Beitrag zur Theorie der Charakterisierung von Determinantenfunktion

Von GY. TEVAN und E. VINCZE (Miskolc)

§ 1. Einleitung

Mit der Bestimmung skalarer multiplikativer Funktion von Matrizen haben viele Verfasser sich beschäftigt; wie es bekannt ist, bedeutet dieses Problem die Auflösung der Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathbf{AB}) = \varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{B}).$$

Hierbei bezeichnen **A** und **B** Matrizen vom Typ $n \times n$ und $\varphi(\mathbf{A})$ eine skalare Funktion ist. Gleichzeitig spielt diese Gleichung eine wichtige Rolle auch in der Theorie der Charakterisierung von Determinantenfunktion (vgl. [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [15]). Aus diesen erwähnen wir zuerst die Arbeit [15] von K. STÉPHANOS, der die oben genannte Funktionalgleichung unter den Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelöst hatte. Später haben mehrere Verfasser, nach der chronologischen Reihe O. PERRON [12], P. REISCH [14], S. GOŁĄB [7], [8], M. KUCHARZEWSKI [10] und M. KUCZMA [11] dieses Ergebnis wesentlich vereinfacht bzw. verallgemeinert.

In dieser kurzen Note wollen wir die skalare multiplikative Funktion der Matrizen unter allgemeineren Bedingungen bestimmen und dieses Resultat zur Charakterisierung der Determinantenfunktion anwenden.

§ 2. Skalare multiplikative Funktion von Matrizen

Es sei $\mathcal{K}$ ein beliebiger, algebraisch abgeschlossener Körper (der Charakteristik 0), in dem also jede algebraische Gleichung

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

$$(a_\nu \in \mathcal{K};\ \nu = 0, 1, \dots, m;\ m \geqq 1, \text{ ganze Zahl})$$

(mindestens) eine Lösung hat. Hierbei bedeutet 0 das Nullelement von $\mathcal{K}$, bzw. bald ist 1 das Einselement von $\mathcal{K}$. Es sei weiter $\mathbf{R}^n$ der Ring der Matrizen **A**, **B**, **C**, ... vom Typ $n \times n$ über $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [a_{ij} \in \mathcal{K};\ i, j = 1, 2, \dots, n].$$

Endlich bezeichne $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix. Wir beweisen den folgenden

Satz. *Die einzige nichttriviale* ($\varphi \not\equiv 0$) *Lösung des auf dem Matrizenring* $\mathbf{R}^n$ *definierten Funktionalgleichungssystems*

$$\varphi(\mathbf{AB}) = \varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{B}), \tag{I}$$

$$\varphi(a\mathbf{E}) = a^n \varphi(\mathbf{E}) \tag{II}$$

$$\left(\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^n;\ a \in \mathscr{K};\ \varphi(\mathbf{A}): \mathbf{R}^n \to \mathscr{K}\right)$$

ist die Funktion

$$\varphi(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.$$

Beweis. Wegen (I) und $\varphi(\mathbf{A}) \not\equiv 0$ ergibt sich

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{AE}) = \varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{E}),$$

$$\varphi(\mathbf{E}) = 1. \tag{2}$$

Wenn $\mathbf{T}$ keine singuläre Matrix ist, gilt $\mathbf{TT}^{-1} = \mathbf{E}$, und so haben wir nach (2) und (I)

$$1 = \varphi(\mathbf{E}) = \varphi(\mathbf{TT}^{-1}) = \varphi(\mathbf{T})\varphi(\mathbf{T}^{-1}), \tag{3}$$

$$\varphi(\mathbf{T}^{-1}) = \varphi(\mathbf{T})^{-1},$$

wobei $\varphi(\mathbf{T})^{-1}$ das (multiplikative) Inverselement von $\varphi(\mathbf{T})$ in $\mathscr{K}$ bezeichnet.

