Über eine Operatorgleichung im Hilbertraum

Von Z. DARÓCZY (Debrecen)

Einleitung. Es sei H ein reeller Hilbertraum, ferner seien $A:H\to H$ und $B:H\to H$ beschränkte von Null verschiedene lineare Operatoren. Wir betrachten eine stetige eindeutige Abbildung $f\colon H\to H$, welche der Operatorgleichung

$$f[A(x)+y] = B[f(x)]+f(y) \tag{1}$$

für alle $x, y\in H$ genügt.

Ist H ein eindimensionaler Raum, so kann man H als die Menge der reellen Zahlen betrachten. Dann haben A bzw. B die Gestalt $A(x)=\alpha x$, $B(x)=\beta x$ $(\alpha\beta\neq 0)$, und die Operatorgleichung (1) geht in die Funktionalgleichung

$$f(\alpha x+y)=\beta f(x)+f(y) \tag{1'}$$

über. Es ist bekannt, dass die Gleichung (1′) dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung hat, wenn $\alpha=\beta$ ist (S. [1], [2] und vgl. [3]). (Wenn wir keine Regularitätsvoraussetzungen über f in (1′) machen, so kann man notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen der Gleichung (1′) angeben. (S. [3], [4], [5], [2]).) In der vorliegenden Arbeit wollen wir dieses Ergebnis verallgemeinern und die allgemeinen stetigen Lösungen der Operatorgleichung (1) in H darstellen.

1. Bezeichnungen

Es bezeichne $\mathfrak{N}(H)$ die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $A\colon H\to H$. Ist $A\in\mathfrak{N}(H)$, so schreibt man $A(H)=\{y|y=A(x),\ x\in H\}$ und es sei $\overline{A(H)}$ die Abschließung von $A(H)$. Es sei $L^\perp$ das orthogonale Komplement eines abgeschlossenen linearen Teilraums $L\subset H$. Dann ist $H=L\oplus L^\perp$, d.h. ein beliebiges $x\in H$ besitzt die eindeutige Zerlegung

$$x=l+l' \quad (l\in L,\ l'\in L^\perp).$$

Dann sind die Projektionen von x auf L bzw. $L^\perp$ $l=P_L(x)$ bzw. $l'=P_{L^\perp}(x)$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(L\to H)$ die Menge aller beschränken linearen Operatoren $C\colon L\to H$. (vgl. [6]).

2. Allgemeine Lösung

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Die allgemeine stetige Lösung der Operatorgleichung* (1) *ist*

$$f(x) = F[P_L(x)] + \varphi[P_{L^\perp}(x)] + b \qquad (x \in H), \tag{2}$$

wobei $L = \overline{A(H)}$, $B(b) = 0$ *ist, und die Abbildungen* $F \in \mathfrak{R}(L \to H)$, $\varphi: L^\perp \to H$ (φ *stetig mit* $\varphi(0) = 0$) *beliebig sind mit der Eigenschaft*

$$FA = BFP_L + B\varphi P_{L^\perp}. \tag{3}$$

Beweis. Erstens zeigen wir, daß eine stetige Lösung $f: H \to H$ von (1) (wo $A, B \in \mathfrak{R}(H)$ von Null verschiedene Operatoren sind) in der Gestalt (2) dargestellt werden kann. Es sei $b = f(0)$, dann erhalten wir aus (1) mit der Substitution $x = y = 0$, daß $B(b) = 0$ gilt. Setzen wir jetzt in (1) $y = 0$, so ergibt sich

$$f[A(x)] = B[f(x)] + b \qquad (x \in H) \tag{4}$$

und mit der Bezeichnung $g(x) = f(x) - b$ $(x \in H)$ erhalten wir

$$g[A(x) + y] = g[A(x)] + g(y) \qquad (x, y \in H). \tag{5}$$

Aus der Stetigkeit von f folgt, daß $g: H \to H$ stetig ist, und aus (5) ergibt sich die Gleichung

