Untersuchungen über Trennungsaxiome

Von KLÁRA CSÁSZÁR (Budapest)

1. Das bekannte Rieszsche Trennungsaxiom (T_1) läßt sich, wie es von N. A. ŠANIN ([10]), K. MORITA ([8]), A. S. DAVIS ([3]), M. W. LODATO ([7]), E. ČECH ([2] Satz 26 B. 5) bemerkt wurde, auf das Kolmogoroffsche Axiom (T_0) und das folgende Axiom (R) aufspalten:

(R) Besitzt der Punkt x eine Umgebung, die den Punkt y nicht enthält, so besitzt auch y eine Umgebung, die x nicht enthält.

Eine ähnliche Bemerkung gilt für das Hausdorffsche Axiom (T_2); es ist die Vereinigung von (T_0) und dem folgenden Axiom (H) (vgl. B. BANASCHEWSKI—J. M. MARANDA [1], A. S. DAVIS [3]):

(H) Besitzt der Punkt x eine Umgebung, die den Punkt y nicht enthält, so haben x und y fremde Umgebungen.

Im folgenden wird ein dem Axiom (R) bzw. (H) genügender Raum kurz R-Raum, bzw. H-Raum genannt.

In dieser Arbeit untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den Axiomen (R) bzw. (H) und den übrigen Trennungsaxiomen, indem wir auch andere äquivalente Formulierungen von (R) und (H), sowie relativisierte Formen einiger Trennungsaxiome in Betracht ziehen. Dann werden verschiedene Invarianzeigenschaften von (R) und (H), sowie ihre Rolle in der Theorie der kompakten und lokalkompakten Räume untersucht. Endlich beschäftigen wir uns mit einigen Fragen, die Erweiterungen von R- bzw. H-Räumen betreffen.

2. Die Einführung der Axiome (R) und (H) ermöglicht eine Reihe von Axiom (T_0) unabhängiger Axiome aufzustellen, die zusammen mit Axiom (T_0) je ein klassisches Trennungsaxiom ergeben:

(R) und (T_0) ergeben (T_1),
(H) und (T_0) ergeben (T_2),
Regularität und (T_0) ergeben (T_3),
vollständige Regularität und (T_0) ergeben die Tychonoffsche Eigenscaft (T_ϱ),

und wir können noch dazufügen:
Normalität und (T_1) ergeben (T_4).

Wie bekannt:

$$(T_4) \Rightarrow (T_\varrho) \Rightarrow (T_3) \Rightarrow (T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0).$$

Ähnlicherweise kann man zeigen, daß
vollständige Regularität $\Rightarrow$ Regularität $\Rightarrow (H) \Rightarrow (R)$.

Um diese Behauptung weiter ergänzen zu können, sei E ein normaler R-Raum. Wir führen in E die folgende Berührungsrelation δ ein:

$A, B \subset E$ seien genau dann benachbart, wenn ihre abgeschlossenen Hüllen sich treffen:

$$A\delta B \Leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset \tag{2.1}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die so eingeführte Relation δ folgenden, von V. A. Efremovič ([4]) und J. M. Smirnov ([12]) für die allgemeine Berührungsrelation δ eingeführten Axiomen genügt:

(1) $A\delta B \Leftrightarrow B\delta A$,

(2) $A\delta B,\ A \subset A',\ B \subset B' \Rightarrow A'\delta B'$,

(3) $A\bar{\delta}C,\ B\bar{\delta}C \Rightarrow (A \cup B)\bar{\delta}C$,

(4) $x \in E \Rightarrow x\delta x$,

(5) $A \subset E \Rightarrow A\bar{\delta}\emptyset$,

(6) $A\bar{\delta}B \Rightarrow \exists\, U, V\colon U \cap V = \emptyset,\ A\bar{\delta}(E-U),\ B\bar{\delta}(E-V)$.

Insbesondere folgt (6) aus der Normalität von E.

Es gilt nun der

Satz 1. *Die im normalen R-Raum E durch* (2. 1) *eingeführte Berührungsrelation δ induziert die Topologie von E* [1])

Beweis. Seien τ die auf E angegebene Topologie und τ' die von δ induzierte Topologie, in der G genau dann offen ist, wenn $x\bar{\delta}\,(E-G)$ für jedes $x \in G$ gilt.

Sei G offen in der Topologie τ', also gelte

$$\overline{\{x\}} \cap \overline{E-G} = \emptyset \qquad (x \in G) \tag{2. 2}$$

(mit $\bar{A}$ bezeichnen wir die τ-abgeschlossene Hülle der Menge A). Dann ist aber G auch in τ offen, da aus (2. 2) $x \notin \overline{E-G}$, $(x \in G)$, daher $G \cap \overline{E-G} = \emptyset$, $\overline{E-G} \subset$ $\subset E-G$ und daraus $E-G = \overline{E-G}$ folgt.

Ist umgekehrt G offen in τ und $x \in G$, dann hat x für jedes $y \in E-G$ eine Umgebung (die Menge G) die y nicht enthält, und daraus folgt nach (R), daß auch jedes $y \in E-G$ eine Umgebung hat, die x nicht enthält, das heißt $y \notin \overline{\{x\}}$ $(y \in E-G)$, daher $\overline{\{x\}} \cap (E-G) = \emptyset$ und wegen $E-G = \overline{E-G}$ $\overline{\{x\}} \cap \overline{E-G} = \emptyset$. Somit ist G auch τ'-offen.

Da jede Berührungsrelation eine vollständig reguläre Topologie induziert, ergibt sich das

Korollar. Jeder normale R-Raum ist vollständig regulär.

