Einige Bemerkungen über Kurven und Grundelementfolgen in allgemeinen Räumen

Von ARTHUR MOÓR (Szeged)

§ 1. Einleitung

In unserer Arbeit [3] [1]) begründeten wir eine affine bzw. metrische Übertragungstheorie derjenigen Räume deren Grundelemente (x^i, v^i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ sich nach dem Transformationsgesetz

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^n), & \bar{v}^j = \dfrac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r} v^r \end{cases}$$

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k}\right| \neq 0, \quad \operatorname{Det}\left|\frac{\partial \hat{v}^j}{\partial \bar{v}^k}\right| \neq 0$$

transformieren. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ der Grundelemente (x^i, v^i) geht offenbar in einen Linienelementraum im gewöhnlichen Sinne über, falls $\hat{v}^i \equiv \bar{v}^i$ gilt, da dann die Grundtransformationen (1.1) eben die Transformationen der gewöhnlichen Linienelemente bestimmen. v^i und $\varrho v^i (\varrho > 0)$ bedeuten dasselbe Grundelement, da die v^i immer nur bis auf einen Faktor bestimmt sind. Die Größen der $\mathfrak{M}_n$-Räume sind also in den v^i homogen.

Eine Kurve im engeren bzw. im weiteren Sinne ist nach der Definition von § 8 unserer Arbeit [3] eine einparametrige Folge

$$x^i(t),\ v^i(t)$$

der Grundelemente, für die

$$(1.2)\qquad \frac{dx^i}{dt} = b^i_j\big(x(t), v(t)\big) v^j(t)$$

besteht [2]) bzw. eine beliebige einparametrige Folge der Grundelemente. Die Größe b^i_j ist eine Grundgröße unseres Raumes, die die folgende Eigenschaft hat: eine

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten auf das Schriftenverzeichnis am Ende unseres Aufsatzes.

[2]) Wir benützen jetzt und im folgenden immer die Bezeichnungen von [3]. Dementsprechend ist die Transformationsformel von b^i_j in (5. 3) von [3] angegeben.

Kontraktion mit b^i_j von der Form $b^i_j V^j$, wo V^j ein verallgemeinerter Vektor mit dem Transformationsgesetz

$$\hat{V}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} V^r$$

bedeutet, gibt einen Vektor im gewöhnlichen Sinne (vgl. unsere Fußnote 2).

Im folgenden wollen wir annehmen, daß in unserem $\mathfrak{M}_n$-Raum durch einen symmetrischen verallgemeinerten Tensor: $g_{ij}(x, v)$ (vgl. [3] § 2) eine positiv definite Metrik definiert ist. Die Invariante

$$(1.3) \qquad s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\gamma_{ik}(x(t), v(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt, \quad \gamma_{ik} \overset{\text{def}}{=} g_{rs} a^r_i a^s_k,$$

wo a^i_r die zu b^i_j inverse Größe ist (vgl. [3], § 5 und § 8), kann also als die Bogenlänge der Grundelementfolge $(x^i(t), v^i(t))$ interpretiert werden. Die Grundelementfolge $(x^i(t), v^i(t))$ übernimmt schon oft in der gewöhnlichen Linienelementräumen die Rolle der Kurven der Punkträume. Eben deshalb scheint es uns wichtig zu sein, die Frenetformeln für die Grundelementfolgen, d.h. für die Kurven im erweiterten Sinne zu bestimmen. Wir werden ferner auch eine solche Übertragungstheorie — bezeichnet mit D^* — angeben, bezüglich der die begleitenden n-Beine jeder Kurven parallel verschoben sind. Den einfachsten Fall, in dem nur der Tangentenvektor längs der Kurve im Sinne der D^*-Übertragung parallel verschoben ist, hat in den Riemannschen Räumen E. Fermi und A. G. Walker bestimmt (vgl. [7], Chap. I. § 4.).

Wir wollen noch auf die Arbeiten [4], [5] und [8] von Professoren A. Rapcsák und O. Varga hinweisen, in denen schon erkennbar ist, daß auch in gewöhnlichen Linienelementräumen die Linienelementfolgen die Rolle der gewöhnlichen Kurven übernehmen. In [4] und [8] sind für die Linienelemetfolgen gewisse Reihenentwicklungen angegeben, zwar ist in diesen Arbeiten $v^i(t)$ von den $x^i(t)$ nicht vollständig unabhängig. Durch die Frenetformeln kann man bekanntlich eben solche Reihenentwicklungen bestimmen.