Es ist bekannt, daß jede Matrix $\mathbf{A}$ von $\mathbf{R}^n$ in der Jordanschen Form [1]) $\mathbf{A} = \mathbf{TJT}^{-1}$ dargestellt werden kann und so ergibt sich

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{TJT}^{-1}) = \varphi(\mathbf{T})\varphi(\mathbf{J})\varphi(\mathbf{T}^{-1}) = \varphi(\mathbf{J})\varphi(\mathbf{T})\varphi(\mathbf{T})^{-1} = \varphi(\mathbf{J}). \tag{4}$$

Im folgenden unterscheiden wir drei Unterfälle:

(*a*) $\mathbf{J}$ *ist eine* (reguläre oder singuläre) *diagonale Matrix*;
(*b*) $\mathbf{J}$ *ist eine reguläre Matrix*;
(c) $\mathbf{J}$ *ist eine singuläre Matrix*.

a) Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall, als es außer der Hauptdiagonale überall erst Nullen stehen:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix};$$

---

[1]) Einerseits betonen wir, daß man den Bergiff der Determinante weder bei der Jordanschen Transformation noch bei der Rechnung der Inverse $\mathbf{T}^{-1}$ (vgl. [17]) nicht kennen soll. Anderseits müssen wir auch bei der Jordanschen Transformation das algebraisch abgeschlossene Wesen des Körpers $\mathscr{K}$ ausnützen (vgl. [17]). Der Grundgedanke der Jordanschen Transformation befindet sich schon auch bei M. Hosszú [9].

hier und im weiteren, an den leeren Stellen der Matrizen stehen immer Nullelemente. Da

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

ist, haben wir nach (I) die Gleichung

$$\varphi(\mathbf{D}) = \varphi\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\right)\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}\right)\cdots\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\right). \tag{6}$$

Weiterhin ist es bekannt, daß die Gleichung

$$\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix} = \mathbf{T}_k\begin{bmatrix}\lambda_k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\mathbf{T}_k^{-1}$$

mit einer geeignet gewählten Matrix $\mathbf{T}_k$ immer besteht. So ergibt sich wegen (I) und (3)

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}\right) = \varphi(\mathbf{T}_k)\,\varphi\left(\begin{bmatrix}\lambda_k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\right)\varphi(\mathbf{T}_k^{-1}) = \varphi\left(\begin{bmatrix}\lambda_k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda_k) \tag{7}$$

$$[\lambda_k \in \mathscr{K};\ k = 1, 2, \ldots, n;\ f(\lambda_k)\colon\ \mathscr{K} \to \mathscr{K}].$$

Auf Grund der vorigen erhalten wir statt (6)

$$\varphi(\mathbf{D}) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n)$$

und wieder nach (I) ergibt sich

$$\varphi(\mathbf{D}) = \prod_{k=1}^{n} f(\lambda_k) = \prod_{k=1}^{n} \varphi\left(\begin{bmatrix}\lambda_k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix}\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\right) = f\left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right), \tag{8}$$

d.h. $f(\lambda)$ ist eine *multiplikative* Funktion.

b) Es sei jetzt $\mathbf{J}$ eine reguläre Jordansche Matrix, dann ist

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & & & & \lambda_m & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & \ddots \quad 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_m\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1^{-1} & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \lambda_1^{-1} & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 1 & \lambda_2^{-1} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \lambda_m^{-1} \\ & & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

(die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sind nicht unbedingt verschieden), d.h. die Faktorisation $\mathbf{J}=\mathbf{D_J}\mathbf{K}$ gilt. Hierbei ist $\mathbf{D_J}$ eine diagonale Matrix, die eine mit der Jordanschen Matrix übereinstimmende Hauptdiagonale hat, bzw. in der Hauptdiagonale von $\mathbf{K}$ stehen Einsen und über ihnen sind λ_k^{-1} $(k=1, 2, \ldots, m)$ statt der Einsen der Jordanschen Matrix; an den Nullstellen der Jordanschen Matrix stehen wiederum Nullen. Nach (I) ist also

