Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände

Von ANDOR KERTÉSZ (Debrecen)

Herrn Professor Alexander Kuroš anlässlich seines 60. Geburtstages mit Zuneigung und Verehrung gewidmet

§ 1. Einleitung

Es ist das Ziel dieser Arbeit, einige Charakterisierungen für kompakt erzeugte relativ atomare modulare Verbände anzugeben, die Verallgemeinerungen von Ergebnissen über gewisse vollständig reduzible algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Moduln; siehe [4]) darstellen. Als Folgerung erhalten wir Kriterien dafür, daß eine Multioperatorgruppe vollständig reduzibel, d.h. die diskrete direkte Summe von einfachen Multioperatorgruppen ist. Es wird auch gezeigt, daß die Mächtigkeit der Menge der direkten Summanden in einer beliebigen Darstellung einer vollständig reduziblen Multioperatorgruppe G als direkte Summe von einfachen Multioperatorgruppen eine Invariante von G ist.

Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit wurde schon in [6] ohne Beweise veröffentlicht. [6] ist ein Auszug eines Vortrags des Verf., gehalten auf der Konferenz über Allgemeine Algebra in Warszawa 7. Sept. — 11. Sept. 1964.

§ 2. Vorbereitungen

Es sei V ein vollständiger (in anderer Terminologie: kompletter) Verband. Ein Element $c \in V$ wird *kompakt* genannt, falls aus der Relation $c \leqq \bigcup T$, wobei T eine Untermenge von V ist, stets die Relation $c \leqq T'$ für eine endliche Untermenge T' von T folgt. Der Verband V heißt *kompakt erzeugt*, (oder *algebraisch*), wenn er vollständig ist und wenn es für jedes Element $d \in V$ eine Menge C kompakter Elemente von V gibt, für welche $\bigcup C = d$ gilt. Der Verband V heißt *modular*, wenn für ein beliebiges Elemententripel $a, b, c \in V$, wobei aber $b \leqq a$ sein soll, die Gleichung

$$a \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c)$$

erfüllt ist.

Im folgenden bezeichnet V *stets* einen kompakt erzeugten modularen Verband und K die Menge aller seiner kompakten Elemente. Es sei 0 das minimale und 1 das maximale Elemente von V. Ein Element $0 < p \in V$ wird ein *Atom* genannt, wenn aus $0 \leqq x \leqq p$ immer $x = 0$ oder $x = p$ folgt. Dual wird hierzu ein Element $1 > m \in V$

ein *duales Atom* genannt, falls aus $m \leqq x \leqq 1$ stets $x=m$ oder $x=1$ folgt. Ist $a, b \in V$ und $a \leqq b$, so verstehen wir unter dem Intervall $[a, b]$ die Menge aller Elemente $x \in V$, welche die Bedingung $a \leqq x \leqq b$ erfüllen. Das Intervall $[a, b]$ ist immer ein Unterverband von V.

Es sei M eine nichtleere Menge von Elementen aus V. Wir sagen, daß die Menge M die *Minimalbedingung* erfüllt, wenn jede streng absteigende Kette von Elementen aus M

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

nach endlich vielen Gliedern abbricht. Ist $(M, \leqq)$ eine halbgeordnete Menge mit Minimalbedingung, so besitzt jede nichtleere Untermenge N von M ein minimales Element in $(N, \leqq)$; und umgekehrt.

In dieser Arbeit spielt der Begriff der *direkten Summe* (oder in der Terminologie von [7], IV. § 3.: der direkten Vereinigung) und der *direkten Zerlegung* von Elementen aus V eine wichtige Rolle. Die grundlegenden Eigenschaften dieser Begriffe, die man am bequemsten in [7] studieren kann, werden ohne besondere Bezugnahme benutzt. Im Gegensatz zu der multiplikativen Schreibweise in [7] werden wir jedoch additive Schreibweise benutzen, d.h.

$$a = b_1 + \dots + b_n$$

bzw.

$$a = \sum_{\nu \in \Gamma} b_\nu = \sum B$$

soll bedeuten, daß a die direkte Summe der Elemente $b_1, \dots, b_n$, bzw. der Menge $B \overset{\text{def}}{=} \langle \dots b_\nu, \dots \rangle_{\nu \in \Gamma}$ ist.