Dementsprechend werden wir in § 2 die Frenetformeln der Grundelementfolgen bestimmen. Es wird sich zeigen, daß wenn $\dot{x}^i$ und v^i miteinander nicht durch (1.2) verbunden sind, dann $2(n-1)$ Invarianten nötig sind, um die Bestimmung einer Grundelementfolge angeben zu können. In § 3 zeigen wir, daß mit Hilfe der Frenetformeln auch gewisse andere Übertragungstheorien existieren in Bezug auf welche die begleitenden n-Beine der Kurven immer parallel verschoben sind. Diese Übertragungstheorien sind die Verallgemeinerungen der sogenannten Fermi—Walkerschen Übertragung (vgl. [7]; I. § 4 insb. S. 13). In § 4 werden wir zuletzt die Krümmungsgrößen einer solchen speziellen D^*-Übertragung bestimmen.

§ 2. Die Frenetformeln der Kurven im engeren bzw. im weiteren Sinne

E. Cartan bemerkte in seiner Arbeit [1] Kap. IX. S. 19, daß die Frenetformeln in den dreidimensionalen Finslerräumen für die Kurven im gewöhnlichen Sinne ebenso gültig sind, wie im Riemannschen bzw. Euklidischen Raum. Für diese

Kurven gilt selbstverständlich im Finslerschen Fall statt (1. 2) die Relation:

$$\frac{dx^i}{ds} = v^i(s).$$

Diese Resultate können wir nach einigen kleineren Veränderungen unmittelbar in unsere $\mathfrak{M}_n$-Räume übertragen.

Vor allem bemerken wir, daß wenn die inverse Größe von b^i_j, d.h. a^i_j benützt wird (vgl. [3] Gleichung (5. 2)), dann

$$v^k = a^k_h(x, v)\frac{dx^h}{dt} \tag{2. 1}$$

mit (1. 2) gleichwertig ist, und die Bogenlänge (1. 3) kann in diesem Falle auch durch

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ik}(x(t), v(t))v^i(t)v^k(t)}\, dt \tag{2. 2}$$

angegeben werden. Wenn somit die Bogenlänge für Parameter gewählt wird, dann bestehen nach (1. 3) und (2. 1) die Relationen:

$$g_{rp}a^r_i a^p_k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1, \tag{2. 3a}$$

$$g_{ik}v^i v^k = 1. \tag{2. 3b}$$

Diese Relationen werden auch dann gültig sein, falls v^i und dx^i/ds miteinander nicht durch (1. 2) bzw. (2. 1) verknüpft sind, da in diesem Falle v^i — wegen der Homogemeität nullter Ordnung von g_{ik} in den v^j — mit einem Faktor multipliziert werden darf, und somit (2. 3b) noch keine wesentliche Beschränkung für die Linienelementfolge bedeutet. (2. 3a) drückt aus, daß der Parameter s die durch (1. 3) bestimmte Bogenlänge ist.

Jetzt können wir ganz analog dem Falle der Riemannschen Räume verfahren (vgl. [2] IV. § 1). Nach der Bezeichnung

$${}_{(1)}\eta^i \overset{\text{def}}{=} v^i$$

wird die invariante Ableitung (vgl. [3] § 3 und § 6) von (2. 3b) die Relation

$$g_{ik}\left(\frac{D}{ds}\,{}_{(1)}\eta^i\right){}_{(1)}\eta^k = 0$$

geben, woraus folgt, daß

$$\frac{D}{ds}\,{}_{(1)}\eta^i = \varkappa_1\,{}_{(2)}\eta^i \tag{2. 4}$$

besteht, wo ${}_{(2)}\eta^i$ ein zu ${}_{(1)}\eta^i$ orthogonaler verallgemeinerter Einheitsvektor und der Normierungsfaktor $\varkappa_1$ die erste Krümmung bedeutet.

Die allgemeine Frenetformeln können nun durch die Formeln

$$\frac{D}{ds}\,{}_{(\beta)}\eta^i = -\varkappa_{\beta-1}\,{}_{(\beta-1)}\eta^i + \varkappa_{\beta}\,{}_{(\beta+1)}\eta^i, \qquad \varkappa_0 = \varkappa_n = 0 \tag{2. 5}$$

angegeben werden [3]), wo für die verallgemeinerten Vektoren ${}_{(\beta)}\eta^i$:

$$g_{ik(\alpha)}\eta^i{}_{(\beta)}\eta^k = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (\delta_{\alpha\beta}\text{: } \textit{Kronecker-}\delta) \tag{2. 6}$$

besteht, ${}_{(\beta)}\eta^i$ also ein orthonormiertes n-Bein bestimmt; $\varkappa_\beta$ bezeichnet die β-te Krümmung der Kurve.

Da für $\beta = 1$ die Formel (2. 5) eben in (2. 4) übergeht, kann durch vollständige Induktion (2. 5) leicht — in der gewöhnlichen Weise — bewiesen werden, denn $Dg_{ij} = 0$ ist (vgl. [3] § 6).

Der Unterschied zwischen den Kurven der $\mathfrak{M}_n$-Räume und den Kurven der Finslerräume besteht also nur in der Relation (2. 1), da im Finslerschen Fall nach den vorigen $a^k_j = \delta^k_j$ gilt (vgl. [6], Kap. V. § 1.).

