Ein kombinatorisches Problem über Auswahlfunktionen

Von EGBERT HARZHEIM (Köln)

1. Einleitung

Unter einer *Auswahlfunktion zu einer Menge M* versteht man nach ZERMELOS Vorgehen eine Funktion, die über der Menge $P(M)$ aller nichtleeren Teilmengen von M definiert ist und jeder solchen eines ihrer Elemente zuordnet.

$P(M)$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet, und man nennt eine totalgeordnete Teilmenge von $P(M)$ eine *Kette*. Ist nun allen Elementen einer Kette von $P(M)$ durch eine Auswahlfunktion A dasselbe Element zugeordnet, so wollen wir diese Kette eine *Konstanzkette (bezüglich A)* nennen. Es ergibt sich dann die Frage, was man über die Mächtigkeiten der Konstanzketten aussagen kann, allgemeiner, was man über ihre Ordnungstypen angeben kann. Diese Fragen sind für endliche und für unendliche Mengen methodisch völlig verschieden zu behandeln, und so wollen wir in dieser Arbeit den Fall endlicher Mengen vornehmen, bei dem die Frage nach den Ordnungstypen mit der nach den Mächtigkeiten gleichbedeutend ist, was für unendliche Mengen natürlich nicht mehr zutrifft. Der unendliche Fall wird in der Arbeit [2] in einem allgemeineren Zusammenhange behandelt.

Wir können unser Problem nun wie folgt präzisieren: Für jede natürliche Zahl n sei $l(n)$ die größte Zahl, so daß gilt: Ist M eine aus n Elementen bestehende Menge, so gibt es zu jeder Auswahlfunktion zu M eine Konstanzkette der Mächtigkeit (Länge) $l(n)$. Wie sieht dann die Funktion $l(n)$ aus?

Wir werden als wichtigstes zeigen, daß $l(n)$ für $n \to \infty$ ebenfalls gegen ∞ konvergiert. Als Abschätzung nach oben ergibt sich $l(n) \leqq \dfrac{\log n}{\log 2} + 1$.

Trivial ist lediglich, daß $l(n) \geqq 2$ ist für $n \geqq 2$; denn ist in M mit $|M| \geqq 2$ eine Auswahlfunktion A gegeben und etwa $A(M) = e$, so ist natürlich $A(\{e\}) = e$, also $\{\{e\}, M\}$ eine Konstanzkette der Länge 2.

Haupthilfsmittel für den Beweis der eben erwähnten Sätze ist der Satz 3.1 aus [1]. Mit ihm ergibt sich zunächst ein Spezialfall, und auf diesen nehmen wir eine gewisse Zurückführung des allgemeinen Falles vor.

2. Ein Spezialfall unserer Frage

Wir können uns bei der Betrachtung von Auswahlfunktionen zu endlichen Mengen der Einfachheit halber natürlich auf den Fall beschränken, wo diese Mengen Anfangsstücke der Menge der natürlichen Zahlen sind. Wir setzen dann fest:

Definition. Es sei $M=\{1, \ldots, n\}$. Dann heißt eine Auswahlfunktion A zu M *speziell*, wenn es eine Abbildung f von M in sich gibt, die $f(v) \leqq v$ erfüllt für $v=1, \ldots, n$, so daß gilt: Ist $v \in M$, so wird jeder v-elementigen Teilmenge von M ihr $f(v)$-tes Element vermöge A zugeordnet (-dabei ist natürlich in M und seinen Teilmengen die übliche Ordnung der natürlichen Zahlen zugrundegelegt). Es gilt dann.

Satz 2. 1. *Es sei n eine natürliche Zahl, $M=\{1, \ldots, 2^n\}$ und in M eine spezielle Auswahlfunktion A vorgegeben. Dann gilt: Es gibt eine Konstanzkette der Länge $n+1$ zu M, A.*

Beweis. Zu unserer speziellen Auswahlfunktion A gehört eine Funktion f, die bestimmt ist durch die Festsetzung: Für $v \in \{1, \ldots, 2^n\}$ ist $f(v)$ die Zahl, für die gilt; Jeder v-elementigen Teilmenge von M wird vermöge A das $f(v)$-te ihrer Elemente zugeordnet. Dies f ist eine Z-funktion im Sinne von [1], Def. 1.1, und es gibt folglich nach [1], Satz 3.1 eine Teilmenge T von M der Mächtigkeit $n+1$, so daß über T die Funktionen $f(v)$ und $v-f(v)$ monoton steigen.

