Les solutions convexes de l' équation fonctionelle $g[\alpha(x)]-g(x)=\varphi(x)$

Par M. ROZMUS-CHMURA (Katowice)

C'est l'existence et l'unicité des solutions convexes dans un intervalle $(a, b]$ de l'équation fonctionelle

$$g[\alpha(x)]-g(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction chérchée, qui font l'object de cette note.

Le problème de l'unicité des solutions convexes de l'équation (1) dans le cas où l'intervalle (a, b) est infini, a été déja examiné par Kuczma [3].

Cette étude-ci comprend aussi bien le cas où l'intervalle (a, b) est infini que le cas où il est fini.

L'équation (1) est une géneralisation de l'équation d'Abel

$$g[\alpha(x)]-g(x)=l$$

dont les solutions convexes ont été présentées dans l'étude [5].

Supposons que la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux conditions suivantes:

(H_1) $\alpha(x)$ est croissante et concave dans l'intervalle $(a, b]$ $-\infty \leqq a<b<\infty$, $a<\alpha(x)<x$ dans $(a, b]$ et que: $\lim\limits_{x\to a_+}\alpha'(x)=1$

et supposnos que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions:

(H_2) $\varphi(x)$ est croissante et concave dans l'intervalle $(a, b]$ et $\lim\limits_{x\to a_+}\varphi(x)=l$ où $|l|<\infty$.

La définition et des propriétés des fonctions convexes et concaves ont été présentées par Bourbaki [1]. En particulier les fonctions concaves et convexes, sont presque partout différenciables.

Les itérées naturelles de la fonction $\alpha(x)$ sont définies par les relations: $\alpha^1(x)=\alpha(x)$, $\alpha^{n+1}(x)=\alpha[\alpha^n(x)]$.

Pour la fonction $\alpha(x)$ qui satisfait aux conditions (H_1) toutes les itérées $\alpha^n(x)$ sont définies, strictement croissantes et concaves dans l'intervalle $(a, b]$. De plus, temps $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n(x)=a$ pour chaque $x\in(a, b]$.

Pour un $x\in(\alpha(b), b)$ fixé nous posons: $x_n=\alpha^n(x)$, $b_n=\alpha^n(b)$, ainsi que $\delta_n(x)=b_n-x_n$, $\Delta_n=b_{n-1}-b_n$.

Théorème. *Si* $\alpha(x)$ *satisfait aux conditions* (H_1) *et si* $\varphi(x)$ *satisfait aux conditions* (H_2), *alors:*

$$g(x)=g(b)+\sum_{k,0}^{\infty}[\varphi(b_k)-\varphi(x_k)]+l\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{b_k-x_k}{b_k-b_{k+1}} \tag{2}$$

est la solution convexe unique (à constante additive $g(b)$ *près) de l'èquation* (1).

DÉMONSTRATION. Considerons les équations:

$$g_1[\alpha(x)] - g_1(x) = \varphi_1(x) \tag{3}$$

où $\varphi_1(x) = \varphi(x) - l$

$$g_2[\alpha(x)] - g_2(x) = l. \tag{4}$$

Il résulte des hypothèses (H_2) que $\lim\limits_{x\to a_+} \varphi_1(x) = \lim\limits_{x\to a_+} [\varphi(x) - l] = 0$. Par conséquent, à base des résultats des études de Kuczma [4] l'équation (3) possède la solution suivante:

$$g_1(x) = g_1(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi_1(b_k) - \varphi_1(x_k)] = g_1(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]$$

(C'est d'ailleurs la seule solution monotone de cette équation.) La fonction $g_1(x)$ est convexe, car pour chaque k $\varphi(x_k)$ est concave étant une superposition des fonctions concaves et croissantes.

Il résulte du travail de Kuczma [5] que, au cas où $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (H_1), alors la fonction

$$g_2(x) = g_2(b) + l \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est la solution convexe unique de l'équation (4).

Il résulte de la forme des équations (3) et (4) que la fonction

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = g(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] + l \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est une solution convexe de l'équation (1).