Diese Tatsache kann man auch direkt beweisen.

3. Bezeichne im folgenden $\mathfrak{v}(x)$ den Umgebungsfilter von x, $\mathfrak{r}$ einen Filter im Raum E.

[1]) Vgl. auch [7], (2. 3) und [2], Satz 29 A. 3.

Wir können den Axiomen (R) bzw. (H) gleichwertige Bedingungen erwähnen:

(R_1) Aus $x \in E$, $V \in \mathfrak{v}(x)$ folgt[2] $\overline{\{x\}} \subset V$.

(R_2) Aus $x, y \in E$, $\mathfrak{v}(x) \subset \mathfrak{v}(y)$ folgt $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}(y)$.

(R_3) Aus $x, y \in E$, $\mathfrak{v}(x) \to y$ folgt $\mathfrak{v}(y) \to x$.

(H_1) Aus $x, y \in E$, $\mathfrak{x} \to x$, $\mathfrak{x} \to y$ folgt $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}(y)$.

(H_2) Aus $x, y \in E$, $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x)(\cap)\mathfrak{v}(y)$ folgt[3] $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}(y)$.

Ohne besondere Schwierigkeit kann man beweisen, daß

$$(R) \Rightarrow (R_1) \Rightarrow (R_2) \Rightarrow (R_3) \Rightarrow (R);$$

$$(H) \Rightarrow (H_1) \Rightarrow (H_2) \Rightarrow (H).$$

4. Wir können auch relativisierte Formen der Axiome (T_0), (R), (H), (T_1) und (T_2) einführen.

Ein jedes der erwähnten Axiome enthält eine Bedingung die sich auf zwei beliebige Punkte des Raumes bezieht. Ist nun (X) ein beliebiges dieser Axiome und $A \subset E$, so werden wir sagen, daß E das Axiom (X) *bis auf* A erfüllt, wenn die in (X) enthaltene Bedingung für $x, y \in E$ gilt, *sobald mindestens einer der Punkte x und y nicht zu A gehört.*

Offenbar gilt ein Trennungsaxiom im üblichen Sinne genau dann, falls es bis auf die leere Menge erfüllt ist. So sagen wir z. B., daß E das Axiom (T_0) bis auf A erfüllt, wenn von zwei verschiedenen Punkten x und y, die nicht beide zu A gehören, mindestens einer eine, den anderen nicht enthaltende Umgebung besitzt.

Es gilt nun der folgende

Satz 2. *Besteht $A \subset B \subset E$ und ist E bis auf B und B bis auf A ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum, so ist auch E bis auf A ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum.*

BEWEIS. Wir müssen nur den Fall untersuchen, wo mindestens einer der Punkte $x, y \in B$ nicht zu A gehört.

Ist E bis auf B, B bis auf A ein T_0-Raum, so besitzt z. B. x eine Umgebung $V \cap B$ in B, die den Punkt y nicht enthält, wobei V eine Umgebung von x in E ist. V enthält den Punkt $y \in B$ nicht, somit ist E bis auf A ein T_0-Raum.

Sei E bis auf B, B bis auf A ein R-Raum. Ist V eine Umgebung von x in E, die den Punkt y nicht enthält, so ist $V \cap B$ eine Umgebung von x in B, die y nicht enthält. Da B bis auf A ein R-Raum ist, besitzt auch y in B eine Umgebung $U \cap B$,

---

[2]) Vgl. [2], 26 B. 2, „halb uniformisierbare Räume". K. Morita ([8]) benützt Axiom (R_1) als definierende Eigenschaft der R-Räume, die er nach N. A. Šanin ([10]) schwach reguläre Räume nennt. In [10], und auch bei A. S. Davis ([3]) dient die folgende mit (R_1) offenbar gleichwertige Eigenschaft als Deffnition:

Ist A eine abgeschlossene Menge und $x \in E - A$, so gibt es eine offene Menge $G \supset A$ mit $x \notin G$.

In [3] wird diese Eigenschaft Axiom (R_0) genannt. M. W. Lodato ([7]) benutzt die ebenfalls gleichwertige Formulierung: aus $x \in \overline{\{y\}}$ folgt $y \in \overline{\{x\}}$, und nennt solche Räume symmetrisch. Vgl. [2], 23 B. 3.

[3]) $\mathfrak{A}(\cap)\mathfrak{B} = \{A \cap B : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$.

die x nicht enthält. Dann ist aber U eine Umgebung von y in E, die den Punkt x nicht enthält, somit ist E bis auf A ein R-Raum.

Die Axiom (T_1) betreffende Bemerkung folgt daraus unmittelbar.

Als weitere Folge erhält man

Satz 3. *Ist der Raum E bis auf $A \subset E$ ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum, ist weiterhin A als Unterraum von E ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum, dann ist auch E ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum.*

Um einen ähnlichen Satz für die Axiome (H) und (T_2) aussagen zu können, müssen wir folgendes bemerken:

Hilfssatz 1. *Ist B dicht in E und bezeichnen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ offene Filter*[4]) *in E, dann besteht:*

$$\emptyset \in \mathfrak{v}_1(\cap)\mathfrak{v}_2 \Leftrightarrow \emptyset \in [\mathfrak{v}_1(\cap)B](\cap)[\mathfrak{v}_2(\cap)B].$$

Beweis. Aus der linken Seite folgt die rechte trivialerweise. Besteht $\emptyset \notin \mathfrak{v}_1(\cap)\mathfrak{v}_2$ und bezeichnen $V_1 \in \mathfrak{v}_1$, $V_2 \in \mathfrak{v}_2$ beliebige Mengen, dann gibt es offene Mengen $G_1 \in \mathfrak{v}_1$, bzw. $G_2 \in \mathfrak{v}_2$ mit $G_1 \subset V_1$, $G_2 \subset V_2$. Die offene Menge $G_1 \cap G_2$ ist nach unserer Voraussetzung nicht leer, somit folgt, da B in E dicht ist,

$$\emptyset \neq (G_1 \cap G_2) \cap B = (G_1 \cap B) \cap (G_2 \cap B) \subset (V_1 \cap B) \cap (V_2 \cap B).$$

Demgemäß gilt $\emptyset \notin [\mathfrak{v}_1(\cap)B](\cap)[\mathfrak{v}_2(\cap)B]$.