$$\varphi(\mathbf{J})=\varphi(\mathbf{D_J})\varphi(\mathbf{K}). \tag{9}$$

Natürlich sind stets Einsen auch in der Hauptdiagonale von $\mathbf{K}^2$. Die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente der Matrizen $\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E}$ und $\mathbf{K}^2-\lambda\mathbf{E}$ sind Nullen nur im Falle, wenn $\lambda=1$ ist, d.h. wir haben nur die Eigenvektoren des Eigenwertes 1. Weiterhin gilt es mit beliebigem positivem ganzem p

$$(\mathbf{K}^2-\mathbf{E})^p = (\mathbf{K}+\mathbf{E})^p(\mathbf{K}-\mathbf{E})^p$$

und deswegen annullieren die Matrizen $(\mathbf{K}^2-\mathbf{E})^p$ und $(\mathbf{K}-\mathbf{E})^p$ gleichzeitig dieselben Vektoren. So haben $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}^2$ gleiche Anzahl von Hauptvektoren der gleichen Ordnung, demnach und da noch auch ihre Eigenwerte zusammenfallen, übereinstimmen auch ihre Jordanschen Matrizen notwendigerweise. Deshalb gilt noch auch

$$\varphi(\mathbf{K})=\varphi(\mathbf{K}^2). \tag{10}$$

Da $\mathbf{K}$ regulär ist, existiert auch $\mathbf{K}^{-1}$ und es folgt aus (I) und (10) die Gleichung

$$\varphi(\mathbf{K}) = \varphi(\mathbf{K}^2\mathbf{K}^{-1}) = \varphi(\mathbf{K}^2)\varphi(\mathbf{K}^{-1}) = \varphi(\mathbf{K})\varphi(\mathbf{K}^{-1}) = \varphi(\mathbf{E}) = 1.$$

Damit erhalten wir aus (9) die Relation

$$\varphi(\mathbf{J}) = \varphi(\mathbf{D_J}). \tag{11}$$

c) Schließlich betrachten wir den Fall, als **J** (und damit auch **A**) eine singuläre Matrix ist. Bezeichne $\mathbf{J}_s$ die Jordansche Matrix von $\mathbf{A}^s$. Dann gibt es eine Zahl s mit folgender Eigenschaft: in der Matrix $\mathbf{J}_s$, auch neben den in der Hauptdiagonale stehenden Elementen des Wertes 0 sind erst Nullen. Da aber

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ist, erhält man auf Grund von (I), (8) und (11)

$$\varphi(\mathbf{J}_s) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_m \end{bmatrix}\right) \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}\right) = f(\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m) f(0) = f(0).$$

Damit gilt auch $\varphi(\mathbf{A}^s) = f(0)$, und wiederum wegen (I) ergibt sich $f(0) = \varphi(\mathbf{A}^s) = \varphi(\mathbf{A})^s$, d.h. wegen der Multiplikativität ist $\varphi(\mathbf{A}) = f(0)$. Auch in diesem Falle haben wir also das Ergebnis

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}^s) = \varphi(\mathbf{J}_s) = f(0) = \varphi(\mathbf{D}_J).$$

Die Fälle (a), (b), (c) können wir folgendermaßen zusammenfassen: jedesmal ergibt sich die Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{J}) = \varphi(\mathbf{D}_J) = f(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n) \tag{12}$$

schon auch aus der Formel (I), wobei es wegen (7) und (2) für $f(\lambda)$ auch

$$f(1) = \varphi(\mathbf{E}) = 1$$

gilt. So ist $f(\lambda)$ eine nichttriviale multiplikative Funktion in dem Körper $\mathcal{K}$.