$$g(a + y) = g(a) + g(y) \tag{6}$$

für alle $a \in \overline{A(H)} = L$ und $y \in H$. Ist $x \in H$ beliebig, so gilt die Darstellung $x = P_L(x) + P_{L^\perp}(x)$, und wir erhalten aus (6)

$$g(x) = g[P_L(x) + P_{L^\perp}(x)] = g[P_L(x)] + g[P_{L^\perp}(x)].$$

Es sei jetzt $F(a) = g(a)$ falls $a \in L$ und $\varphi(a') = g(a')$ falls $a' \in L^\perp$. Dann sind $F: L \to H$ und $\varphi: L^\perp \to H$ ($\varphi(0) = 0$) stetig. Ferner gilt nach (6)

$$F(a_1 + a_2) = g(a_1 + a_2) = g(a_1) + g(a_2) = F(a_1) + F(a_2)$$

für alle $a_1, a_2 \in L$. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von F, daß F ein Element von $\mathfrak{R}(L \to H)$ ist.

Nun gilt die Gleichung

$$f(x) = g(x) + b = g[P_L(x) + P_{L^\perp}(x)] + b =$$
$$= g[P_L(x)] + g[P_{L^\perp}(x)] + b = F[P_L(x)] + \varphi[P_{L^\perp}(x)] + b,$$

d.h. f besitzt die Gestalt (2). Ferner gilt nach (4)

$$B[f(x)] = F[A(x)] - b = g[A(x)],$$

und daraus folgt

$$B\big[F(P_L(x))\big] + B\big[\varphi(P_{L^\perp}(x))\big] = F[A(x)] \qquad (x \in H),$$

d.h. die Identität (3).

Zweitens genügt es zu zeigen, dass (2) (unter den angegebenen Bedingungen) eine stetige Lösung von (1) ist. Die Stetigkeit ist trivial, ferner gilt

$$\begin{aligned} f[A(x)+y] &= FP_L[(A(x)+y)] + \varphi[P_{L^\perp}(A(x)+y)] + b = \\ &= F[P_L(A(x)) + P_L(y)] + \varphi[P_{L^\perp}(A(x)) + P_{L^\perp}(y)] + b = \\ &= F[A(x)] + F[P_L(y)] + \varphi[P_{L^\perp}(y)] + b = \\ &= B[F(P_L(x))] + B[\varphi(P_{L^\perp}(x))] + f(y) = \\ &= B[F(P_L(x)) + \varphi(P_{L^\perp}(x)) + b] + f(y) = B[f(x)] + f(y), \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Korollar. *Ist $A(H)$ eine dichte Menge in H, so hat* (1) *die allgemeine stetige Lösung*

$$f(x) = F(x) + b,$$

wobei $F \in \mathfrak{R}(H)$, $B(b) = 0$ ist, und es gilt die Gleichung $FA = BF$.

Beweis. Wegen der Gleichheit $L = \overline{A(H)} = H$ und aus (2), (3) folgt die Behauptung. (Bemerkung: Das Korollar gilt auch dann, wenn H ein topologischer linearer Raum über den Körper der reellen Zahlen ist).

Im eindimensionalen Fall ist $b = 0$, und die einzige Lösung der Gleichung $\xi\alpha = \beta\xi$ (mit $F(x) = \xi x$) ist $\xi = 0$ falls $\alpha \neq \beta$ und ξ beliebig falls $\alpha = \beta$.

Literatur

[1] J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helvetici*, **21** (1948), 247—256.
[2] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, *New York—London*, 1966.
[3] Z. Daróczy, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 31—41.
[4] Daróczy Z., A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Mat. Lapok*, **15** (1964), 52—86.
[5] L. Losonczi, Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 250—254.
[6] F. Riesz—B. Sz.—Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin* 1956.

(Eingegangen am 6. Dezember 1966.)