Mit Hilfe der obigen Bemerkung kann man folgendes beweisen:

Satz 4. *Ist $A \subset B \subset E$, B dicht in E und E bis auf B, B bis auf A ein H- bzw. T_2-Raum, dann ist E bis auf A ein H- bzw. T_2-Raum.*

Beweis. Wir müssen nur den Fall untersuchen, wo mindestens einer der Punkte $x, y \in B$ nicht zu A gehört.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}(x)$ bzw. $\mathfrak{v}(y)$ den Umgebungsfilter von x bzw. y in E und setzen wir voraus, daß z.B. x eine Umgebung W in E hat, die den Punkt y nicht enthält, so folgt, daß $W \cap B$ eine Umgebung von x in B ist, die y nicht enthält. Da B bis auf A ein H-Raum ist, haben dann x und y auch fremde Umgebungen $U' = U \cap B$, $V' = V \cap B$ in B, wobei U, V in E offen sind. Aus $U' \cap V' = \emptyset$ folgt aber

$$\emptyset \in [\mathfrak{v}(x)(\cap)B](\cap)[\mathfrak{v}(y)(\cap)B],$$

und wegen dem Hilfssatz

$$\emptyset \in \mathfrak{v}(x)(\cap)\mathfrak{v}(y),$$

das heißt, x und y besitzen auch in E fremde Umgebungen.

Daraus und aus Satz 2. folgt auch die Axiom (T_2) betreffende Behauptung.

Als Spezialfall ergibt sich

Satz 5. *Ist der Raum E bis auf dem dichten Unterraum $B \subset E$ ein H- bzw. T_2-Raum, ist weiterhin B als Unterraum von E ein H- bzw. T_2-Raum, dann ist auch E ein H- bzw. T_2-Raum.*

[4]) Ein Filter $\mathfrak{s}$ ist offen (abgeschlossen), wenn jede Menge $S \in \mathfrak{s}$ eine offene (abgeschlossene) Menge $G \in \mathfrak{s}$ enthält.

Das folgende Beispiel zeigt, daß man in den obigen Sätzen 4 und 5 die Voraussetzung, daß B in E dicht ist, nicht entbehren kann.

Bezeichne E die Zahlengerade, $B=[0, 1]$. Sei weiterhin $\mathfrak{U}$ die Familie der offenen Intervalle, die die Menge B nicht treffen, $\mathfrak{B}$ die Familie der Mengen $I\cup(a, \infty)$, wobei I ein offenes B treffendes Intervall bezeichnet und $a>1$ ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{B}$ die Basis einer Topologie ist. Der Raum E ist mit dieser Topologie bis auf B ein T_2-Raum (für $x\in B$, $y\in E-B$ gibt es einen Intervall $(c, d)\in\mathfrak{U}$ mit $y\in(c, d)=U$, $x\notin[c, d]$ und dazu existiert eine Menge $(c_1, d_1)\cup\cup(a, \infty)=V\in\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften $x\in V$, $U\cap V=\emptyset$; besteht $x, y\in E-B$, $x\neq y$, so haben x und y trivialerweise fremde Umgebungen, die zu $\mathfrak{U}$ gehören). Weiterhin ist B als Unterraum ein T_2-Raum, da die Durchschnitte mit B unserer Basismengen einerseits, und der Basismengen der euklidischen Topologie andererseits übereinstimmen.

Jedoch ist E kein T_2-Raum, sogar kein H-Raum. Z. B. hat $x=\frac{1}{4}$ eine $y=\frac{3}{4}$ nicht enthaltende Umgebung $V=(0, \frac{1}{2})\cup(2, \infty)$, $(V\in\mathfrak{B})$, aber daraus folgt die Existenz fremder Umgebungen von x und y nicht (die Umgebungen von x und y in E Enthalten immer Mengen von $\mathfrak{B}$, deren Durchschnitte nie leer sind.)

5. Wir untersuchen nun die Invarianzeigenschaften der Axiome (R) und (H).

Betrachten wir zwei Mengen E und E', eine Abbildung f von E in E', eine Topologie τ' auf E' und deren Urbildtopologie τ (in Bezug auf die Abbildung f) auf E. Es ist leicht zu sehen, daß der folgende Satz besteht:

Satz 6. *Die Urbildtopologie τ genügt dem Axiom* (R) *oder* (H), *wenn die Topologie τ' selbst demselben Axiom genügt, und die Umkehrung gilt, falls $f(E)=E'$ ist.*

Beweis. Es werde zuerst vorausgesetzt, daß τ' dem Axiom (R) oder (H) genügt. Ist z.B. $f^{-1}(U')$ eine y nicht enthaltende offene Umgebung von x, wobei also $U'\subset E'$ τ'-offen ist, so ist U' eine $f(y)$ nicht enthaltende Umgebung von $f(x)$, und daraus folgt (im Fall des Axiomes (R)) die Existenz einer τ-offenen Menge V' mit $f(x)\notin V'$, $f(y)\in V'$. Dann ist $f^{-1}(V')$ eine x nicht enthaltende Umgebung von y. Im Fall von (H) erhält man τ'-offene Mengen V' und W' mit $f(x)\in V'$, $f(y)\in W'$ $V'\cap W'=\emptyset$, d.h. $x\in f^{-1}(V')$, $y\in f^{-1}(W')$, $f^{-1}(V')\cap f^{-1}(W')=\emptyset$.