Nützen wir jetzt auch die Gleichung (II) aus, dann erhalten wir auf Grund von (8) und (II) mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = a$ das Ergebnis

$$f(a^n) = \varphi(a\mathbf{E}) = a^n \varphi(\mathbf{E}) = a^n. \tag{13}$$

Da aber der Körper $\mathcal{K}$ algebraisch *abgeschlossen* ist, nimmt a^n, inzwischen a den ganzen Körper $\mathcal{K}$ durchläuft [2]), jeden Wert von $\mathcal{K}$ an, so daß wir aus (13) die

[2]) Beim Beweis brauchen wir unmittelbar erst an dieser Stelle das algebraisch abgeschlossene Wesen des Körpers $\mathcal{K}$ (vgl. auch die Fußnote 1)).

Lösung $f(\lambda)=\lambda$ erhalten, wobei λ tatsächlich ein beliebiges Element von $\mathscr{K}$ ist. Damit haben wir für $\varphi(\mathbf{A})$ die Formel

$$\varphi(\mathbf{A})=\varphi(\mathbf{J})=\varphi(\mathbf{D_J})=f(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=\det\mathbf{D_J}=\det\mathbf{J}=\det\mathbf{A},$$

was eben zu beweisen war.

§ 3. Bemerkungen und Folgerungen

1. Aus der Funktionalgleichung (8) ist es offenbar, daß man ohne die Anwendung von (II) für beliebige Matrix $\mathbf{A}$ nur das Ergebnis

$$\varphi(\mathbf{A})=\varphi(\mathbf{J})=\varphi(\mathbf{D})=f(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)=f(\det\mathbf{A})\not\equiv 0$$

erhalten kann, wobei $f(\lambda)$ $(f\colon\mathscr{K}\to\mathscr{K})$ eine beliebige multiplikative Funktion ist. So haben wir (ohne irgendwelche Regularitätsannahme!) einen neueren Beweis des bekannten Satzes von M. Kucharzewski ([10]) gefunden (vgl. auch Bemerkung 4).

2. G. Gáspár ([3], [4]) hat das folgende Axiomensystem für die Charakterisierung der Determinantenfunktion $\varphi(\mathbf{A})=\det\mathbf{A}$ angegeben:

(I) $$\varphi(\mathbf{AB})=\varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{B}),$$

(II') $$\varphi(a\mathbf{A})=a^n\varphi(\mathbf{A}),$$

(III) $$\varphi(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\Sigma\varphi(\mathbf{C}),$$

wobei in (III) über alle Zeilen- oder Spaltenkombinationen $\mathbf{C}$ von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zu summieren ist. Die im Axiomensystem stehenden Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sind Elemente des vollen Matrizenringes vom Typ $n\times n$ über einem beliebigen (kommutativen) Körper $\mathfrak{K}$ und $a\in\mathfrak{K}$ ist. Später verallgemeinert G. Gáspár [6] dieses Ergebnis so, daß er statt des Körpers $\mathfrak{K}$ einen beliebigen *unendlichen* Integritätsbereich nimmt; in derselben Arbeit zeigt er im *reellen* Falle auch einen Gegenbeispiel zum Zwecke, daß die Axiome (I)—(II')—(III) voneinander *unabhängig* sind (vgl [5]). Aus unserem Ergebnis ist es sofort ersichtlich, daß *die erwähnten Axiome nur im Falle voneinander unabhängig sein können, wenn der Körper* $\mathfrak{K}$ *algebraisch nicht abgeschlossen ist* (z.B. beim Körper der reellen Zahlen ist der Fall). Wenn aber $\mathfrak{K}$ z.B. den Körper der komplexen Zahlen bedeutet, wo die Determinantentheorie vielleicht die wichtigste ist, dann kann man das Axiom (III) schon weglassen, sogar ist es auch genug, die einfachere Formel (II) statt (II') zu nehmen. Es ist erwartlich, daß ein ähnlicher Fall auch dann entsteht, wenn wir statt des Körpers $\mathfrak{K}$ einen unendlichen Integritätsbereich nehmen; dies ist aber noch zu beweisen.