Nehmen wir jetzt an, daß v^i und dx^i/ds voneinander unabhängig sind, d.h. (1. 2), bzw. die mit (1. 2) gleichwertige Relation (2. 1), nicht gültig ist. Die Relationen (2. 3a) und (2. 3b) bleiben hingegen auch in diesem Falle gültig, wenn die durch (1. 3) bestimmte Bogenlänge für Parameter gewählt wird, wie wir das schon bemerkt haben. Führen wir die Bezeichnung

$${}_{(1)}\xi^i \overset{\text{def}}{=} a^i_j(x, v)\frac{dx^j}{ds}$$

ein, so kann (2. 3a) in der Form

$$g_{rp(1)}\xi^{(r)}{}_1\xi^p = 1 \tag{2. 7}$$

geschrieben werden. ${}_{(1)}\xi^i$ ist nach der Definition im Hinblick auf (2. 7) der verallgemeinerte tangente Einheitsvektor der Grundelementfolge

$$\big(x^i(s),\, v^i(s)\big).$$

Durch invariante Ableitung nach s bekommt man aus (2. 7) eine Reihe der Frenetformeln, ebenso wie im Riemannschen Raum, d.h. es wird wie vorher, bei der Herleitung der Formeln (2. 5):

$$\frac{D}{ds}{}_{(\beta)}\xi^i = -\iota_{\beta-1\,(\beta-1)}\xi^i + \iota_{\beta\,(\beta+1)}\xi^i, \qquad \iota_0 = \iota_n = 0, \tag{2. 8}$$

wo ι_β auch eine Krümmungsinvariante bedeutet. Ausgehend aus (2. 3b), gelangt man nach der Bezeichnung $v^i = {}_{(1)}\eta^i$ wieder zu den Formeln (2. 5); die Frenetformeln einer Grundelementfolge $\big(x^i(s), v^i(s)\big)$ sind also die beiden Reihen (2. 5) und (2. 8). Die ${}_{(\beta)}\xi^i$ bilden auch ein orthogonales und normiertes n-Bein, d.h. es gilt

$$g_{ik(\alpha)}\xi^i{}_{(\beta)}\xi^k = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2. 9}$$

Bemerkung 1. Es ist nicht überraschend, daß jetzt zwei Reihen von Frenetformeln existieren. dx^i/ds und $v^i(s)$ sind nämlich jetzt von einander unabhängig und wir haben im wesentlichen $2n$ Funktionen für die Bestimmung der Grundelementfolge, nämlich $x^i(s)$ und $v^i(s)$.

[3]) Auch die griechischen Indizes sollen jetzt und im folgenden die Zahlen 1, 2, ..., n bedeuten. Auf die griechischen Indizes soll aber die Einsteinsche Summationskonvention nicht gelten. Wenn bezüglich eines griechischen Indexes doch summiert werden soll, so wird das Zeichen Σ gesetzt werden.

Ist (2. 1) gültig, so ist offenbar ${}_{(1)}\xi^i = {}_{(1)}\eta^i = v^i$ und (2. 7) wird jetzt mit (2. 3b) identisch sein, woraus folgt, daß auch (2. 5) und (2. 8) identisch sind. Das ist der Fall der Kurven im engeren Sinne. Dieser Fall kann aber auch durch den folgenden Satz charakterisert werden:

Satz 1. *Bestehen die Relationen:*

$$\iota_\alpha(s) \equiv \varkappa_\alpha(s), \tag{2. 10}$$

$$ {}_{(\beta)}\xi^i(s_0) = {}_{(\beta)}\eta^i(s_0), \tag{2. 11}$$

wo s_0 einen festen Wert des Parameters bedeutet, so ist

$$ {}_{(\beta)}\xi^i(s) \equiv {}_{(\beta)}\eta^i(s) \tag{2. 12}$$

$$\frac{dx^i}{ds} = b^i_k(x, v)\, v^k \tag{2. 13}$$

für jedes s gültig.

Beweis. Auf Grund von (2. 10) kann (2. 8) in der Form

$$\frac{D}{ds}\, {}_{(\beta)}\xi^i = -\varkappa_{\beta-1}\, {}_{(\beta-1)}\xi^i + \varkappa_\beta\, {}_{(\beta+1)}\xi^i, \qquad \varkappa_0 = \varkappa_n = 0 \tag{2. 14}$$

geschrieben werden. Wir zeigen, daß die Funktion

$$f(s) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\beta=1}^{n} g_{ik}({}_{(\beta)}\xi^i - {}_{(\beta)}\eta^i)({}_{(\beta)}\xi^k - {}_{(\beta)}\eta^k)$$