Da der Fall $n=1$ trivial ist, sei $n>1$ angenommen. Es sei $T=\{t_1, \ldots, t_{n+1}\}$, wo die t_v der Größe nach aufgeführt sind. Dann definieren wir Mengen S_v, $v=$ $v=1, \ldots, n+1$, wie folgt: S_v sei die Menge aller natürlichen Zahlen von $f(t_{n+1})-$ $-f(t_v)+1$ bis $f(t_{n+1})-f(t_v)+t_v$, beide mitgezählt. Dann ist S_v ein Stück der Länge t_v von $\{1, \ldots, 2^n\}$, und es ist $f(t_{n+1})$ das $f(t_v)$-te Element von S_v, also $A(S_v)=f(t_{n+1})$. Dies gilt für alle $v=1, \ldots, n+1$. Und da die Zahlen $f(t_v)$ ebenso wie die Zahlen $(t_v-f(t_v))$ mit v wachsen, ist $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_{n+1}$. Hiermit haben wir also eine Konstanzkette der Länge $n+1$.

Die Aussage von Satz 2. 1 ist scharf. Denn es gilt:

Satz 2. 2. *Es gibt eine Auswahlfunktion in $M=\{1, 2, 3, \ldots, 2^n-1\}$, so daß keine Konstanzkette der Länge $n+1$ existiert.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion f, die gegeben ist durch $f(2^\lambda+v)=$ $=2^\lambda-v$ für $\lambda=0, 1, \ldots, n-1$ und $v=0, 1, \ldots, 2^\lambda-1$. Dadurch ist f genau in M definiert, und es ist f gleich der in [1], Satz 4.1 definierten Funktion F. Es sei nun A diejenige Auswahlfunktion, die jeder μ-elementigen Teilmenge von M ihr $f(\mu)$-tes Element zuordnet für $\mu=1, 2, \ldots, 2^n-1$. Weiter sei $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_l$ eine Konstanzkette der Länge l zu M, A; allen C_λ, $\lambda=1, \ldots, l$, ist dann das gleiche Element $z \in M$ zugeordnet. Bezeichnen wir die Mächtigkeit von C_λ, $\lambda=1, \ldots, l$, mit c_λ, so ist z das $f(c_\lambda)$-te Element von C_λ. Da die C_λ mit λ wachsen, muß $f(c_\lambda)$ ebenfalls mit λ wachsen. Es muß also eine l-elementige Teilmenge von M geben, über der f monoton steigend ist. Nach Satz 4.1 aus [1] ist dann $l \leqq n$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wenn man die in der Einleitung angegebene Funktion $l(n)$ heranzieht, so besagt Satz 2. 2 genau, daß $l(2^n-1) \leqq n$ ist. Daraus ergibt sich nun leicht die folgende Abschätzung nach oben:

Satz 2. 2'. *Es ist $l(x) \leqq \dfrac{\log x}{\log 2}+1$ für jede natürliche Zahl x.* Denn ist eine solche gegeben, so bestimme man n so, daß $2^{n-1} \leqq x \leqq 2^n-1$. Dann ist erstens $l(x) \leqq l(2^n-1) \leqq n$ und zweitens $(n-1) \cdot \log 2 \leqq \log x$, also $n \leqq \dfrac{\log x}{\log 2}+1$, was zusammen die Behauptung ergibt.

