Note sur un théorème de H. Davenport et de K. F. Roth

Par K. GYŐRY (Debrecen)

A. THUE ([5]) a démotré le théorème suivant: Soit α un nombre algébrique de degré $n \geqq 2$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante arbitraire. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de fractions rationnelles u/v pour satisfaire à l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}}. \tag{1}$$

En utilisant ce résultat, Thue a prouvé que l'équation

$$f(x, y) = a \tag{2}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y) en entiers rationnels, si $a \neq 0$ est un nombre rationnel arbitraire, et si $f(x, y)$ est un polynôme homogène à coefficients rationnels qui n'est pas une puissance d'un polynôme homogène linéaire ou quadratique.

E. MAILLET ([2]) et puis C. L. SIEGEL ([4]) ont prouvé que si $f(x, y)$ est un polynôme homogène irréductible de degré $n \geqq 3$ avec des coefficients entiers rationnels, et si $g(x, y)$ un polynôme à coefficients entiers rationnels de degré au plus $c(n)$ (où $c(n)$ est une constante bien définie dépendant de n), alors, le nombre des solutions en entiers rationnels de l'équation

$$f(x, y) = g(x, y) \tag{3}$$

est aussi fini.

En 1955 K. F. ROTH ([3]) a démontré: Si α est un nombre algébrique de degré $n \geqq 2$, et si $M > 0$, $\varepsilon > 0$ sont des constantes arbitraires, alors, il n'existe qu'un nombre fini de couples d'entiers rationnels $(u, v) = 1$, $v > 0$ pour satisfaire à l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{M}{v^{2+\varepsilon}}. \tag{4}$$

Au moyen de ce théorème, H. DAVENPORT et K. F. Roth ont donné la généralisation suivante du résultat mentionné de E. Maillet et de C. L. Siegel:

Soit $f(x, y)$ un polynôme homogène irréductible de degré $n \geqq 3$ avec des coefficients entiers rationnels, et soit $g(x, y)$ un polynôme à coefficients entiers rationnels de degré au plus $(n-3)$. Alors l'équation (3) n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y) en entiers rationnels.

En appliquant le théorème d'approximation de Roth, on peut montrer la vérité du théorème précédent aussi dans le cas où $f(x, y)$ n'est pas nécessairement irréductible, c'est-à-dire les facteurs linéaires de $f(x, y)$ ne sont pas nécessairement différents.

Théorème. *Soit*

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n; \; a_0a_n \neq 0 \tag{5}$$

un polynôme à coefficients entiers rationnels de degré $n \geqq 3$, et soit $g(x, y) \not\equiv 0$ un polynôme à coefficients entiers rationnels de degré s tel que $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont premiers entre eux). Prenons l'équation*

$$f(x, y) = g(x, y). \tag{6}$$

Si l $(l < n)$ est le maximum de la multiplicité des racines rationnelles de $f(x, 1)$, et si k $(k < n/2)$ est le maximum de la multiplicité des racines réelles non rationnelles de $f(x, 1)$ et en plus

$$s < n - \max \{l, 2k\}, \tag{7}$$

alors, il n'existe qu'un nombre fini de solutions (x, y) en entiers rationnels de l'èquation (6).

Remarque. Ce théorème contient le résultat précédent de Thue. En effet, si $g(x, y) \equiv a \neq 0$, $l < n$ et $2k < n$, l'équation (6), c'est-à-dire l'équation (2), n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels.

D'autre part, il contient aussi le théorème de Davenport et de Roth. En effet, si $f(x, 1)$ est irréductible et par conséquent toutes les racines de $f(x, 1)$ sont simples alors $\max \{l, 2k\} = 0$ ou 2. Donc si

$$s < n - 2,$$

notre résultat donne justement le théorème cité.

DÉMONSTRATION. Supposons que l'équation (6) admet un nombre infini de solutions (x, y) en entiers rationnels. Alors, il existe une infinité de solutions (x, y) pour satisfaire à l'inégalité

$$|x| \leqq |y| \quad \text{ou} \quad |y| \leqq |x|.$$

Si l'on a $|y| \leqq |x|$ pour un nombre infini de solutions (x, y), alors, en utilisant la symétrie de $f(x, y)$ et en remplaçant x par y et y par x, on obtient la première inégalité. Il suffit donc de supposer que $|x| \leqq |y|$ pour un nombre infini de solutions (x, y). En plus, on peut supposer $y \neq 0$ puisque $y = 0$ ne donne qu'un nombre fini de solutions.