identisch verschwindet. Differenzieren wir diese Funktion nach s, so wird wegen

$$\frac{d}{ds} f(s) = \frac{D}{ds} f(s)$$

im Hinblick auf (2. 14) und (2. 5) unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen (2. 6) und (2. 9):

$$\frac{df(s)}{ds} = 0.$$

Es ist also $f(s)$ eine Konstante, und für $s = s_0$ ist wegen (2. 11) $f(s_0) = 0$. Es gilt somit für jedes s: $f(s) \equiv 0$. Da g_{ik} die Koeffizienten einer positiv-definiten quadratischen Form bedeutet, ist (2. 12) gültig. Für $\beta = 1$ bekommt man — nach der Definition von ${}_{(1)}\xi^i$ — aus der Formel (2. 12)

$$ {}_{(1)}\xi^k \equiv a^k_j(x, v)\frac{dx^j}{ds} = {}_{(1)}\eta^k = v^k.$$

Überschiebung mit b^i_k gibt unmittelbar (2. 13) w.z.b.w.

Die beiden Invarientensysteme ι_α und $\varkappa_\alpha$ sind durch die Winkel der Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi^j$ und ${}_{(\beta)}\eta^j$ miteinander verknüpft. Wenn

$$\varphi_{\beta,\alpha} \overset{\text{def}}{=} {}_{(\beta)}\xi_i\, {}_{(\alpha)}\eta^i = \cos({}_{(\beta)}\vec{\xi}, {}_{(\alpha)}\vec{\eta}) \neq 0 \tag{2. 15}$$

ist, so gilt nach Differenzieren nach s im Hinblick auf (2. 8) und (2. 5), und unter der abermaligen Beachtung von (2. 15):

$$\frac{d\varphi_{\beta,\alpha}}{ds} = -\iota_{\beta-1}\varphi_{\beta-1,\alpha} + \iota_\beta \varphi_{\beta+1,\alpha} - \varkappa_{\alpha-1}\varphi_{\beta,\alpha-1} + \varkappa_\alpha \varphi_{\beta,\alpha+1} \tag{2. 16}$$
$$(\iota_0 = \iota_n = \varkappa_0 = \varkappa_n = 0).$$

Mit Hilfe der $\varphi_{\beta,\alpha}$ könnten aus (2. 16) die Invarianten ι_α bzw. $\varkappa_\alpha$ berechnet werden. Doch sind die $\varphi_{\beta,\alpha}$ voneinander nicht unabhängig. Da ${}_{(\beta)}\vec{\xi}$ und ${}_{(\alpha)}\vec{\eta}$ zwei orthogonale und normierte n-Beine bilden, muß

$$\sum_\alpha \varphi_{\beta,\alpha}\varphi_{\gamma,\alpha} = \sum_\alpha \varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha,\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$$

bestehen, wie das mit Hilfe von (2. 15) unmittelbar verifiziert werden kann.

Satz 2. *Sind ι_α und $\varphi_{\beta-1,\alpha}$; $\varphi_{\beta,\alpha}$; $\varphi_{\beta+1,\alpha}$ angegeben, wo $1 \leqq \beta \leqq n$, β fix ist und $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, so kann durch diese Invarianten $\varkappa_\alpha (\alpha = 1, \ldots, n)$ bestimmt werden.*

BEWEIS. Für $\alpha = 1$ folgt aus (2. 16) wegen $\varkappa_0 = 0$:

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\varphi_{\beta,2}} \left(\frac{d\varphi_{\beta,1}}{ds} + \iota_{\beta-1}\varphi_{\beta-1,1} - \iota_\beta \varphi_{\beta+1,1} \right).$$

(2. 16) ist somit eine Rekursionsformel für $\varkappa_\alpha$, womit der Satz 2. bewiesen ist.

Wir verweisen noch darauf, daß selbstverständlich auch die ι_β durch $\varkappa_\alpha$ ausgedrückt werden könnten.

§ 3. Allgemeine lineare Vektorenübertragung bezüglich der ${}_{(\beta)}\eta^i$ bzw. ${}_{(\beta)}\xi^i$ parallel verschoben ist

Die Parallelübertragung der Vektoren ist durch

$$\frac{DV^i}{ds} = 0$$

bestimmt. Wir wollen jetzt eine allgemeinere lineare Vektorenübertragung von der Form

$$\frac{D^*V^i}{ds} = \frac{DV^i}{ds} - \theta^i{}_j V^j \tag{3. 1}$$

definieren, so, daß

$$\frac{D^*}{ds}\, {}_{(\beta)}\eta^i = 0 \tag{3.2}$$

sei, falls der Parameter eben die Bogenlänge ist. Geometrisch bedeutet das, daß bezüglich der D^*-Übertragung das n-Bein ${}_{(\beta)}\eta^i$ längs der zu Grunde gelegte Grundelementfolge parallel verschoben ist.