Die Menge $\langle \dots, b_\nu, \dots \rangle_{\nu \in \Gamma}$ der Elemente $0 < b_\nu$ des Verbandes V wird *unabhängig* genannt, falls die direkte Summe $\sum\limits_{\nu \in \Gamma} b_\nu$ existiert, d.h., wenn für jedes $\mu \in \Gamma$

$$b_\mu \cap \Big(\bigcup_{\substack{\nu \in \Gamma \\ \nu \neq \mu}} b_\nu \Big) = 0$$

gilt. Eine unabhängige Untermenge M einer Menge $H \subseteqq V$ heißt *maximal unabhängig* in H, wenn für jedes Element c (>0) von H die Relation $c \cap (\bigcup M) > 0$ besteht. Eine unabhängige Untermenge B der Menge K aller kompakten Elemente von V heißt eine *Basis* von V, wenn $\Sigma B = 1$ gilt. Eine Basis von V ist stets eine maximale unabhängige Untermenge von K, die sogar *maximal* unabhängig auch in V ist, da ja V kompakt erzeugt ist. Die umgekehrte Behauptung gilt aber nicht. Weiter unten werden wir diejenige Frage beantworten, unter welchen Bedingungen eine maximale unabhängige Untermenge von K eine Basis von V ist. Aus der Definition der Unabhängigkeit folgt sofort, daß eine Untermenge U von K genau dann unabhängig ist, wenn jede ihrer endlichen Untermengen unabhängig ist. Die Unabhängigkeit für Untermengen von K ist also eine Eigenschaft von endlichem Charakter, folglich besitzt — nach dem Lemma von TEICHMÜLLER—TUKEY (siehe z.B. [8]) — jede Untermenge von K mindestens eine maximale unabhängige Untermenge.

Ein Element b von V heißt ein *Servanzelement* (englisch: pure element) in V, wenn b für jedes $s \in K$ in dem Intervall $[0, b \cup s]$ ein relatives Komplement besitzt,[1]) d.h.

[1]) Diesen Begriff haben T. J. HEAD und der Verf. von einander unabhängig entdeckt (siehe [2] und [6]).

[2]) Die Äquivalenz der Bedingungen *b)* und *d)* ist im wesentlichen auch in [2] bewiesen.

wenn es ein Element $b'(\leqq b \cup s)$ mit $b+b'=b \cup s$ gibt. Diese Terminologie wird dadurch gerechtfertigt, daß es hier um eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes von Servanzuntergruppen einer abelschen Gruppe handelt.

Es gilt der folgende

Satz 1. *Es sei V ein kompakt erzeugter modularer Verband und K die Menge aller kompakten Elemente von V. Eine Untermenge B von K ist genau dann eine Basis von V, wenn B maximal unabhängig in K und ΣB ein Servanzelement in V ist.*

BEWEIS. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist evident.

Nunmehr nehmen wir an, daß B eine maximale unabhängige Untermenge von K und ΣB ein Servanzelement in V ist. Wir wollen zeigen, daß $\Sigma B=1$ gilt. Wäre $\Sigma B<1$, so gäbe es ein Element $s \in K$ mit

$$\Sigma B<(\Sigma B) \cup s \leqq 1.$$

Da ΣB ein Servanzelement in V ist, hätten wir für ein geeignetes Element $t \in V$, $t>0$ die Relation

$$(\Sigma B)+t=(\Sigma B) \cup s \leqq 1.$$

Dann gibt es ein kompaktes Element s' mit $s'>0$, $s' \leqq t$, und ist die Menge $\langle B, s'\rangle$ eine unabhängige Untermenge von K, die die Menge B echt umfaßt. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität der Menge B. Folglich gilt $\Sigma B=1$, womit der Satz bewiesen ist.

§ 3. Relativ atomare Verbände

In diesem Paragraphen wollen wir die relativ atomare kompakt erzeugte modulare Verbände untersuchen. Wir beweisen den

Satz 2. *Es sei V ein kompakt erzeugter modularer Verband und K die Menge aller kompakten Elemente von V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *V ist relativ atomar, d.h., für jedes Paar $b<a$ $(a, b \in V)$ gibt es ein Atom p in V, für welches $b<b \cup p \leqq a$ gilt;*

b) *1 ist die direkte Summe von Atomen;*

c) *es existiert in V eine nichtleere Menge von dualen Atomen, deren Durchschnitt 0 ist und die Menge K erfüllt die Minimalbedingung;*

d) *jedes Element von V ist ein Servanzelement in V;*

e) *jede maximale unabhängige Untermenge von K ist eine Basis von V.*

BEWEIS. a)$\Rightarrow$b): Es sei S eine maximale unabhängige Menge von Atomen in V. Dann gilt $P \overset{\text{def}}{=} \Sigma S \leqq 1$. Wäre $P<1$, so gäbe es ein Atom $p \in V$ mit $P<P \cup p \leqq 1$. Da in diesem Fall $P \cap p=0$ ist, ist die Menge $\langle P, p\rangle$ ebenfalls unabhängig — im Widerspruch zu der Voraussetzung über P. Daraus folgt, daß $\Sigma S=1$ gilt.