Il en résulte que chaque solution restée (x, y) peut être representée dans la forme $x = tu$, $y = tv$ où $(u, v) = 1$, $v > 0$ et $|u| < v$ si $|x| < |y|$, et $|u| = v = 1$ si $|x| = |y|$. Nous montrons que le nombre des couples obtenus (u, v) est également infini. En effet, si (u, v) est un couple fixé, l'équation (6) a au plus n solutions différentes en t, sauf dans le cas où les coefficients de toutes les puissances de t sont égaux à zéro, c'est-à-dire

$$a_0u^n + a_1u^{n-1}v + \ldots + a_nv^n = 0$$

*) Donc, le polynôme $f(x, y) - g(x, y)$ n'est pas nécessairement irréductible.

et (u, v) est un zéro de tous les polynômes homogènes de $g(x, y)$. Mais dans ce cas $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont divisibles par le polynôme $(vx-uy)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, si (u, v) est l'un des couples obtenus, on peut trouver un nombre entier $t \neq 0$ tel que (ut, vt) satisfait à l'équation (6). Alors on a

$$|t|^n |a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + \ldots + a_n v^n| = |g(ut, vt)| \leqq$$

$$\leqq G\big(1 + 2v|t| + \ldots + (s+1)v^s |t|^s\big) \leqq G \binom{s+2}{2} v^s |t|^s$$

où $G>0$ est le maximum des valeurs absolues des coefficients de $g(x, y)$. Mais

$$v^n \left| f\left(\frac{u}{v}, 1\right) \right| = |a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + \ldots + a_n v^n| \leqq G \binom{s+2}{2} v^s$$

puisque $s<n$, et finalement

$$\left| f\left(\frac{u}{v}, 1\right) \right| \leqq \frac{G \binom{s+2}{2}}{v^{n-s}} \tag{8}$$

pour chaque couple (u, v) mentionné.

D'abord, supposons que le polynôme $f(x, 1)$ n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire $k=l=0$. Dans ce cas tous les couples (u, v) satisfont à l'inégalité

$$0 < c_1 < \left| f\left(\frac{u}{v}, 1\right) \right| \leqq \frac{G \binom{s+2}{2}}{v^{n-s}},$$

c_1 étant une constante convenablement choisie. Comme l'ensemble des valeurs v n'est pas borné on obtient une contradiction. Donc, dans ce cas l'équation (6) n'a qu'un nombre fini de solutions.

D'autre part, supposons que $f(x, 1)$ a une racine réelle, c'est-à-dire qu'il admet une décomposition

$$f(x, 1) = a_0 \prod_{j=1}^{r} (x-\alpha_j)^{k_j} h(x)$$

où les α_j sont des racines réelles différentes et $h(x)$ est un polynôme à coefficients réels, sans racine réelle.

On peut distinguer deux cas:

1. Si l'ensemble de toutes les fractions u/v n'a pour point d'accumulation aucune des racines réelles, alors, il existe une constante $c_2>0$ telle que

$$0 < c_2 < \left| f\left(\frac{u}{v}, 1\right) \right| \leqq \frac{G \binom{s+2}{2}}{v^{n-s}}$$

pour un nombre infini de fractions u/v, ce qui entraîne encore une contradiction.

2. Enfin supposons qu'une suite partielle u_i/v_i des fractions u/v converge vers quelqu'une des racines réelles, par exemple $\frac{u_i}{v_i} \to \alpha_j$ quand $i \to \infty$. Alors, dès que i est assez grand on a

$$0 < c_3 < \frac{\left|f\left(\frac{u_i}{v_i}, 1\right)\right|}{\left|\alpha_j - \frac{u_i}{v_i}\right|^{k_j}}$$

avec une constante convenable c_3, d'où

$$\left|\alpha_j - \frac{u_i}{v_i}\right|^{k_j} < \frac{\left|f\left(\frac{u_i}{v_i}, 1\right)\right|}{c_3} \leqq \frac{Gc_3^{-1}\binom{s+2}{2}}{v_i^{n-s}}.$$

On en déduit que

$$\left|\alpha_j - \frac{u_i}{v_i}\right| < \frac{c_4}{v_i^{\frac{n-s}{k_j}}} \tag{9}$$

pour une infinité de fractions u_i/v_i telles que $(u_i, v_i) = 1$ et $v_i > 0$. D'après le théorème d'approximation de Roth on a donc

$$\frac{n-s}{k_j} \leqq 2$$

d'où

$$s \geqq n - 2k_j. \tag{10}$$

En plus, si α_j est rationnel, on a nécessairement

$$\frac{n-s}{k_j} \leqq 1$$

et finalement

$$s \geqq n - k_j. \tag{11}$$

Mais les inégalités (10) et (11) sont contraires à l'hypothèse

$$s < n - \max\{l, 2k\},$$

ainsi nous avons obtenu une contradiction aussi dans ce cas.

Donc, il n'existe en effet qu'un nombre fini de solutions (x, y) en entiers rationnels de l'équation (6), c.q.f.d.

Bibliographie

[1] H. Davenport—K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 160—167.
[2] E. Maillet, Sur un théorème de M. Axel Thue, *Nouvelles Annales de Math. Ser. 4,* **16** (1916), 338—345.
[3] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1—20.
[4] C. L. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.* **10** (1921), 173—213.
[5] A. Thue, Om en general i store hele tal uløsbar ligning, *Skrifter udgivne af Videnskabs—Selskabet i Christiania,* 1908.

(Reçu le 4. novembre 1966.)