Erfüllt umgekehrt τ (R) oder (H), ist $f(E)=E'$, und ist z. B. U' eine y' nicht enthaltende τ'-offene Umgebung von $x'\in E'$, so ist $f^{-1}(U')$ eine y nicht enthaltende τ-offene Umgebung von x, wobei $x\in f^{-1}(x')\neq\emptyset$ und $y\in f^{-1}(y')\neq\emptyset$ beliebig gewählt wurden. Dann existieren eine τ-offene Menge $V=f^{-1}(V')$ mit $y\in V$, $x\notin V$, bzw. τ-offene Mengen $V=f^{-1}(V')$ und $W=f^{-1}(W')$ mit $x\in V$, $y\in W$, $V\cap W=\emptyset$, wobei V' und W' τ'-offen sind. Es gilt dann $y'\in V'$, $x'\notin V'$, bzw. $x'\in V'$, $y'\in W'$, $V'\cap W'=\emptyset$, da aus $V'\cap W'\neq\emptyset$ wegen $f(E)=E'$ $V\cap W\neq\emptyset$ folgte.

Außerdem besteht folgendes:

Satz 7. *Das stetige abgeschlossene Bild eines R-Raumes ist immer ein R-Raum.*

Beweis. Bezeichnen wir mit f eine stetige und abgeschlossene Abbildung, die den R-Raum E auf E' überträgt. Ist $x', y'\in E'$ und setzen wir voraus, daß z.B. x' eine offene Umgebung U' hat, die y' nicht enthält, so ist $f^{-1}(U')=U$ eine offene Menge, $f^{-1}(x')\subset U$, $f^{-1}(y')\cap U=\emptyset$, das heißt für beliebiges fixes $x\in f^{-1}(x')$ und jedes $y\in f^{-1}(y')$ gilt $U\in\mathfrak{v}(x)$, $y\notin U$. Da E ein R-Raum ist, besitzt dann jedes $y\in f^{-1}(y')$ eine offene Umgebung V_y die den Punkt x nicht enthält. $\cup V_y=V$ ist eine offene Umgebung von $f^{-1}(y')$ und $x \notin V$. Somit ist $x \in E-V$, und da $E-V$ abgeschlossen ist, folgt die Abgeschlossenheit von $f(E-V)$. Die Mengen $E-V$ und $f^{-1}(y')$ sind fremd, daher gilt $y' \notin f(E-V)$, die offene Menge $E'-f(E-V)=V'$ ist daher eine Umgebung von y', die x' wegen $x' \in f(E-V)$ nicht enthält.

Satz 8. *Das perfekte Bild eines H-Raumes ist immer ein H-Raum.* [5])

Beweis. Sei E ein H-Raum und f ein perfekte Abbildung von E auf E'. Weiterhin sei $x', y' \in E'$ mit der Voraussetzung, daß z.B. x' eine offene Umgebung W' hat, die y' nicht enthält. Die Mengen $f^{-1}(x')=A$ und $f^{-1}(y')=B$ sind kompakt, und da die Menge $f^{-1}(W')=W$ offen ist, weiterhin $A \subset W$, $B \cap W = \emptyset$ besteht, und E ein H-Raum ist, kann man bestätigen, daß A und B ebenfalls fremde offene Umgebungen U, V besitzen. [6]) Dann gilt aber für die abgeschlossenen Mengen $E-U$, $E-V$ $(E-U) \cup (E-V)=E$. Die Mengen $f(E-U)$, $f(E-V)$ sind wegen der Abgeschlossenheit von f abgeschlossen, $x' \notin f(E-U)$, $y' \notin f(E-V)$, $f(E-U) \cup \cup f(E-V)=E'$, das heißt $E'-f(E-U)=U'$ und $E'-f(E-V)=V'$ sind fremde offene Umgebungen von x' und y'.

Teilweise als Spezialfälle, teilweise als Folgen der obigen Behauptungen erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

Satz 9. *Jeder Unterraum eines R- bzw. H-Raumes ist ein R- bzw. H-Raum.*[7])

Satz 10. *Ist E^* der Quotientenraum, der der auf dem topologischen Raum E eingeführten Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \mathfrak{v}(x)=\mathfrak{v}(y)$ entspricht, so ist E genau dann ein R- bzw. H-Raum, wenn E^* ein T_1- bzw. T_2-Raum ist.*

E besitzt nämlich in diesem Fall die Urbildtopologie der Topologie von E^* in Bezug auf die natürliche Abbildung, und E^* genügt dem Axiom (T_0).

Satz 11. *Sind E ein R-Raum und E^* der zu einer nach oben halbstetigen Zerlegung von E gehörende Quotientenraum, dann ist auch E^* ein R-Raum.*

Die obere Halbstetigkeit der Zerlegung bedeutet nämlich die Abgeschlossenheit der natürlichen Abbildung.