b)$\Rightarrow$c): Es sei

$$1=\sum_{\nu \in \Gamma} a_\nu, \tag{1}$$

wobei jedes a_ν ein Atom in V ist, ferner sei

$$m_\nu \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\mu \in \Gamma \\ \mu \neq \nu}} a_\mu .$$

Dann gilt $a_\nu \cup m_\nu = 1$, $a_\nu \cap m_\nu = 0$, d.h. $a_\nu + m_\nu = 1$. Da a_ν Atom ist, ist m_ν ein duales Atom in V. Wir haben noch zu zeigen, daß

$$\bigcap_{\nu \in \Gamma} m_\nu = 0$$

ist. Im Gegensatz zu dieser Behauptung nehmen wir an, daß $d \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu \in \Gamma} m_\nu > 0$ ist. Dann gibt es ein Element $0 < s \in K$ mit $s \leqq d$ und endlich viele geeignete Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_n (\in \Gamma; n > 1)$, für welche

$$s \leqq \bigcup_{i=1}^{n} a_{\nu_i} \quad \text{und} \quad s \not\leqq \bigcup_{i=1}^{n-1} a_{\nu_i}$$

gilt. Da a_{ν_n} Atom und V modular ist, folgt

$$a_{\nu_n} \leqq \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_{\nu_i} \right) \cup s.$$

Daraus ergibt sich— wegen $\bigcup_{i=1}^{n-1} a_{\nu_i} \leqq m_{\nu_n}$ und $s \leqq m_{\nu_n}$ —

$$a_{\nu_n} \leqq m_{\nu_n},$$

was der Definition von m_{ν_n} widerspricht.

Es sei

$$s_1 > s_2 > \ldots > s_1 > \ldots \tag{2}$$

eine beliebige streng absteigende Kette von Elementen aus K. Dann gibt es nach (1) eine endliche Untermenge $\langle \mu_1, \ldots, \mu_k \rangle$ von Γ mit

$$s_1 \leqq a \overset{\text{def}}{=} a_{\mu_1} + \ldots + a_{\mu_k}.$$

Da

$$a = a_{\mu_1} + \ldots + a_{\mu_k} > \ldots > a_{\mu_1} + a_{\mu_2} > a_{\mu_1}$$

eine maximale Kette zwischen a und a_{μ_1} ist und das Intervall $[a_{\mu_1}, a]$ modular ist, genügt der Verband $[a_{\mu_1}, a]$ der Jordan—Dedekindsche Kettenbedingung, d.h., die Länge jeder Kette zwischen a und a_{μ_1} beträgt höchstens k ([1], siehe auch [9], Satz 31). Insbesondere ist die Kette (2) notwendig endlich.

c)$\Rightarrow$d): Es seien $m_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ duale Atome in V mit

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda = 0, \tag{3}$$

und in K sei die Minimalbedingung erfüllt. Wir wollen zeigen, daß jedes Element von V ein Servanzelement ist.

Zu diesem Zweck genügt es nachzuweisen, daß es zu jedem Element $s \in K$ endlich viele Atome $a_1, \ldots, a_k$ von V gibt, so daß s deren direkte Summe ist, also

$$s = a_1 + \ldots + a_k \tag{4}$$

gilt. Ist nämlich v ein beliebiges Element von V, so wählen wir sukzessiv die Elemente $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$ unter den Summanden des Elementes s so aus, daß

$$v \cap a_{i_1} = 0,$$
$$(v \cup a_{i_1}) \cap a_{i_2} = 0,$$
$$\vdots$$
$$(v \cup a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_{l-1}}) \cap a_{i_l} = 0$$

und

$$v \cup (a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_l}) = v \cup s \qquad (l \leqq k)$$

gilt. Dann gilt auch

$$v \cap (a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_l}) = 0$$

(vgl. [7], IV. §3. 3 und 4), demnach folgt tatsächlich $v \cup s = v + a$ mit

$$a \overset{\text{def}}{=} a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_l}.$$