(3. 2) kann nun auf Grund der Definition der D^*-Übertragung in der äquivalenten Form:

$$\frac{D}{ds}\,{}_{(\beta)}\eta^i = \theta^i{}_{j\,(\beta)}\eta^j \tag{3. 3}$$

angegeben werden. Schreiben wir nun (2. 6) in der Form

$${}_{(\alpha)}\eta_{k(\beta)}\eta^k = \delta_{\alpha\beta}, \quad {}_{(\alpha)}\eta_k = g_{ik(\alpha)}\eta^i,$$

so folgt nach einem bekannten Satz der Tensoralgebra [4]), daß auch

$$\sum_{\beta} {}_{(\beta)}\eta_{k\,(\beta)}\eta^j = \delta_k^j \tag{3. 4}$$

besteht. Eine Multiplikation von (3. 3) mit ${}_{(\beta)}\eta_k$ und eine Summation über β gibt auf Grund von (3. 4):

$$\theta^i{}_k = \sum_{\beta=1}^{n} {}_{(\beta)}\eta_k \frac{D_{(\beta)}\eta^i}{ds}.$$

Beachten wir nun die Frenetformeln (2. 5), so wird:

$$\theta^i{}_j = \sum_{\beta=1}^{n} (-\varkappa_{\beta-1\,(\beta-1)}\eta^i + \varkappa_{\beta\,(\beta+1)}\eta^i)_{(\beta)}\eta_j, \tag{3. 5}$$

wo noch $\varkappa_0 = \varkappa_n = 0$ gesetzt werden muß.

Ziehen wir in (3. 5) den Index j auf, so kann θ^{ij} in der folgenden expliziten Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \theta^{ij} &= \varkappa_1({}_{(1)}\eta^j{}_{(2)}\eta^i - {}_{(1)}\eta^i{}_{(2)}\eta^j) + \dots \\ &+ \varkappa_\beta({}_{(\beta)}\eta^j{}_{(\beta+1)}\eta^i - {}_{(\beta)}\eta^i{}_{(\beta+1)}\eta^j) + \dots + \varkappa_{n-1}({}_{(n-1)}\eta^j{}_{(n)}\eta^i - {}_{(n-1)}\eta^i{}_{(n)}\eta^j), \end{aligned} \tag{3. 5a}$$

woraus leicht abgelesen werden kann, daß θ^{ji} in i, j schiefsymmetrisch ist.

Die bisherigen Resultate dieses Paragraphen fassen wir im folgenden Satze zusammen:

Satz 3. *Die durch* (3. 1) *und* (3. 5) *bestimmte D^*-Übertragung erfüllt die Relation* (3. 2), *d.h. das begleitende n-Bein ${}_{(\beta)}\eta^i$ ist längs der Kurve bezüglich der D^*-Übertragung parallel.*

Bemerkung 2. Stellen wir statt (3. 2) die Forderung

$$\frac{D^*}{ds}\,{}_{(\alpha)}\xi^i = 0,$$

so verändert sich $\theta^i{}_j$ in der folgenden Weise: In (3. 5) wird statt $\varkappa_\beta$ die Invariante ι_β, statt des n-Beins ${}_{(\beta)}\vec{\eta}$ das n-Bein ${}_{(\beta)}\vec{\xi}$ stehen.

Die D^*-Übertragung ist zwar in V^i linear, aber nach (3. 5) bzw. nach der mit (3. 5) gleichwertigen Relation (3. 5a) ist sie von $(n-1)$-ter Ordnung. In ${}_{(n)}\eta^i$ kommt nämlich das $(n-1)$-te invariante Differential des normierten v^i vor. Ist $n=2$, so ist

[4]) Vgl. [2] Kap. I. § 4.

demnach die D^*-Übertragung auch von erster Ordnung. Es ist in diesem Falle nach (3. 1) und (3. 5a) wegen ${}_{(1)}\eta^i = v^i$:

$$\frac{D^* V^i}{ds} = \frac{DV^i}{ds} - \varkappa_1 (v^j{}_{(2)}\eta^i - v^i{}_{(2)}\eta^j) V_j .$$

Beachten wir nun, daß

$$\varkappa_1 {}_{(2)}\eta^i = \frac{Dv^i}{ds}, \qquad g_{ik} v^i v^k = 1 \tag{3. 6}$$

ist, so wird:

$$\frac{D^* V^i}{ds} = \frac{DV^i}{ds} - \left(v^k \frac{Dv^i}{ds} - v^i \frac{Dv^k}{ds} \right) g_{jk} V^j. \tag{3. 7}$$