Satz 12. *Sind E ein H-Raum und E^* der zu einer nach oben halbstetigen Zerlegung von E gehörende Quotientenraum, wo die Zellen der Zerlegung kompakt sind, dann ist auch E^* ein H-Raum.*

Es sei nun τ das Supremum der Topologien τ_i. Ist U eine τ-offene Umgebung eines Punktes x, die den Punkt y nicht enthält, so ist $U=\bigcap_1^n U_k$, wobei U_k τ_{i_k}-offen ist. Dann gilt $x \in U_k$, $y \notin U_k$ für mindestens ein k, und aus der Voraussetzung, daß τ_{i_k} Axiom (R) oder (H) genügt, folgt leicht dieselbe Behauptung für τ. Also:

Satz 13. *Das Supremum von R- bzw. H-Topologien ist selbst eine R- bzw. H-Topologie.*

---

[5]) Eine Abbildung heißt perfekt, wenn sie stetig und abgeschlossen ist und die Urbilder der Punkte kompakt sind.

[6]) S. später, Satz 20.

[7]) Für den Fall der R-Räume s. [2], 23 D. 2, der H-Räume, s. [9].

Aus den Sätzen 6 und 13 ergibt sich

Satz 14. *Der Produktraum von R- bzw. H-Räumen ist wiederum ein R- bzw. H-Raum.* [8])

Um Satz 8 tiefer einzuleuchten, können wir noch den folgenden Hilfssatz und Satz aussagen:

Hilfssatz 2. *Das stetige abgeschlossene Bild eines normalen Raumes ist immer normal.*

Beweis. Sei E ein normaler Raum und f eine stetige abgeschlossene Abbildung von E auf E'. Bezeichnen wir mit A', B' zwei beliebige fremde abgeschlossene Mengen in E', so sind $f^{-1}(A')=A$ und $f^{-1}(B')=B$ fremde abgeschlossene Mengen in E, und da E normal ist, besitzen A und B fremde offene Umgebungen U und V in E. Dann sind aber $E-U$ und $E-V$ abgeschlossene Mengen, und $(E-U)\cup(E-V)= =E$. Da die Abbildung abgeschlossen ist, sind auch die Mengen $f(E-U)$ und $f(E-V)$ abgeschlossen, und wegen $f(E-V)\cup f(E-U)=E'$, $A'\cap f(E-U)=\emptyset$, $B'\cap f(E-V)=\emptyset$, sind die Mengen $E'-f(E-U)=U'$, $E'-f(E-V)=V'$ fremde offene Umgebungen der Mengen A', B'.

Satz 15. *Ein R-Raum ist genau dann normal, wenn alle seine stetigen abgeschlossenen Bilder H-Räume sind.*[9])

Beweis. Aus Satz 7 und Hilfssatz 2 folgt unmittelbar, daß das stetige abgeschlossene Bild eines normalen R-Raumes immer ein normaler R-Raum, daher vollständig regulär, und umsomehr ein H-Raum ist.

Ist nun der R-Raum E nicht normal, so gibt es abgeschlossene fremde Mengen A, B in E, die keine fremde Umgebungen haben. Wir betrachten nun diejenige Zerlegung, bei der A und B je eine Zelle, und jeder Punkt der Menge $E-(A\cup B)$ ebenfalls eine Zelle ist. Bezeichnen wir mit E' den zu dieser Zerlegung gehörenden Quotientenraum und mit f die natürliche Abbildung von E auf E', so ist die Abbildung f stetig und auch abgeschlossen. In der Tat ist, falls F in E abgeschlossen ist, $f^{-1}(f(F))$ einer der abgeschlossenen Mengen F, $F\cup A$, $F\cup B$, $F\cup(A\cup B)$ gleich, und $f(F)$ ist in der Quotiententopologie abgeschlossen.

Der so konstruierte Raum E' ist aber kein H-Raum. $x'=f(A)$ und $y'=f(B)$ sind nämlich solche Punkte in E', die beide wegen der Abgeschlossenheit der Mengen $\{x'\}$ bzw. $\{y'\}$ eine, den anderen Punkt nicht enthaltende Umgebung besitzen, jedoch haben diese Punkte keine fremde Umgebungen. Hätten nämlich x' und y' fremde Umgebungen, so wären deren Urbilder fremde Umgebungen von A und B, entgegen unserer Voraussetzung.

6. Nun untersuchen wir den Zusammenhang der Axiome (R) und (H) mit den Begriffen der Kompaktheit und lokaler Kompaktheit.

Satz 16. *In einem R-Raum ist die abgeschlossene Hülle jedes Punktes kompakt.*

---

[8]) S. [2], 23 D. 11 für den Fall von R-Räumen, und [9] für den Fall von H-Räumen.

[9]) Eine ähnliche Behauptung gilt für T_1-Räume, die genau dann normal sind, wenn alle ihre stetigen abgeschlossenen Bilder T_2-Räume sind. Diese Bemerkung verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von M. Bognár.

BEWEIS. Sei x ein beliebiger Punkt in dem R-Raum E, und wir betrachten eine Überdeckung von $\overline{\{x\}}$, die aus den offenen Mengen V_i besteht. Eine dieser Mengen, z.B. V_k, enthält den Punkt x, und da der Raum ein R-Raum ist, besteht $\overline{\{x\}} \subset V_k$ wegen Axiom (R_1). Da die einzige offene Menge V_k $\overline{\{x\}}$ enthält, ist die Kompaktheit der abgeschlossenen Hülle von x bewiesen.

Satz 17. *Ist der Raum E bis auf seine kompakte Teilmenge A ein H-Raum und $x \in E - A$, dann haben x und A fremde Umgebungen, falls mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1° *für $y \in A$ besteht immer $\mathfrak{v}(x) \neq \mathfrak{v}(y)$,*
2° *E ist auch bis auf A ein T_0-Raum,*
3° *A ist noch abgeschlossen.*

BEWEIS. Es genügt den Fall 1° zu betrachten, daraus folgen 2° und 3° unmittelbar.