Um einen Beweis von (4) zu erbringen, betrachten wir ein beliebiges $s \in K$, für welches — gemäß der Minimalbedingung in K — mindestens ein Atom $a_1 \in K$ mit $a_1 \leqq s$ gibt. Dann gibt es — wegen (3) — ein duales Atom, d.h. ein $\mu \in \Gamma$ mit

$$a_1 \cap m_\mu = 0 \quad \text{und} \quad a_1 \cup m_\mu = 1.$$

Folglich gilt einerseits

$$a_1 \cap (m_\mu \cap s) = (a_1 \cap m_\mu) \cap s = 0$$

und andererseits

$$a_1 \cup (s \cap m_\mu) = s \cap (a_1 \cup m_\mu) = s,$$

d.h.

$$s = a_1 + (m_\mu \cap s). \tag{5}$$

Dann gibt es eine Untermenge $\langle \ldots, v_\nu, \ldots \rangle_{\nu \in \Gamma}$ von K mit

$$m_\mu \cap s = \bigcup_{\nu \in \Gamma} v_\nu,$$

und es folgt

$$s = a_1 \cup \Big(\bigcup_{\nu \in \Gamma} v_\nu \Big).$$

Da s und a_1 kompakte Elemente sind, gibt es eine endliche Untermenge $\langle \nu_1, \ldots, \nu_t \rangle$ von Γ, so daß

$$s = a_1 \cup (v_{\nu_1} \cup \ldots \cup v_{\nu_t})$$

gilt. Hierbei ist

$$v_{\nu_1} \cup \ldots \cup v_{\nu_t} = (v_{\nu_1} \cup \ldots \cup v_{\nu_t}) \cup [a_1 \cap (m_\mu \cap s)] =$$
$$= (m_\mu \cap s) \cap (a_1 \cup v_{\nu_1} \cup \ldots \cup v_{\nu_t}) = (m_\mu \cap s) \cap s = m_\mu \cap s.$$

Folglich ist der Summand $s_1 \overset{\text{def}}{=} m_\mu \cap s$ in (5) ebenfalls kompakt. Falls s_1 bereits ein Atom ist, gilt (4). Anderenfalls gibt es ein Atom $a_2 \in K$ mit $a_2 \leqq s_1$, und durch ein ähnlichen Schluß wie oben erhalten wir

$$s = a_1 + a_2 + s_2,$$

wobei s_2 ein kompaktes Element ist. Dieses Verfahren führt in endlich vielen Schritten zu einem Atom s_i, da

$$s > s_1 > s_2 > \ldots$$

ein streng absteigende Kette von kompakten Elementen ist.

d)$\Rightarrow$e): Es sei $S = \langle \ldots, b_\lambda, \ldots \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ eine maximale unabhängige Untermenge von K. Wir setzen

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

und zeigen, daß $u = 1$ ist. Nehmen wir an, daß entgegen unserer Behauptung $u < 1$ ist, so gilt für ein geeignetes Element $s \in K$

$$u < u \cup s \leqq 1,$$

und es gibt nach d) ein Element $v \leqq u \cup s$ mit

$$u \cup s = u + v.$$

Dann existiert ein kompaktes Element s' mit $0 < s' \leqq v$. Wegen $u \cap s' = 0$ ist die Menge $\langle \ldots, b_\lambda, \ldots, s' \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ unabhängig, was der Maximalität von S widerspricht. Es gilt also $u = 1$, d.h., S ist eine Basis von G.

e)$\Rightarrow$a): Wir wollen beweisen: Wenn jede maximale unabhängige Untermenge von K eine Basis von V ist, so ist V atomar. Den Kern des Beweises bildet der Nachweis der Tatsache, daß jedes Element $s \in K$ eine Darstellung der Form

$$s = a_1 + \ldots + a_n \tag{6}$$

besitzt, wobei die a_i Atome von V sind. Ist das nämlich der Fall und besteht $b < c$ $(b, c \in V)$, so gibt es ein Element $s \in K$ der Form (6) mit

$$b < b \cup s \leqq c$$

und einen Index $(1 \leqq) i (\leqq n)$ mit

$$a_i \cap b = 0.$$

Da $a_i \leqq s \leqq c$ ist, gilt

$$b < b \cup a_i \leqq c,$$

was zu beweisen ist.