Benützen wir die Formel des invarianten Differentials (vgl. [3], Formel (4. 4)), so wird:

$$\frac{D^* V^i}{ds} = \frac{dV^i}{ds} + L^{*i}_{j\ k} V^j \frac{dx^k}{ds} + M^{*i}_{j\ k} V^j \frac{\omega^k(d)}{ds} \tag{3. 7a}$$

wo im Hinblick auf (3. 7)

$$M^{*i}_{j\ k} \stackrel{\text{def}}{=} M_j{}^i{}_k - g_{rj}(v^r \delta^i_k - v^i \delta^r_k), \tag{3. 8}$$

$$L^{*i}_{j\ k} \stackrel{\text{def}}{=} L_j{}^i{}_k - M_j{}^i{}_r L_t{}^r{}_k v^t, \tag{3. 8a}$$

und $L_j{}^i{}_k$ und $M_j{}^i{}_k$ die Übertragungsparameter der D-Übertragung bedeuten (vgl. [3] Formel (3. 1)), ferner

$$\frac{\omega^k(d)}{ds} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Dv^k}{ds} \equiv \frac{dv^k}{ds} + L^{*k}_{r\ t} v^r \frac{dx^t}{ds}$$

ist. Nach (3. 8) gelten wegen

$$M_k{}^i{}_j v^k = 0, \quad M_j{}^i{}_k v^k = 0, \quad g_{kj} v^k v^j = 1$$

die Relationen

$$M^{*i}_{k\ j} v^j = 0, \quad M^{*i}_{j\ k} v^j = -\delta^i_k + v^i g_{jk} v^j.$$

Letztens wollen wir noch darauf hinweisen, daß die durch (3. 7) bzw. (3. 7a) angegebene Übertragung auch im n-dimensionalen Fall die Eigenschaft besitzt, daß $D^* v^i = 0$ gilt. Für die übrigen ${}_{(\beta)}\eta^i$ Vektoren ist aber $D^*{}_{(\beta)}\eta^i \neq 0$, $\beta = 2, \ldots, n$, falls $n > 2$. Das ist im Wesentlichen die Verallgemeinerung der Fermi—Walkerschen Übertragungstheorie (vgl. [7], Chap. I. § 4). Wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Die allgemeinste D^*-Übertragung, für die* a) $D^* v^i = 0$ *gilt, hat die Form:*

$$\frac{D^* V^i}{ds} = \frac{DV^i}{ds} - v^r g_{jr} V^j \frac{Dv^i}{ds} + \vartheta^i{}_j V^j, \tag{3. 9}$$

wo ϑ^i_j der Relation $\vartheta^i_j v^j = 0$ genügen soll. Soll die D^*-Übertragung auch der Relation b) $D^*{}_{(2)}\eta^i = 0$ *genügen, so hat die D^*-Übertragung, die Form:*

$$\frac{D^* V^i}{ds} = \frac{DV^i}{ds} - \{\varkappa_1 ({}_{(1)}\eta_j {}_{(2)}\eta^i - {}_{(1)}\eta^i {}_{(2)}\eta_j) + \varkappa_2 {}_{(3)}\eta^i {}_{(2)}\eta_j\} V^j + \vartheta^{*i}{}_j V^j, \tag{3. 10}$$

wo für ${}_{(1)}\eta_j$ *und* $\vartheta^{*i}{}_j$ *die Relationen*

$$ {}_{(1)}\eta_j = g_{rj} v^r, \quad \vartheta^{*i}{}_j v^j = 0, \quad \vartheta^{*i}{}_{j(2)}\eta^j = 0 $$

gelten.

BEWEIS. Die Form von $D^* V^i$ ist durch (3. 1) angegeben, aber die Relationen (3. 2) bzw. die damit gleichwertigen Relationen (3. 3) gelten im Falle a) des Satzes 4 nur für $\beta = 1$, und im Falle b) nur für $\beta = 1, 2$. Benützt man für $\theta^i{}_j$ eine Beindarstellung bezüglich des n-Beins ${}_{(\beta)}\eta^i$, so hat man:

$$ \theta^i{}_j = \sum_{\alpha,\beta} \underset{(\alpha\beta)}{C}\, {}_{(\alpha)}\eta^i\, {}_{(\beta)}\eta_j \qquad \underset{(\alpha\beta)}{C} : \textit{Skalare}. \tag{3.11} $$

Eine Überschiebung dieser Relation mit $v^j \equiv {}_{(1)}\eta^j$ gibt nach (3. 3), wenn in (3. 3) $\beta = 1$ gesetzt wird:

$$ \theta^i{}_j v^j = \sum_{\alpha} \underset{(\alpha 1)}{C}\, {}_{(\alpha)}\eta^i = \frac{Dv^i}{ds}. \tag{3.12} $$

Eine Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\eta_i$ gibt wegen (2. 4)

$$ \underset{(\beta 1)}{C} = {}_{(\beta)}\eta_i \frac{Dv^i}{ds} = \varkappa_1 \delta_{\beta 2}, \tag{3.13} $$

wo $\delta_{\beta 2}$ die entsprechende Komponente des Kroneckerschen-δ bedeutet. Nach (3. 11) hat also $\theta^i{}_j$ im Falle a) die Form:

$$ \theta^i{}_j = \varkappa_1\, {}_{(2)}\eta^i\, {}_{(1)}\eta_j + \sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta=2}}^{n} \underset{(\alpha\beta)}{C}\, {}_{(\alpha)}\eta^i\, {}_{(\beta)}\eta_j $$

und nach (3. 6) gibt (3. 1) eben die Form (3. 9).