Nach der Voraussetzung besitzt x für gegebenes $y \in A$ eine solche offene Umgebung, die y nicht enthält. Da der Raum bis auf A ein H-Raum ist, gibt es dann zu jedem Punkt $y \in A$ fremde offene Umgebungen U_y, V_y von x bzw. y. Die Menge A ist kompakt, demgemäß hat A eine Überdeckung, die aus endlich vielen Mengen $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ besteht. $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ und der Durchschnitt $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ der entsprechenden Mengen $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$, der selbst eine Umgebung von x ist, sind fremde Umgebungen von A und x.

Aus der Bemerkung 2° folgt unmittelbar:

Satz 18. *Ist der Raum E bis auf seine kompakte Teilmenge A ein T_2-Raum, so ist A abgeschlossen.*

Satz 19. *Die fremden, kompakten Teilmengen A, $B \subset E$ haben fremde Umgebungen, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1° *E ist bis auf A ein H-Raum, und aus $x \in A$, $y \in B$ folgt immer $\mathfrak{v}(x) \neq \mathfrak{v}(y)$,*

2° *E ist mindestens bis auf eine der Teilmengen A, B ein H-Raum, und bis auf eine derselben Mengen ein T_0-Raum,*

3° *E ist mindestens bis auf eine der Teilmengen A, B ein H-Raum, und z.B. A hat eine B nicht treffende Umgebung.*

BEWEIS. Es genügt den Fall 1° zu betrachten, daraus folgen 2° und 3° unmittelbar.

Nach Satz 17, 1° gibt es für jedes $y \in B$ und A offene, fremde Umgebungen V_y, U_y. B ist kompakt, daher wird die Vereinigung V endlich vieler Mengen $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ die Menge B schon überdecken. Der Durchschnitt U der entsprechenden endlich vielen Mengen $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ ist dann eine offene Umgebung von A. V und U sind dann fremde Umgebungen von B und A.

Aus der Bemerkung 3° folgt:

Satz 20. *Ist E ein H-Raum, und hat mindestens eine von seinen kompakten fremden Teilmengen A, B eine von der anderen Menge fremde Umgebung (oder ist eine von ihnen abgeschlossen), so haben A und B fremde Umgebungen.*[10]

[10]) Als unmittelbare Folge der Sätze 16 und 20 enthält man das Lemma 7 von [9].

Satz 20, der eigentlich darauf hinweist, daß in einem H-Raum die fremden kompakten Mengen A, B sich als die Punkte $x \neq y$ benehmen, wurde im Beweis von Satz 8 schon angewendet.

Aus Satz 20 folgt unmittelbar der wichtige

Satz 21. *Jeder kompakte H-Raum ist normal.* [11])

Für die Trennung einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge gilt folgendes:

Satz 22. *Ist E bis auf die kompakte Menge $A \subset E$ ein H-Raum, und ist B abgeschlossen und von A fremd, so ist B auch von $\bar{A}$ fremd.*

Beweis. Aus $x \in A$, $y \in B$ folgt $\mathfrak{v}(x) \neq \mathfrak{v}(y)$, so daß A und $y \in B$ nach Satz 17, 1° fremde Umgebungen besitzen. Folglich gilt $y \notin \bar{A}$ für $y \in B$, also $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

Daraus ergibt sich unmittelbar, die, dem Axiom (R_1) ähnliche Behauptung:

Korollar. Ist E bis auf die kompakte Menge A ein H-Raum, und ist W eine Umgebung von A, so gilt $\bar{A} \subset W$.

Der folgende Satz ist dem Satz 16 ähnlich:

Satz 23. *Ist E bis auf die kompakte Menge A ein H-Raum, so ist auch $\bar{A}$ kompakt.*

Beweis. Ist $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ eine offene Überdeckung von $\bar{A}$, so gilt $A \subset \bigcup_1^n G_{i_j}$ und nach dem vorangehenden Korollar $\bar{A} \subset \bigcup_1^n G_{i_j}$.

Der folgende Satz war für reguläre bzw. Hausdorffsche lokalkompakte Räume bekannt (s. [5], S. 146):

Satz 24. *In einem lokalkompakten H-Raum E besitzt jeder Punkt eine aus kompakten abgeschlossenen Mengen bestehende Umgebungsbasis.*

Beweis. Ist C eine kompakte und U eine beliebige Umgebung von $x \in E$, so ist $\bar{C}$ nach Satz 23 kompakt, und $\operatorname{Int}(\bar{C} \cap U)$ ist eine Umgebung von x im kompakten und folglich regulären (vgl. Satz 20) Unterraum $\bar{C}$. Daher besitzt x eine in $\bar{C}$ (und auch in E) abgeschlossene (und somit kompakte) Umgebung $W \subset \operatorname{Int}(\bar{C} \cap U) \subset U$ im Unterraum $\bar{C}$, und W ist wegen $x \in \operatorname{Int} \bar{C}$ eine Umgebung von x auch in Bezug auf E.

Aus Satz 24 folgt unmittelbar, daß jeder lokalkompakte H-Raum regulär ist, und daraus ergibt sich nach dem Gedankengang von [5] (S. 146—147), daß in einem solchen Raum eine kompakte Menge eine aus kompakten abgeschlossenen Mengen bestehende Umgebungsbasis besitzt, ferner, daß jeder lokalkompakte H-Raum vollständig regulär ist. (Die letzte Behauptung wurde in [9], Corollary 10 auf anderem Wege bewiesen).