Um beweisen zu können, daß jedes kompakte Element s aus V eine Darstellung (6) besitzt, zeigen wir zunächst, daß auch jeder Unterverband $[0, b]$ $(b \in V)$ von V die Eigenschaft e) hat. Es sei S_1 eine maximale unabhängige Untermenge von K, die aus den Elementen $u_\nu \leqq b$ besteht. Durch Hinzunahme von Elementen $v_\mu \in K$ ergänzen wir diese Menge $S_1 = \langle \ldots, u_\nu, \ldots \rangle$ mit der Menge $S_2 = \langle \ldots, v_\mu, \ldots \rangle$ zu einer maximalen unabhängigen Untermenge S von K. Nach unserer Voraussetzung ist S eine Basis von V, d.h., es ist

$$1 = \Sigma S_1 + \Sigma S_2.$$

Hierbei gilt

$$b \cap \Sigma S_2 = 0. \tag{7}$$

Wäre nämlich

$$d \stackrel{\text{def}}{=} b \cap \Sigma S_2 > 0,$$

so besäße K ein Element s_0 mit

$$0 < s_0 \leqq d \leqq b,$$

un da $s_0 \leqq \Sigma S_2$ und $\Sigma S_1 \cap \Sigma S_2 = 0$ ist, wäre die Menge $\langle S_1, s_0 \rangle$ eine unabhängige Untermenge von Elementen $\leqq b$ aus K, die die Menge S_1 echt umfaßt. Das ist aber wegen der Maximalität von S_1 nicht möglich. Also gilt in der Tat (7) und demnach

$$b = \Sigma S_1 + (b \cap \Sigma S_2) = \Sigma S_1$$

(siehe [7], IV. §3. 6).

Wir wollen jetzt die Gültigkeit von (6) für ein beliebieges Element $s \in K$ beweisen. Vorher beweisen wir, daß s eine direkte Zerlegung

$$s = a_1 + z_1 \tag{8}$$

besitzt, wobei a_1 ein Atom und z_1 ein kompaktes Element ist. Setzen wir nämlich voraus, daß wir dies schon bewiesen haben, so geben wir für z_1 eine direkte Zerlegung

$$z_1 = a_2 + z_2$$

an, wobei a_2 ein Atom und $z_2 \in K$ ist. Dann gilt

$$s = a_1 + a_2 + z_2.$$

Nach endlich vielen ähnlichen Schritten — da ja s ein kompaktes Element ist — erhalten wir (6), was zu beweisen ist.

Es sei nunmehr $s \in K$. Dann hat auch der Verband $[0, s]$ die Eigenschaft e). Ist s selbst ein Atom, so sind wir fertig. Ist das nicht der Fall, dann gibt es ein $s_1 (\in K)$ mit $0 < s_1 < s$. Es sei S_1 irgendeine das Element s_1 enthaltende maximale unabhängige Untermenge von K, deren Elemente $\leqq s$ sind. Die Menge S_1 besteht aus mindestens zwei Elementen, da S_1 eine Basis von $[0, s]$ und $s_1 < s$ ist. Ist s_1 auch kein Atom, so gibt es ein $s_2 (\in K)$ mit $0 < s_2 < s_1$. Das Element s_2 und die von s_1 verschiedenen Elemente von S_1 bilden offenbar eine unabhängige Menge S_1' für welche — wegen $s_2 < s_1$ und der Modularität von V —

$$s_1 \cap (\Sigma\, S_1') \;=\; s_2 \cup [s_1 \cap \Sigma(S_1 \backslash s_1)] \;=\; s_2 \cup 0 \;=\; s_2 < s_1,$$

d.h. $\Sigma S_1' < s$ gilt. Dann kann die Menge S_1' zu einer mindestens drei Elemente enthaltenden maximalen unabhängigen Untermenge $S_2 \subseteqq K$ von Elementen $\leqq s$ ergänzt werden, so daß $\Sigma S_2 = s$ gilt. Indem wir nun dieses Verfahren für s_2 fortsetzen, müssen wir in endlich vielen Schritten zu einem Atom von V gelangen. Anderenfalls besäße nämlich der Verband $[0, s]$ eine unendliche Basis, d.h. es gälte $s = \Sigma S$ für ein unendliches S, was aber unmöglich ist, da s ein kompaktes Element ist. Folglich gilt $s = a_1 + z_1$, wobei a_1 ein Atom von V ist. Da s und a_1 kompakte Elemente sind, zeigt man ganz ähnlich wie bei der Implikation c)$\Rightarrow$d), daß z_1 ebenfalls kompakt ist. Damit haben wir (8) und zugleich den Satz 2 bewiesen.

Bemerkung. Man kann leicht einsehen, daß die zwei folgenden Aussagen über einen kompakt erzeugten modularen Verband V äquivalent sind:

1. *Jede maximale unabhängige Untermenge der Menge K aller kompakten Elemente des Verbandes V ist eine Basis von V;*

2. *für jede maximale unabhängige Untermenge B von V gilt $\Sigma B = 1$.*

§ 4. Vollständig Reduzible Ω-Gruppen

In diesem Paragraphen wollen wir die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf Multioperatorgruppen anwenden.