Pour prouver l'unicité nous allons nous servir de la fonction $\bar{g}(x) = \dfrac{g(x+c) - g(c)}{x}$ où c est une constante. Comme $\alpha(x)$ est convexe, la fonction $\bar{g}(x)$ est croissante. Supposons que $x \in (b_1, b)$. Il est facile à prouver que $\delta_n(x) < \Delta_{n+1}$. Par conséquent, quand on admet que $c = b_n$, nous avons:

$$\bar{g}(-\Delta_{n+1}) = \frac{g(b_{n+1}) - g(b_n)}{-b_n + b_{n+1}} \leqq \frac{g(x_n) - g(b_n)}{-b_n + x_n} = \bar{g}(-\delta_n(x))$$

c'est à dire

$$\frac{\varphi(b_n)}{\Delta_{n+1}} \geqq \frac{g(x_n) - g(b_n)}{\delta_n(x)}. \tag{5}$$

De même

$$\bar{g}(-\delta_n(x)) = \frac{g(x_n) - g(b_n)}{-b_n + x_n} \leqq \frac{g(b_{n-1}) - g(b_n)}{b_{n-1} - b_n} = \bar{g}(\Delta_n)$$

c'est à dire

$$\frac{g(x_n) - g(b_n)}{\delta_n(x)} \geqq \frac{\varphi(b_{n-1})}{\Delta_n}. \tag{6}$$

Vu conditions (5) et (6) nous avons

$$\frac{\delta_n(x)}{\Delta_n}\varphi(b_{n-1}) \leqq g(x_n)-g(b_n) \leqq \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}}\varphi(b_n). \tag{7}$$

Mais

$$g(x_n)-g(b_n) = g(x_n)-g(x)+g(x)-g(b_n)+g(b)-g(b) =$$

$$= \sum_{k,0}^{n-1}[g(x_{k+1})-g(x_k)]+g(x)-\sum_{k,0}^{n-1}[g(b_{k+1})-g(b_k)]-g(b) =$$

$$= g(x)-g(b)-\sum_{k,0}^{n-1}[\varphi(b_k)-\varphi(x_k)].$$

Par conséquent, il résulte de (7)

$$\frac{\delta_n(x)}{\Delta_n}\varphi(b_{n-1})-\frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}}\varphi(b_n) \leqq \tag{8}$$

$$\leqq g(x)-\left\{g(b)+\frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}}\varphi(b)+\sum_{k,0}^{n-1}[\varphi(b_k)-\varphi(x_k)]\right\} \leqq 0.$$

En désigant

$$g_n(x) = g(b)+\frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}}+\sum_{k,0}^{n-1}[\varphi(b_k)-\varphi(x_k)] \tag{9}$$

nous avons

$$\frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}}\left[\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\varphi(b_{n-1})-\varphi(b_n)\right] \leqq g(x)-g_n(x) \leqq 0. \tag{10}$$

KUCZMA et SMAJDOR [6] ont prouvé que, au cas où la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (H_1),alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}(x)-\alpha^n(x)}{\alpha^{n-1}(y)-\alpha^n(y)} = 1 \tag{11}$$

pour n'importe quels x, $y\in(a, b]$.

En admettant $x=b_1$, $y=b$ dant (11) nous avons:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n+1}}{b_{n-1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = 1$$

De plus, par hypothése $\lim\limits_{x\to a_+}\varphi(x)=l$ où $|l|<\infty$ c'est à dire: $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(b_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(b_n)=l$.

A cause de l'inégalité $0<\delta_n(x)<\Delta_{n+1}$ la séquence $\left\{\frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}}\right\}$ est limitée. De là et de l'inégalité (10) nous avons:

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{pour} \quad x\in(b_1, b).$$

Il résulte immédiatement de la form de la séquence (9) que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(b) = g(b)$$

C'est à dire pour chaque $x \in (b_1, b]$ la fonction $g(x)$ est la limite de la séquence $g_n(x)$. KORDYLEWSKI et KUCZMA [2] ont prouvé qu'une fonction qui remplit l'équation (1) est déterminée par ses valeurs dans l'intervalle $(b_1, b]$. On a prouvé ainsi l'unicité des solutions dans l'intervalle $(a, b]$.

Bibliographie

[1] N. BOURBAKI, Les structures fondamentables de l'analyse Livre IV. Fonctions d'une variabe[1] réelle, *Paris* 1951.

[2] J. KORDYLEWSKI—M. KUCZMA, On some linear functional equation *Ann. Polon. Math.* **9** (1960), 119—136.

[3] M. KUCZMA, On convex solution of the functional equation $g[\alpha(x)]-g(x) = \varphi(x)$ *Publ. Math. (Debrecen)* **6** (1959), 40—47.

[4] M. KUCZMA, Sur une èquation fonctionnelle, *Mathematica Cluj*, **3** **26** (1961), 79—87.

[5] M. KUCZMA, On convex solutions of Abel's functional equation, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. **13** (1965), 645—648.

[6] M. KUCZMA—A. SMAJDOR, Note on iteration of concave functions *Amer. Math. Monthly (to appear)*.

(Reçu le 8. december 1966.)