3. Man kann den früher bewiesenen Satz auch folgendermaßen formulieren: *Der einzige nichttriviale Homomorphismus des Matrizenringes* $\mathbf{R}^n$ *(über dem algebraisch abgeschlossenen Körper* $\mathscr{K}$*) mit* $\mathscr{K}$*, der auch die Eigenschaft* (II) *hat, ist* $\varphi(\mathbf{A})=\det\mathbf{A}$ $(\varphi\colon\mathbf{R}^n\to\mathscr{K})$.

4. Im ersten Teil des Beweises, wie das schon erwähnt ist (vgl. Fußnote 1), brauchen wir das algebraisch abgeschlossene Wesen des Körpers $\mathscr{K}$ erst bei der expliziten Darstellung der Jordanschen Form von Matrizen, und zwar bei der

Bestimmung der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Man kann aber auch diese Beschränkung weglassen, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ als ein Produkt von Matrizen der bekannten Eigenwerte dargestellt wird. In diesem Falle ist der Gedankengang des Beweises folgendes:

Es ist bekannt, wenn man den Gaussschen Algorithmus auf ein mit der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmtes Gleichungssystem anwendet, entsteht eine geeignete Faktorzerlegung der Gestalt

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{i_1 j_1}\mathbf{E}_{i_2 j_2}\ldots\mathbf{E}_{i_k j_k}\mathbf{C}\mathbf{B}, \tag{14}$$

wobei $\mathbf{E}_{i_\nu j_\nu}$ je eine, aus der Einheitsmatrix mit dem Vertauschen der i_ν- und j_ν-ten Reihen entstehende Matrix bezeichnet, $\mathbf{C}$ eine sogenannte untere trianguläre Matrix stets mit Einsen in ihrer Hauptdiagonale ist und $\mathbf{B}$ eine obere trianguläre Matrix bedeutet. Bei der Multiplikation $\mathbf{E}_{i_\nu j_\nu}\mathbf{A}$ vertauschen sich die entsprechenden Reihen von $\mathbf{A}$. Da

$$\mathbf{E}^2_{i_\nu j_\nu} - \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{i_\nu j_\nu} \pm \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

gültig sind, hat das Minimalpolinom der Matrizen $\mathbf{E}_{i_\nu j_\nu}$ die Form $\lambda_s^2 - 1 = 0$, d.h. jeder Hauptvektor ist gleichzeitig ein Eigenvektor mit den Eigenverten $\lambda_{s1} = 1$ oder $\lambda_{s2} = -1$. Weiterhin, wie das durch die Lösung der homogenen Gleichung mit der Matrix $\mathbf{E}_{i_\nu j_\nu} + \mathbf{E}$ zu beweisen ist, gehört nur ein einziger Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{s2} = -1$. So ist

$$\varphi(\mathbf{E}_{i_\nu j_\nu}) = f[1.\ 1\ldots 1.(-1)] = f(-1).$$

Die Eigenwerte der triangulären Matrizen sind die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente, denn die zur Matrix $\mathbf{B} - \lambda_{\mathbf{B}}\mathbf{E}$ gehörende homogene Gleichung nur im Falle eine von der trivialen verschiedene Lösung besitzt, als $\lambda_{\mathbf{B}} = B_{ii}$ ist. Weiter sind die Elemente der Hauptdiagonale der Jordanschen Matrix von $\mathbf{B}$ dasselbe, wie in der Hauptdiagonale von $\mathbf{B}$, denn die Nullen in den Hauptdiagonalen jeder triangulären Matrizen

$$\mathbf{B} - B_{ii}\mathbf{E}, \quad (\mathbf{B} - B_{ii}\mathbf{E})^2, \quad (\mathbf{B} - B_{ii}\mathbf{E})^3, \ldots$$

dort und nur dort stehen, wo auch in der Hauptdiagonale der Matrix $\mathbf{B}$ dieselben Elemente B_{ii} sind. Da die Anzahl der sämtlichen Hauptvektoren mit der Anzahl der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente übereinstimmt, so sind die Anzahl der zum Eigenwert B_{ii} gehörenden Hauptvektoren genau die Anzahl der übereinstimmenden B_{ii}. Demnach ist also