Es sei G eine additiv geschriebene (aber nicht notwendig kommutative) Gruppe mit dem neutralen Element 0 und Ω ein Bereich von Operatoren, wobei jedem Element ω aus Ω eine natürliche Zahl $n=\Phi(\omega)$ zugeordnet ist. Die Gruppe G heißt eine *Ω-Gruppe* (oder eine *Multioperatorgruppe*), falls jedem $\omega(\in\Omega)$ und jedem geordneten System von $n=\Phi(\omega)$ Elementen $g_1, g_2, \dots, g_n$ aus G ein wohlbestimmtes Element $g_1 g_2 \dots g_n \omega \in G$ zugeordnet wird, so daß für jedes $\omega(\in\Omega)$ insbesondere

$$00 \dots 0\omega = 0$$

(mit n Nullen auf der linken Seite) erfüllt ist. Ein Operator $\omega\in\Omega$ mit $\Phi(\omega)=n$ heißt ein *n-ärer Operator* oder eine *n-äre Operation in G*. Ist insbesondere hierbei Ω die leere Menge, so erhalten wir die gewöhnlichen Gruppen. Ferner stellt eine Ω-Gruppe R einen (assoziativen) Ring dar, wenn $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist und Ω aus einer einzigen (assoziativen) Multiplikation besteht, die mit der Addition durch die Distributivgesetze verknüpft ist.

Diese von P. J. Higgins [3] gegebene Definition von Ω-Gruppen bestimmt eine primitive Klasse von universellen Algebren, die allgemein genug ist um verschiedene wichtige Klassen von algebraischen Strukturen zu umfassen, und die zugleich speziell genug ist, um (meistens mit gruppentheoretischen Methoden) tiefergehende Untersuchungen durchführen zu können. Bezüglich der Grundlagen der Theorie der Multioperatorgruppen verweisen wir auf [3] und [7] (III. § 2).

Besitzt eine Ω-Gruppe genau zwei verschiedene Ideale, so heißt sie *einfach*. Eine Ω-Gruppe G heißt *vollständig reduzibel*, falls sie eine Darstellung als eine (diskrete) direkte Summe einfacher Ω-Gruppen gestattet. Die Schreibweise

$$G = A_1 \oplus \dots \oplus A_n, \quad \text{bzw} \quad G = \sum_{\nu\in\Gamma}^{\oplus} A_\nu$$

soll bedeuten, daß G die direkte Summe der Ideale $A_1, \dots, A_n$ bzw. A_ν $(\nu\in\Gamma)$ von G ist. Ein Ideal A von G heißt ein direkter Summand von G, wenn es in G ein Ideal B gibt, so daß $G=A\oplus B$ gilt.

Es sei U eine Untermenge der Ω-Gruppe G. Wir bezeichnen das durch U erzeugte Ideal in G mit (U). Ein Ideal von G, das durch ein einziges Element $g\in G$ erzeugt werden kann, heißt *Hauptideal* und wird mit (g) bezeichnet. Eine Untermenge $S=\langle \dots, s_\nu, \dots\rangle_{\nu\in\Gamma}$ von 0 verschiedener Elementen der Ω-Gruppe G heißt *unabhängig* wenn die direkte Summe $\sum_{\nu\in\Gamma}^{\oplus}(s_\nu)$ existiert. Gilt für jedes Element $0\neq g\in G$

$$(g)\cap \sum_{\nu\in\Gamma}^{\oplus}(s_\nu) \neq 0,$$

so heißt S eine *maximale unabhängige* Untermenge von G. Ist insbesondere

$$\sum_{\nu\in\Gamma}^{\oplus}(s_\nu) = G$$

so sagen wir, die Menge S ist eine *Basis* von G. Eine Basis ist immer eine maximale unabhängige Untermenge von G, das Umgekehrte gilt aber im allgemeinen nicht.

Die Tatsache, daß die Ideale einer beliebigen Ω-Gruppe G einen kompakt erzeugten modularen Verband bilden, wobei die kompakten Elemente genau die durch endlich viele Elemente erzeugte Ideale von G sind, erlaubt uns, den folgenden Satz auszusprechen:

Satz 3. *Für eine Ω-Gruppe G sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

α) G ist vollständig reduzibel;

β) es existiert in G eine nichtleere Menge von maximalen Idealen, deren Durchschnitt nur das Element 0 enthält, und G erfüllt die Minimalbedingung für Hauptideale;

γ) jedes Ideal von G ist ein direkter Summand von G;

δ) jede maximale unabhängige Untermenge von G ist eine Basis von G.