7. Wir untersuchen im folgenden die Invarianzeigenschaften der Axiome (T_0), (R) und (H) bei „strikten", insbesondere bei Alexandroffschen und Wallmanschen Raumerweiterungen.

Sei im folgenden E ein topologischer Raum und $E' \supset E$. Jedem Punkt $x \in E'$ sei ein offener Filter $\mathfrak{s}(x)$ zugeordnet, speziell für $x \in E$ bestehe $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{v}(x)$. Wir

[11]) Dieser Satz wurde auch in [9], Theorem 8 bewiesen.

setzen $h(X)=\{x: x\in E', X\in\mathfrak{s}(x)\}$ für $X\subset E$. Die Mengen $h(G)$, wobei G die offenen Teilmengen von E durchläuft, bilden die Basis einer Topologie auf E', und zwar der gröbsten Topologie auf E' mit der Eigenschaft, daß die Spur in E des Umgebungsfilters jedes Punktes $x\in E'$ mit $\mathfrak{s}(x)$ zusammenfällt; sie heißt die zum Filtersystem $\{\mathfrak{s}(x): x\in E'\}$ gehörende strikte Erweiterung.[11])

Wir erwähnen zuerst einige in sich interessanten Hilfssätze:

Hilfssatz 3. *Sei E' eine strikte Erweiterung von E, $\mathfrak{a}(x)$ der Umgebungsfilter von x in E' und $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{v}'(x)(\cap)E$; dann gilt:*

$$\mathfrak{s}(x)\subset\mathfrak{s}(y)\Leftrightarrow\mathfrak{v}'(x)\subset\mathfrak{v}'(y),$$
$$\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{s}(y)\Leftrightarrow\mathfrak{v}'(x)=\mathfrak{v}'(y).$$

BEWEIS. Aus $\mathfrak{v}'(x)\subset\mathfrak{v}'(y)$ folgt wegen $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{v}'(x)(\cap)E$ die Beziehung $\mathfrak{s}(x)\subset\mathfrak{s}(y)$.

Setzen wir voraus, daß Umgekehrt $\mathfrak{s}(x)\supset\mathfrak{s}(y)$ besteht, und ist $V\in\mathfrak{v}'(y)$, dann gibt es eine offene Basismenge $h(G_1)$, die y enthält und für die $y\in h(G_1)\subset V$ gilt. Wegen $G_1\in\mathfrak{s}(y)$ und wegen der Voraussetzung $\mathfrak{s}(x)\supset\mathfrak{s}(y)$ besteht $G_1\in\mathfrak{s}(x)$ und daher $x\in h(G_1)\subset V$ und $V\in\mathfrak{v}'(x)$. Demgemäß gilt $\mathfrak{v}'(x)\supset\mathfrak{v}'(y)$, was zu beweisen war.

Die zweite Behauptung von Hilfssatz 3 folgt aus der ersten unmittelbar.

Aus Hilfssatz 1 erhalten wir als Spezialfall

Hilfssatz 4. *Sei E' eine Erweiterung von E, $\mathfrak{v}'(x)$ der Umgebungsfilter von x in E' und $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{v}'(x)(\cap)E$, dann gilt*

$$\emptyset\in\mathfrak{v}'(x)(\cap)\mathfrak{v}'(y)\Leftrightarrow\emptyset\in\mathfrak{s}(x)(\cap)\mathfrak{s}(y).$$

Man könnte fragen, ob Hilfssatz 3, ebenso wie Hilfssatz 4, für allgemeinere, nicht nur für strikte Raumerweiterungen gültig ist. Die Antwort ist im allgemeinen Falle negativ, wie man es an der Hand des folgenden Gegenbeispiels sehen kann.

Bezeichne E' die Menge der natürlichen Zahlen, und seien in E' außer E' nur die endlichen Mengen abgeschlossen. E' ist dann ein T_1-Raum. Bezeichne E die Menge der geraden Zahlen. Da die Umgebungen jedes Punktes $x\in E'$ den Komplementärmengen der x nicht enthaltenden endlichen Mengen gleich sind, ist E dicht in E', und für beliebiges $x\in E'-E$ ist $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{v}'(x)(\cap)E$ mit dem Filter identisch, der aus den Komplementärmengen in E der endlichen Teilmengen von E besteht. Für $x, y\in E'-E, x\neq y$ besteht dann $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{s}(y)$, obwohl $\mathfrak{v}'(x)\neq\mathfrak{v}'(y)$ gilt, da E' ein T_1-Raum ist.

Mit Hilfe der obigen Hilfssätze kann man für die *strikte* Erweiterung E' von E folgende Sätze leicht beweisen:

Satz 25. *E' ist genau dann ein T_0-Raum, wenn aus $x\neq y$ immer $\mathfrak{s}(x)\neq\mathfrak{s}(y)$ folgt.*

Satz 26. *E' ist genau dann ein R-Raum, wenn aus $\mathfrak{s}(x)\subset\mathfrak{s}(y)$ immer $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{s}(y)$ folgt.*

Satz 27. *E' ist genau dann ein T_1-Raum, wenn aus $\mathfrak{s}(x)\subset\mathfrak{s}(y)$ immer $x=y$ folgt.*

Satz 28. *E' ist genau dann ein H-Raum, wenn aus $\emptyset\notin\mathfrak{s}(x)(\cap)\mathfrak{s}(y)$ immer $\mathfrak{s}(x)=\mathfrak{s}(y)$ folgt.*

---

[11]) Vgl. etwa [6], S. 159. Ein äquivalenter Begriff wurde wahrscheinlich zuerst in [11] eingeführt.

