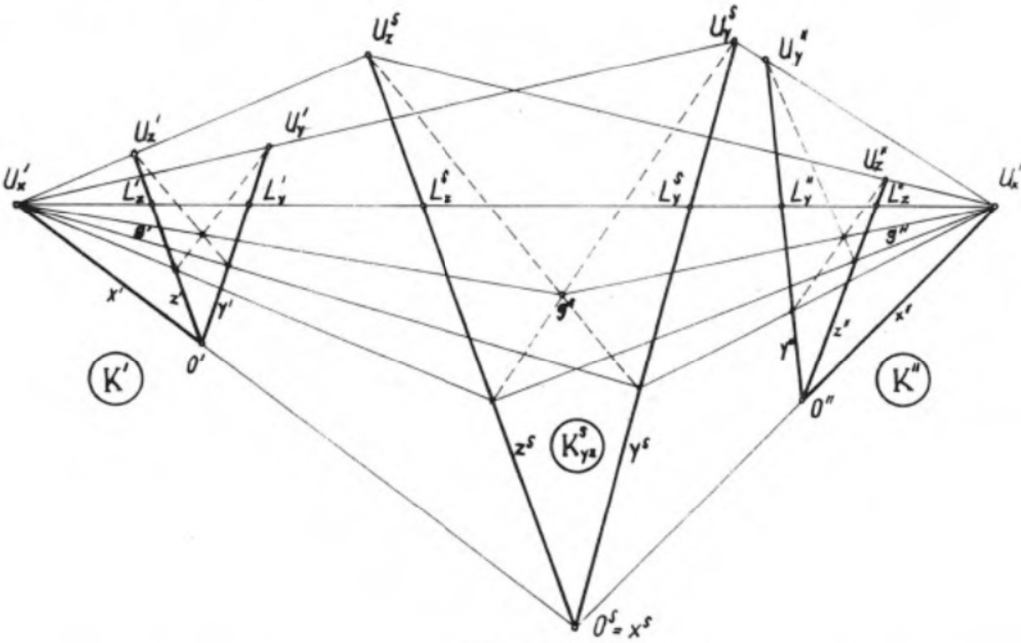

Abb. 5

BEWEIS. *Die Bedingungen sind notwendig*. Führt das zentrale Einschneideverfahren zu einem perspektivischen Bild, so existieren an den Achsen x, y, z nach dem Satz 1 solche Punkte L_x, L_y, L_z daß

$$(*) \qquad S',\ L'_x,\ L'_y,\ L'_z,\ L''_z,\ L''_y,\ L''_x,\ S''$$

kollinear sind. Wäre $L_x \neq U_x$, so wäre $L'_x = O'$ und daher läge O' an $S'S''$. Die Kollinearität von S', L'_x, L'_z, L''_z, L''_x, S'' kann aber in einer solchen Lage nur dann bestehen, wenn auch $L_z = O$ ist. Daraus würde aber die Kollinearität von S', O', O'', S'' folgen, was nach dem 1. zu keinem perspektivischen Bild führen kann. Daher muß $L_x = U_x$ sein, was wegen $(*)$ die Kollinearität von S', U''_x, S'' bedeutet wie im Teil a) unseres Satzes gefordert wird. Nimmt die y Achse die Rolle der x Achse über, so führt ein ähnlicher Gedankengang zur Notwendigkeit der Kollinearität von S', U'_y und S''. Dies zeigt die Notwendigkeit der Bedingung a) des Satzes 3. Die Notwendigkeit der Bedingung b) ist aus Satz 1 klar. Die Notwendigkeit von c) ist trivial.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Es genügt das Erfülltsein der Bedingungen des Satzes 1 zu zeigen, d.h. die Kollinearität von

$$(**) \qquad S',\ L'_x,\ L'_y,\ L'_z,\ L''_z,\ L''_y,\ L''_x,\ S''$$

und $L_x, L_y, L_z \neq O$.

In unserem jetzigen Fall sind $L_x = U_x$ und $L_y = U_y$. Die Kollinearität von S', $L'_y = U'_y$, L'_z, L''_z, $L''_x = U''_x$, S'' ist durch die Bedingungen unseres Satzes gesichert.

Wir bemerken, daß in $\mathbf{K}'$ jeder Punkt als das Bild von U_x aufgefasst werden kann, da bei der Konstruktion von K' das Projektionszentrum und U_x zusammenfallen. Aus ähnlichen Gründen gilt desselbe für U''_y in K''. Daher können $U'_x = L'_x$ und $U''_y = L''_y$ als Punkte der Geraden $S'S''$ betrachtet werden, was schon die gewünschte Kollinearität der 8 Punkte von ($\ast\ast$) sichert.

L_x, L_y, $L_z \neq O$ sind teils wegen $L_x = U_x$ und $L_y = U_y$, teils wegen Bedingung b) des Satzes erfüllt.

Eine solche Anordnung zeigt Abb. 6.