3. Der allgemeine Fall

Bei der Behandlung des allgemeinen Falles werden wir eine gewisse Zurückführung auf spezielle Auswahlfunktionen vornehmen. Dabei werden wir wesentlich den Satz von Ramsey (vgl [3]!) benutzen. Wir brauchen hier die folgende aus ihm sich ergebende Fassung:

Satz (von RAMSEY). *m und v seien natürliche Zahlen. Dann sei $t(v, m)$ die größte natürliche Zahl, für die gilt: Ist M eine Menge der Mächtigkeit m, $\binom{M}{v}$ die Menge aller v-elementigen Teilmengen von M, so gilt für jede Partition von $\binom{M}{v}$ auf v Klassen: Es gibt eine Teilmenge $T \subset M$ der Mächtigkeit $t(v, m)$, so daß $\binom{T}{v}$ Teilmenge von einer der v Klassen ist. Dann gilt: Für jedes feste v strebt die Funktion $t(v, m)$ gegen ∞, falls m gegen ∞ strebt.*

Für die Funktion $l(n)$ ergibt sich nun

Satz 3. 1. *$l(n)$ strebt gegen ∞, wenn n gegen ∞ strebt.*

BEWEIS. Wir müssen zeigen: Ist n eine natürliche Zahl, so gibt es eine natürliche Zahl m, so daß es zu jeder Auswahlfunktion in einer m-elementigen Menge eine Konstanzkette der Länge n gibt. Da $n=1$ trivial ist, sei $n>1$ angenommen. Man wähle nun m so groß, daß gilt

$$t(2^{n-1}-1, t(\ldots t(5, t(4, t(3, t(2, m)))))\ldots) \geqq 2^{n-1}. \tag{1}$$

Da n eine feste Zahl ist, ist ein solches m mittels $(2^{n-1}-2)$-facher Anwendung des Satzes von Ramsey ja konstruierbar. Es sei jetzt M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m und A eine beliebige Auswahlfunktion zu M.

Wir teilen $\binom{M}{2}$ in zwei Klassen auf: $\binom{M}{2} = K_1 \cup K_2$, wo K_1 (bzw. K_2) die Menge aller zweielementigen Teilmengen von M ist, denen vermöge A ihr erstes (bzw. zweites) Element zugeordnet ist. Nach Definition von $t(2, m)$ gibt es dann eine Teilmenge $T_2 \subset M$ mit $|T_2| = t(2, m)$, so daß vermöge A allen zweielementigen Teilmengen von T_2 ihr kleinstes bzw. allen ihr größtes Element zugeordnet wird.

Entschprechend wird dann $\binom{T_2}{3}$ in drei Klassen K_1', K_2', K_3' zerlegt, wo K_i' $(i=1, 2, 3)$ die Menge aller 3-elementigen Teilmengen von T_2 ist, denen vermöge A ihr i-tes Element zugeordnet wird. Es gibt dann analog eine Teilmenge $T_3 \subset T_2$ mit $|T_3| = t(3, |T_2|) = t(3, t(2, m))$, so daß allen 3-elementigen Teilmengen von T_3 ihr i-tes Element zugeordnet wird, wo i eine feste Zahl aus $\{1, 2, 3\}$ ist. Nach $(2^{n-1}-2)$ vielen Schritten ist man so bei einer Menge $T[2^{n-1}-1]$ angelangt ($-T[i]$ sei dasselbe wie T_i —), die die Mächtigkeit der linken Seite von (1) hat. Sie besitzt also eine Teilmenge $T[2^{n-1}] = T$, die genau 2^{n-1} viele Elemente enthält. Setzt man noch $M = T_1$, so hat man mithin

$$M = T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots \supset T[2^{n-1}-1] \supset T.$$

Und nach Konstruktion gibt es jetzt eine Funktion f über $D=\{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, für die gilt: Ist $v \in D$, so wird jeder v-elementigen Teilmenge von T, da ja $T \subset T_v$ ist, ihr $f(v)$-tes Element zugeordnet. Die Einschränkung von A auf die Potenzmenge von T ist also eine spezielle Auswahlfunktion, und nach Satz 2.1 existiert eine Konstanzkette der Mächtigkeit n, womit unser Satz bewiesen ist.

Literatur

[1] E. Harzheim, Eine kombinatorische Frage zahlentheoretischer Art. *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 45—51.

[2] E. Harzheim, Kombinatorische Betrachtungen über die struktur der Potenzmenge. *Math. Nachr.* **34** (1967), 123—141.

[3] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic. *Collected papers,* 82—111.

(Eingegangen am 5. Januar 1966.)