Im Falle b) bekommt man neben den Relationen (3. 12) und (3. 13) aus (3. 11)

$$ \sum_{\alpha} \underset{(\alpha 2)}{C}\, {}_{(\alpha)}\eta^i = \theta^i{}_{j(2)}\eta^j = \frac{D_{(2)}\eta^i}{ds}, $$

woraus nach einer Kontraktion mit ${}_{(\gamma)}\eta_i$ nach (2. 5) die Formel

$$ \underset{(\gamma 2)}{C} = {}_{(\gamma)}\eta_i \frac{D_{(2)}\eta^i}{ds} = -\varkappa_1 \delta_{1\gamma} + \varkappa_2 \delta_{3\gamma} \tag{3.14} $$

folgt. Auf Grund von (3. 11) wird somit nach (3. 13) und (3. 14)

$$ \theta^i{}_j = \varkappa_1 ({}_{(1)}\eta_{j(2)}\eta^i - {}_{(1)}\eta^i{}_{(2)}\eta_j) + \varkappa_{2\,(3)}\eta^i{}_{(2)}\eta_j + \vartheta^{*i}{}_j. $$

Aus (3. 1) wird nun nach unserer letzten Formel eben (3. 7), womit der Satz 4 vollständig bewiesen ist.

Bemerkung 3. Der Satz 4 kann selbstverständlich wieder auch auf das n-Bein ${}_{(\alpha)}\vec{\xi}$ formuliert werden. Statt Dv^i steht dann in der entsprechenden Formel offensichtlich $\iota_{1(2)}\xi^i$.

§ 4. Krümmung der speziellen D^*-Übertragung

In diesem Paragraphen wollen wir die zum invarianten Differential (3. 7a) gehörigen Krümmungsgrößen bestimmen. Diese, durch (3. 7a) bestimmte D^*-Übertragung, kann im zweidimensionalen Fall dadurch charakterisiert werden, daß sie die allgemeinste Übertragung ist, für die

$$\frac{D^*}{ds}{}_{(1)}\eta^i \equiv \frac{D^* v^i}{ds} \equiv 0, \qquad \frac{D^*}{ds}{}_{(2)}\eta^i = 0$$

gelten. Im n-dimensionalen Fall aber, wenn $n > 2$ ist, gilt für (3. 7a), bzw. für das mit (3. 7a) identische invariante Differential (3. 7), nur die Relation: $D^* v^i = 0$.

Wenn d und δ zwei verschiedene Differentiale und D^* bzw. Δ^* die zu den d und δ gehörigen invarianten Differentiale bezeichnen, so kann die Krümmung bekanntlich durch die Bildung des Ausdrucks:

$$(\Delta^* D^* - D^* \Delta^*) V^i$$

bestimmt werden. Wenn wir nun die Zerlegung nach dx^k und $\omega^k = Dv^k$ durchführen, ferner beachten, daß der Unterschied zwischen die invarianten Differentiale D und D^* nur in den Größen $M_j{}^i{}_k$ und $M_j^{*i}{}_k$ — angegeben durch (3. 8) — besteht, so sieht man unmittelbar, daß die Krümmungsgrößen ebensolche Form haben werden, wie bei der D-Übertragung (vgl. [3] § 7), nur wird statt $M_j{}^i{}_k$ immer die Größe $M_j^{*i}{}_k$ stehen. Es wird somit:

$$\begin{aligned}(\Delta^* D^* - D^* \Delta^*) V^i &= \{\tfrac{1}{2} K_j{}^i{}_{kl}[dx^k\, dx^l] + \\ &+ P_j^{*i}{}_{kl}[dx^k\, \omega^l] + \tfrac{1}{2} S_j^{*i}{}_{kl}[\omega^k \omega^l]\} V^j,\end{aligned} \tag{4. 1}$$

wo

$$K_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} R_j^{*i}{}_{kl} + M_j^{*i}{}_t R_0^{*t}{}_{kl}, \tag{4. 1a}$$

$$P_j^{*i}{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L_j^{*i}{}_k}{\partial v^l} - \nabla_k M_j^{*i}{}_l + M_j^{*i}{}_t \frac{\partial L_s^{*t}{}_k}{\partial v^l} v^s, \tag{4. 1b}$$