$$\varphi(\mathbf{B}) = f(\lambda_{1B}\lambda_{2B}\ldots\lambda_{nB}) = f(B_{11}B_{22}\ldots B_{nn})$$

und wegen (I), (14), (12) gilt auch

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{E}_{i_1 j_1})\varphi(\mathbf{E}_{i_2 j_2})\ldots\varphi(\mathbf{E}_{i_k j_k})\varphi(\mathbf{C})\varphi(\mathbf{B}) =$$
$$= f(-1)^k f(1.\ 1\ldots 1) f(B_{11}B_{22}\ldots B_{nn}) = f[(-1)^k B_{11}B_{22}\ldots B_{nn}].$$

Schließlich erhalten wir wiederum auf Grunde von (12) die Gleichung

$$f(B_{11}B_{22}\ldots B_{nn}) = f(B_{11})f(B_{22})\ldots f(B_{nn}),$$

woraus das multiplikative Wesen von $f(\lambda)$ offenbar ist.

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart—Berlin*, 1961; oder: Lectures on Functional Equations and Their Applications, *New York—London*, 1966.

[2] J. Aczél, Some unsolved problems in the theory of functional equations, *Arch. Math.*, **16** (1964), 435—444.

[3] G. Gáspár, Eine neue Definition der Determinanten, *Publ. Math. (Debrecen)*, **3** (1953—54), 257—260.

[4] G. Gáspár, A determinánselmélet axiomatikus megalapozása, *Nehézipari Műszaki Egyetem-Közl. (Miskolc)*, **1** (1957), 281—286.

[5] G. Gáspár, A determináns jellemzésére szolgáló egyik axiomarendszerre vonatkozó függetlenségi vizsgálatok, *Nehézipari Műszaki Egyetem Magyarnyelvű Közl. (Miskolc)*, **8**. (1962), 127—133.

[6] G. Gáspár, Die Charakterisierung der Determinanten über einem unendlichen Integritätsbereich mittels Funktionalgleichungen, *Publ. Math. (Debrecen)*, **10** (1963), 244—255,

[7] S. Gołąb, Sur l'équation fonctionnelle $f(X).\ f(Y)=f(X.Y)$, *Colloq. Math.*, **4** (1957), 265.

[8] S. Gołąb, Sur l'équation $f(X).f(Y)=f(X.Y)$, *Ann. Polon. Math.*, **6** (1959), 1—13.

[9] M. Hosszú, Megjegyzések mátrixok skalár értékű multiplikatív függvényéről, *Nehézipari Műszaki Egyetem Magyarnyelvű Közl. (Miskolc)*, **5** (1960), 173—177.

[10] M. Kucharzewski, Über die Funktionalgleichung $f(a_k^i)\cdot f(b_k^i)=f(b_\alpha^i a_k^\alpha)$, *Publ. Math. (Debrecen)*, **6** (1959), 181—198.

[11] M. Kuczma, Bemerkung zur vorhergehenden Arbeit von M. Kucharzewski, *Publ. Math. (Debrecen)*, **6** (1959), 199—203.

[12] O. Perron, Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung, *Math. Z.*, **18** (1942), 136—172.

[13] L. Rédei, Algebra I., *Leipzig*, 1959.

[14] P. Reisch, Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\Phi(X)\cdot\Phi(Y)=\Phi(X\cdot Y)$, *Math. Z.*, **49** (1943—44), 411—426.

[15] K. Stéphanos, Sur une propriété caracteristique des déterminants, *Ann. Mat. Pura Appl. (3)*, (1913), 233—236.

[16] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, *Москва*, 1957.

[17] Д. К. Фаддеев—В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, *Москва*, 1963.

(Eingegangen am 24. Februar, 1967.)