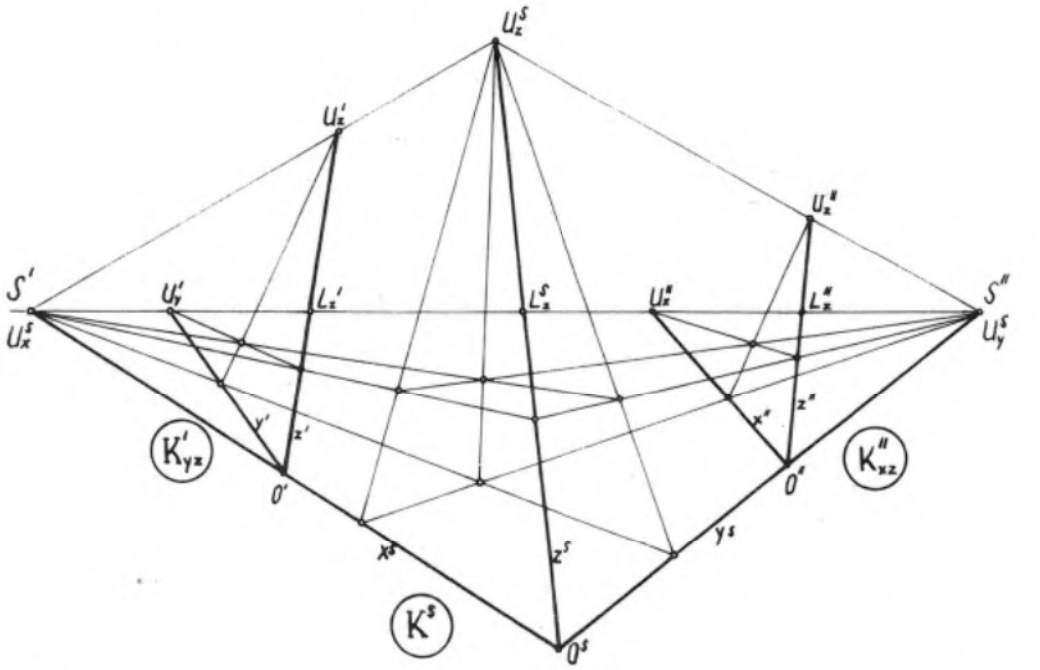

Abb. 6

Satz 4. *Das zentrale Einschneideverfahren ist eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens.*

Beweis. Das Eckhartsche Einschneideverfahren geht von zwei axonometrischen Bildern $\mathbf{K}'_a$, $\mathbf{K}''_a$ und von Richtungen r'_a, r''_a aus. Betrachten wir nun $\mathbf{K}'_a$ und $\mathbf{K}''_a$ als die zwei perspektivischen Bilder $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ und die unendlichfernen Punkte von r'_a und r''_a als die zwei Zentren S', S''. Unser zentrales Einschneideverfahren ist dann mit dem Eckhartschen Einschneideverfahren identisch. D.h. jede konkrete Durchführung des Eckhartschen Einschneideverfahrens kann als eine konkrete Durchführung des zentralen Einschneideverfahrens betrachtet werden. — In diesem Fall müssen L'_x, L'_y, L'_z, L''_z, L''_y, L''_x als die Schnittpunkte von $S'S''$ und von x', y' z', x'', y'', z'' der Reihe nach mit U'_x, U'_y, U'_z, U''_x, U''_y U''_z zusammenfallen, was offensichtlich nur eine spezielle Erfüllung der Bedingungen des Satzes 1. ist; d.h. das zentrale Einschneideverfahren ist eine wirkliche Verallgemeinerung.

Praktische Anwendungen

Wir gelangen zu einer wichtigen Anwendung, wenn die Seitenrisse des Satzes 3. einfache Mongeschen Projektionen sind (z. B. senkrechte Projektionen auf die Koordinatenebene (y, z) bzw. (x, z)). Um die Bedingung a) des Satzes 3. zu erfüllen, muß U'_y und U''_x auf die Gerade $S'S''$ fallen. Da aber $\mathbf{K}'_{yz}$ und $\mathbf{K}''_{xz}$ jetzt Mongesche Projektionen sind, ergeben sich U'_y und U''_x als wirkliche Unendliche Punkte, und deshalb müssen $\mathbf{K}'_{yz}$ und $\mathbf{K}''_{xz}$ so gesetzt werden, daß $y' \| S'S''$ und $x'' \| S'S''$ ausfallen. Daraus folgt, daß z', $z'' \perp S'S''$. z' und z'' sind ferner zwei kongruente Punktreihen, als senkrechte Projektionen auf die mit ihnen parallelen $\mathbf{K}_{yz}$, $\mathbf{K}_{xz}$ Bildebenen. — Wir bezeichnen den Schnittpunkt von z' und $S'S''$ mit A', und den Schnittpunkt von z'' und $S'S''$ mit B''. Um die Bedingung b) des Satzes 3. zu erfüllen, müssen