Folgerung. *Gilt für G die Bedingung β), so erfüllt G die Minimalbedingung für endlich erzeugbare Ideale.*

Beweis. $\alpha)\Rightarrow\beta)$ gilt offenbar wegen des Satzes 2.

$\beta)\Rightarrow\gamma)$: Es sei der Durchschnitt der maximalen Ideale $M_a(\lambda\in\Lambda)$ der Ω-Gruppe G gleich 0, und es sei in G die Minimalbedingung für Hauptideale erfüllt. Wir zeigen, daß jedes Ideal A von G ein direkter Summand von G ist.

Es sei B ein maximales unter denjenigen Idealen von G, die mit A nur das Element 0 gemeinsam haben. Wir behaupten, daß $G=A\oplus B$ gilt. Es genügt nachzuweisen, daß es zu jedem Element $g\in G$ endlich viele minimale Ideale $H_1, \dots, H_n$ von G gibt, so daß g in deren direkter Summe liegt, d.h.

$$g\in H_1\oplus\dots\oplus H_n \tag{9}$$

gilt. Nach Definition von B ist nämlich für jedes $i=1, \dots, n$

$$H_i\cap(A\oplus B)\neq 0,$$

folglich gilt

$$H_i\cap(A\oplus B)=H_i$$

und somit

$$g\in H_1+\dots+H_n\subseteqq A\oplus B.$$

Demnach folgt aus (9) tatsächlich $G=A\oplus B$.

Um einen Beweis für (9) zu erbringen, betrachten wir das Hauptideal (g), das gemäß β) mindestens ein minimales Ideal H_1 enthält. Dann gibt es ein $\lambda_1\in\Lambda$ mit $H_1\cap M_{\lambda_1}=0$, d.h. $H_1\oplus M=G$. Auf Grund dieser direkten Zerlegung sei $g=h_1+m_1$. Dann ist $(g)=(h_1)\oplus(m_1)$, da $h_1\in(g)$ wegen $H_1\subseteqq(g)$ und $m_1=$ $=g-h_1\in(g)$ gilt. Falls das Hauptideal (m_1) bereits ein minimales Ideal ist, gilt (9). Anderenfalls enthält (m_1) ein minimales Ideal H_2, und durch ein ähnliches Verfahren wie vorher, gewinnen wir $(g)=(h_1)\oplus(h_2)\oplus(m_2)$, wobei (h_1) und (h_2) minimale Ideale von G sind. Dieses Verfahren führt in endlich vielen Schritten zu einem minimalen Ideal (m_j), da

$$(g)\supset(m_1)\supset(m_2)\supset\dots$$

eine streng absteigende Kette von Hauptidealen in G ist.

$\gamma)\Rightarrow\delta)$: Es sei $S=\langle\dots, b_\lambda, \dots\rangle_{\lambda\in\Gamma}$ eine maximale unabhängige Untermenge von G. Wir setzen

$$H\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_{\lambda\in\Lambda}{}^{\oplus}(b_\lambda)$$

und zeigen, daß $H=G$ ist. Nehmen wir an, daß H entgegen der Behauptung ein echtes Ideal von G ist, so gilt nach γ) für ein geeignetes Ideal $K\neq(0)$ von G

$$G=H\oplus K.$$

Ist $0\neq g\in K$, so ist die Menge $S\cup g$ unabhängig, was der Maximalität von S widerspricht. Es gilt folglich $H=G$, d.h., S ist eine Basis von G.

$\delta)\Rightarrow\alpha)$: Man beweist zunächst mit ähnlicher Methode wie beim Beweise der Implikation e)$\Rightarrow$a) des Satzes 2, daß jedes Ideal von G die Eigenschaft δ) besitzt. Dann läßt sich zeigen, daß jedes Hauptideal $(\neq(0))$ von G ein minimales Ideal umfaßt. Es sei nämlich $g\neq 0$ ein beliebiges Element von G. Ist (g) bereits minimal, so sind wir fertig. Ist das Ideal (g) nicht minimal, so enthält es ein Ideal H_1 mit $(0)\subset H_1\subset(g)$. Es sei $0\neq g_1\in H_1$ und S_1 sei irgendeine das Element g_1 enthaltende maximale unabhängige Untermenge von (g). Die Menge S_1 besteht aus mindestens zwei Elementen, da S_1 eine Basis von (g) und H_1 ein echter Teil von (g) ist. Ist auch das Ideal (g_1) nicht minimal, so enthält es ein Ideal H_2 mit $(0)\subset H_2\subset(g_1)$. Es sei $0\neq g_2\in H_2$. Da g_2 und die von g_1 verschiedene Elemente von S_1 eine unabhängige Menge bilden, kann diese Menge zu einer mindestens drei Elemente enthaltenden maximalen unabhängigen Untermenge S_2 von (g) ergänzt werden. Indem wir nun dieses Verfahren im Hauptideal (g_2) fortsetzen, müssen wir in endlich vielen Schritten zu einem minimalen Ideal von (g) gelangen. Anderenfalls würde nämlich (g) eine unendliche maximale unabhängige Untermenge und folglich, auf Grund der Eigenschaft δ), eine unendliche Basis besitzen. Das ist aber unmöglich, da das Hauptideal (g) nicht die direkte Summe unendlich vieler Ideale sein kann.