$$S_j^{*i}{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial M_j^{*i}{}_k}{\partial v^l} - \frac{\partial M_j^{*i}{}_l}{\partial v^k} + M_j^{*t}{}_k M_t^{*i}{}_l - M_j^{*t}{}_l M_t^{*i}{}_k \tag{4. 1c}$$

bedeuten und

$$R_j^{*i}{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L_j^{*i}{}_k}{\partial v^l} - \frac{\partial L_j^{*i}{}_k}{\partial v^t} L_0^{*t}{}_l + L_j^{*t}{}_k L_t^{*i}{}_l - k/l$$

ist. ∇_k ist die zu D-Übertragung gehörige kovariante Ableitung (vgl. [3], Formel (4. 11)) und k/l bedeutet den vorigen Ausdruck mit vertauschten Indizes k und l. Der Index „$_0$" definiert eine Kontraktion mit v^s.

Wenn wir den Zusammenhang der Krümmungsgrößen der D- und D^*-Übertragung bekommen wollen, müssen wir die Formel (3. 8), ferner § 7 unserer Arbeit [1] beachten, dann werden wir im Hinblick auf die Relationen

$$M_0{}^i{}_k = 0, \quad M_{kil} = M_{lik}, \quad \nabla_k g_{ij} = 0, \quad \nabla_k v^i = 0$$

die folgenden Formeln bekommen:

$$K_j{}^i{}_{kl} = R_j{}^i{}_{kl} - v_j R_0{}^i{}_{kl} + v^i R_{0jkl}, \qquad (v_j \overset{\text{def}}{=} g_{rj} v^r), \tag{4.2}$$

$$R_j{}^i{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} R^{*i}_{j\ kl} + M_j{}^i{}_t R^{*t}_{0\ kl}, \tag{4.2a}$$

$$P^{*i}_{j\ kl} = P_j{}^i{}_{kl} - v_j \frac{\partial L^{*i}_{s\ k}}{\partial v^l} v^s + v^i g_{jt} \frac{\partial L^{*t}_{s\ k}}{\partial v^l} v^s, \tag{4.3}$$

$$S^{*i}_{j\ kl} = S_j{}^i{}_{kl} + g_{jk}\delta^i_l - g_{jl}\delta^i_k, \tag{4.4}$$

da die übrigen Glieder des Tensors $S^{*i}_{j\ kl}$ von der Formel (4. 1) wegen $g_{rk}v^r v^k = 1$,

$$v_k \omega^k(d) = 0, \qquad (v_k = g_{rk} v^r) \tag{4.5}$$

herausfallen werden. In (4. 1) kommt also nur (4. 4) vor, zwar stimmt (4. 1c) nicht vollständig mit (4. 4) überein.

Bezüglich der Eigenschaften der Krümmungstensoren bemerken wir, daß K_{ijkl} in k, l und auch in i, j schiefsymmetrisch ist, da für $\omega^k = 0$

$$(\Delta D - D\Delta) g_{ij} = -(R_{ijkl} + R_{jikl})[dx^k dx^l] = 0$$

gilt, somit ist R_{ijkl} in i, j schiefsymmetrisch. Außerdem ist $K_0{}^i{}_{kl} = 0$, was auch aus $D^* v^i = 0$ folgt. Die Berechnung von $P^{*i}_{0\ kl}$, was wegen $(\Delta^* D^* - D^* \Delta^*) v^i = 0$ auch verschwinden muß, gibt

$$v_t \frac{\partial L^{*\,t}_{\ s\ k}}{\partial v^l} v^s = 0,$$

was im Finslerraum leicht verifiziert werden kann (vgl. [6], Kap. IV. Formel (1. 30)).

Hingegen ist

$$S^{*i}_{0\ kl} = v_k \delta^i_l - v_l \delta^i_k.$$

Ist aber in (4. 1) $V^i = v^i$, so verschwindet in (4. 1) wegen (4.5) auch dieses Glied.

Schriftenverzeichnis

[1] E. Cartan, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles,* **79** (Paris, 1934).

[2] A. Duschek—W. Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie II. *Leipzig, Berlin,* 1930.

[3] A. Moór, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. (Debrecen),* **13** (1966), 263—287.

[4] A. Rapcsák, Invariante Taylorsche Reihe in einem Finslerschen Raum, *Publ. Math. (Debrecen),* **4** (1955), 49—60.

[5] A. Rapcsák, Theorie der Bahnen in Linienelementmannigfaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihrer affinen Theorie. *Acta Sci. Math. (Szeged),* **16** (1955), 251—265.

[6] H. Rund, The differentialgeometry of Finsler spaces. *Berlin, Göttingen, Heidelberg,* 1959.

[7] J. L. Synge, Relativity: The general theory. *Amsterdam,* 1960.

[8] O. Varga, Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten. *Comptes Rendus du premier Congrès des Mathématiciens Hongrois, Budapest* (1952), 147—162.

(Eingegangen am 6. November 1966.)