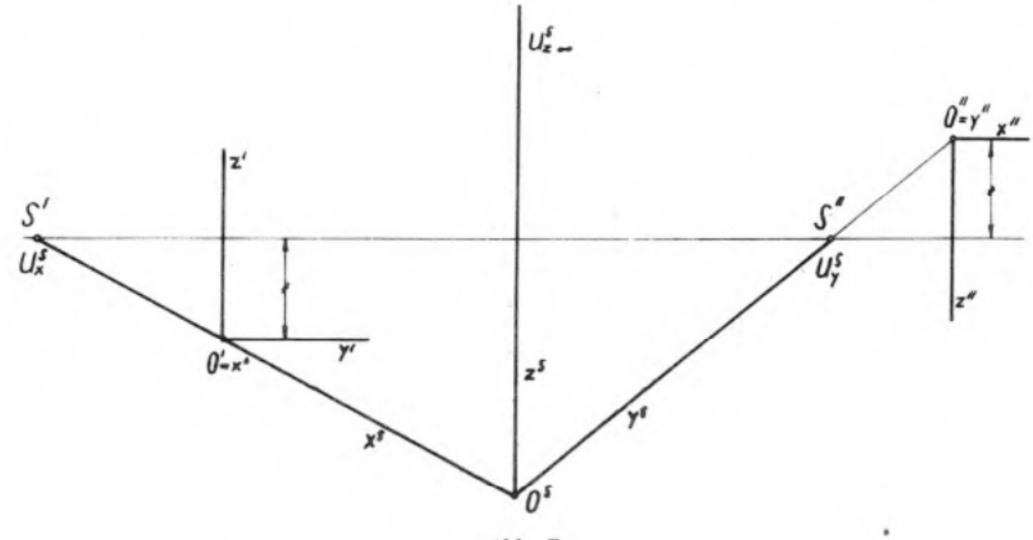

Abb. 7

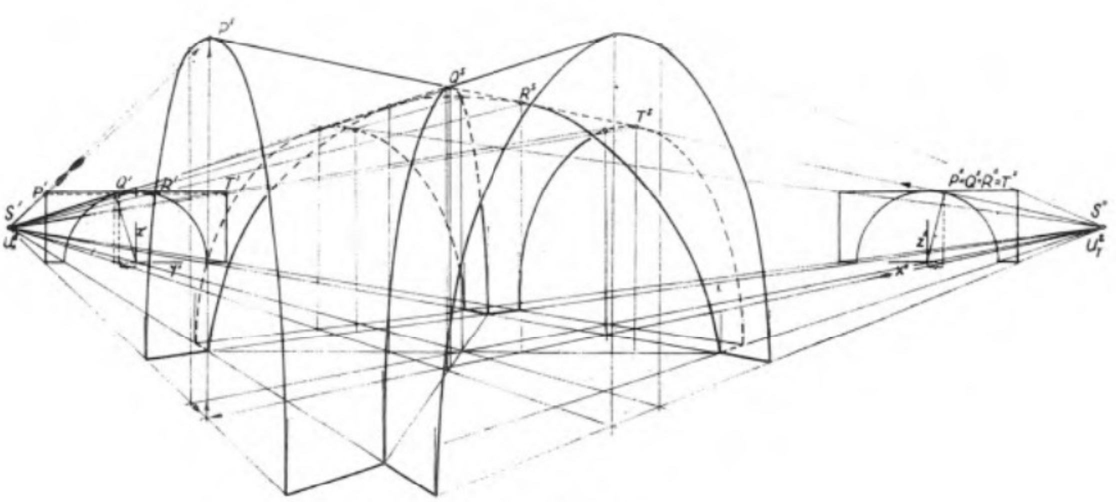

Abb. 8

A' und B'' die Bilder eines einzigen Punktes L_z der z Achse sein: $A'=L'_z$, $B''=L''_z$. Dann ist aber wegen der erwähnten Kongruenz von z' und z'' $O'L'_z=O''L''_z$, d.h. $\mathbf{K}'_{yz}$ und $\mathbf{K}''_{xz}$ müssen so gesetzt werden, daß O' und O'' auf die gleiche Entfernung von $S'S''$ liegen. — Endlich dürfen sich wegen der Bedingung c) des Satzes 3. $S'O'$ und $S''O''$ nichtineiner parallelen Lage befinden. — Eine solche Anordnung zeigt Abb. 7.

Wir können feststellen, daß z^S affin zu der räumlichen z Achse ist, da U_z^S ins Unendliche fällt. z^S ist senkrecht auf $S'S''$. S' fällt mit U_x^S und S'' mit U_y^S zusammen. Diese Umstände deuten auf eine nähere Beziehung zur speziellen Zentralprojektion hin, worauf wir in einer späteren Arbeit zurückkommen wollen.

In Abb. 8. haben wir auch das perspektivische Bild eines Klostergewölbes konstruiert, was auch die Schnelle und Einfachheit der Konstruktion zeigt. P^S, Q^S, R_S und T^S sind Konturpunkte des perspektivischen Bildes.

Literatur

[1] L. ECKHART, Affine Abbildung und Axonometrie, *Sitzungsber. der Akad. Wien, Math. Nat. Kl. Abt.* II. (1937), 51—56.

[2] E. STIEFEL, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, *Basel* (1947).

[3] O. TAMMI, On the analytic foundations of central projection. II. *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.—Math.* 30 (1965), no. 10.

(Eingegangen am 30. August 1966.)