Satz 29. *E' ist genau dann ein T_2-Raum, wenn aus $x \neq y$ immer $\emptyset \in \mathfrak{s}(x)(\cap)\mathfrak{s}(y)$ folgt.*

Dabei kann man noch bemerken, daß E' ein T_0-, R-, T_1-, H-, T_2-Raum bis auf E ist, sobald die in den Sätzen 25—29 angegebenen Bedingungen für solche Punkte $x \neq y$ erfüllt sind, die nicht beide zu E gehören.

Bezeichne speziell E^* die Alexandroffsche „einpunktige" Erweiterung des Raumes E. Es gelten dann die folgenden Sätze:

Satz 30. *E^* ist bis auf E immer ein T_0-Raum, demgemäß auch ein T_0-Raum, sobald E ein T_0-Raum ist.*

Satz 31. *E^* ist ein R-Raum und bis auf E ein T_1-Raum, wenn E ein R-Raum ist.*

Satz 32. *E^* ist genau dann ein H-Raum, wenn E ein lokalkompakter H-Raum ist.*[12])

In der Theorie der Wallmanschen Erweiterung von T_1-Räumen spielen bekanntlich die ultraabgeschlossenen (d.h. die maximalen abgeschlossenen) Filter eine grundlegende Rolle, und die Tatsache ist von Bedeutung, daß in einem T_1-Raum E die Filter $\hat{x} = \{X: x \in X \subset E\}$ $(x \in E)$ ultraabgeschlossene Filter sind.

Ohne besondere Schwierigkeit kann man nun den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 5. *In einem R-Raum E sind die Filter $[x] = \{X: \overline{\{x\}} \subset X \subset E\}$ $(x \in E)$ ultraabgeschlossenen.*

Beweis. $[x]$ ist offenbar ein abgeschlossener Filter. Falls $\mathfrak{a}$ einen abgeschlossenen Filter mit $\mathfrak{a} \supset [x]$ bezeichnet, so folgt aus $A \in \mathfrak{a}$ die Existenz von $A_1 \subset A$, $A_1 \in \mathfrak{a}$, wobei A_1 abgeschlossen ist. Dann gilt aber $x \in A_1$, da aus $x \notin A_1$, also $E - A_1 \in \mathfrak{v}(x)$ wegen Axiom (R_1) $\overline{\{x\}} \subset E - A_1$ folgen würde, was der Bedingung $\overline{\{x\}} \in \mathfrak{a}$ widerspricht. Aus $x \in A_1$ ergibt sich $\overline{\{x\}} \subset A_1$, also $A_1 \in [x]$, und erst recht $A \in [x]$, was zu beweisen war.

Es sei nun E ein R-Raum; wir setzen $\alpha(x) = [x]$ für $x \in E$, und wählen eine Menge $E'' \supset E$ so, daß die Elemente von $E'' - E$ in eineindeutiger Weise durch α auf die nichttrivialen (d.h. von den Filtern $[x]$ $(x \in E)$ verschiedenen) ultraabgeschlossenen Filter von E abgebildet werden. Ist nun $\mathfrak{s}(x)$ für $x \in E''$ der aus allen Umgebungen der Mengen von $\alpha(x)$ bestehende Filter, so folgt leicht aus (R_1) die Beziehung $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{v}(x)$, so daß auf diese Weise auf E'' eine strikte Erweiterung von E entsteht; sie heißt die Wallmansche Erweiterung von E.

Wie im Fall der T_1-Räume[13]) beweist man nun, daß E'' kompakt ist, und aus den Sätzen 26 und 27 folgt leicht:

Satz 33. *Die Wallmansche Erweiterung eines R-Raumes E ist ein R-Raum und bis auf E ein T_1-Raum.*

Ebenso ergibt sich aus Sätzen 28 und 29:

Satz 34. *Ist E ein normaler R-Raum, so ist die Wallmansche Erweiterung von E ein H-Raum (folglich normal) und bis auf E ein T_2-Raum.*

---

[12]) S. [9], Theorem 9.

[13]) S. z. B. [6], S. 164.

Literatur

[1] B. BANASCHEWSKI—J. M. MARANDA, Proximity functions, *Math. Nachr.* **23** (1961), 1—37.
[2] E. ČECH, Topological spaces, *Prague—London—New York—Sydney*, 1966.
[3] A. S. DAVIS, Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), 886—893.
[4] В. А. Ефремович, Геометрия Близости I, Мат. Сборник **31** (**73**) (1952), 189—200.
[5] J. L. KELLEY, General Topology, *Princeton—New Jersey—Toronto—London—New York*, 1955.
[6] H. J. KOWALSKY, Topologische Räume, *Basel—Stuttgart*, 1961.
[7] M. W. LODATO, On topologically induced generalized proximity relations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 417—422.
[8] K. MORITA, On the simple extension of a space with respect to a uniformity I, *Proc. Japan. Acad.* **27** (1951), 65—72.
[9] M. G. MURDESHWAR—S. A. NAIMPALLY, R_1-topological spaces, *Canad. Math. Bull.* (1966), in Druck.
[10] N. A. SHANIN, On special extensions of topological spaces, ДАН СССР **38** (1943), 3—6.
[11] N. A. SHANIN, On separation in topological spaces, ДАН СССР **38** (1943), 110—113.
[12] Ю. М. Смирнов, О пространствах близости, Мат. Сборник, **31** (**73**) (1952), 543—574.

(Eingegangen am 24. December 1966.)