Damit ist der Beweis des Satzes 3 erbracht.

Die Folgerung ergibt sich ohne weiteres aus Satz 2 und 3.

Satz 4. *Es seien für die vollständig reduzible Ω-Gruppe G zwei Darstellungen als direkte Summen einfacher Ω-Gruppen gegeben:*

$$G=\sum_{\nu\in\Gamma}^{\oplus} A_\nu$$

und

$$G=\sum_{\mu=\Delta}^{\oplus} B_\mu$$

Dann sind die Mengen Γ und Δ gleichmächtig.

Beweis. Wir nennen das Element $x\in G$ ein *ausgezeichnetes Element in G*, wenn das durch x erzeugte Ideal (x) ein minimales Ideal in G ist. Es sei S die Menge aller ausgezeichneten Elemente von G. Wir definieren eine Relation $D[x,H]$ für Elemente x und Untermengen H von S auf folgende Weise:

$$D[x,H]\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x\in(H).$$

Man sieht leicht ein, daß hierfür die Bedingungen (I), (III) und (IV) für die abstrakte Abhängigkeit (siehe [5]) erfüllt sind. Wir wollen jetzt auch (II) beweisen. Es sei $x\in S$, $H\subseteq S$, $h\in H$ und es sei

$$D[x,H];\ \bar{D}[x,(H\backslash h)]$$

erfüllt. [3]) Dann gibt es Elemente $a \in G$, $b \in G$ mit

$$x = a + b, \tag{10}$$

wobei $0 \neq b \in (h)$ und a ein Element des durch eine endliche Untermenge der Menge $H \backslash h$ erzeugten Ideals ist (vgl. [7], III. §2. 4). Aus (10) erhält man

$$(-a) + x = b \neq 0. \tag{11}$$

Da b ein ausgezeichnetes Element in G ist, stimmt das Hauptideal (b) notwendigerweise mit (h) überein. Dann gilt erst recht $h \in (b)$, woraus unter Berücksichtigung von (11) $D[h, (H \backslash h) \cup x]$ folgt. Es gilt also auch (II) in [5]. Folglich ist $D[x, H]$ eine D-Abhängigkeitsrelation (im Sinne von [5]) in S.

Jetzt wählen wir aus jedem Summanden A_ν ($\nu \in \Gamma$) und B_μ ($\mu \in \Delta$) ein wohlbestimmtes Element $a_\nu \neq 0$ und $b_\mu \neq 0$. Die Elemente a_ν und b_μ sind offenbar ausgezeichnete Elemente in G, und die Mengen $\langle ..., a_\nu, ... \rangle_{\nu \in \Gamma}$ und $\langle ... b_\mu, ... \rangle_{\mu \in \Delta}$ bilden zwei maximale D-unabhängige Untermengen der Menge S. Folglich sind Γ und Δ — vermöge des Satzes 1 in [5] — gleichmächtig.

Literatur

[1] R. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Ann.* **53** (1900), 371—403.
[2] T. J. Head, Purity in compactly generated modular lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 55—59.
[3] P. J. Higgins, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.* **6** (1956), 366—416.
[4] A. Kertész, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 235—257.
[5] A. Kertész, On independent sets of elements in algebra, *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 260—269.
[6] A. Kertész, Lattice theoretic remarks on completely reducible algebras, *Colloquium Math.* **14** (1966), 361—363.
[7] A. G. Kuroš, Vorlesungen über allgemeine Algebra, *Leipzig*, 1964.
[8] L. Rédei, Algebra I, *Leipzig*, 1959.
[9] G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie, *Budapest—Leipzig*, 1962.

(Eingegangen am 9. August 1965.)

[3]) Die Schreibweise $\bar{D}[x,(H \backslash h)]$ soll bedeuten, daß die Relation $D[x,(H \backslash h)]$ nicht besteht.