Bemerkung zur Arbeit von V. S. Fedulov „Über die Summierbarkeit der doppelten Orthogonalreihen."

Von L. CSERNYÁK (Miskolc)

Man nennt doppelte Orthogonalreihe die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\varphi_{k,l}(x, y), \tag{1}$$

wobei $\{a_{k,l}\}$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen und $\varphi_{k,l}(x, y)$ $(k, l=1, 2, \ldots)$ auf $R=[a, b, c, d]$ definierte Funktionen sind, für die

$$\iint\limits_R \varphi_{i,j}(x, y)\varphi_{k,l}(x, y)\,dx\,dy = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k=i \text{ und } l=j, \\ 0, & \text{wenn } k\neq i \text{ oder } l\neq j \end{cases}$$

gültig ist. Man bezeichne mit $S_{m,n}(x, y)$ die m, n-te Teilfolge von (1), d.h.

$$S_{m,n}(x, y) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\varphi_{k,l}(x, y).$$

Man nennt die Reihe (1) $(C, 1, 1)$-summierbar zu $S(x, y)$, wenn

$$\lim_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n}(x, y) = S(x, y)$$

auf R fast überall gilt, wobei

$$\sigma_{m,n}(x, y) = \frac{1}{m\cdot n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} S_{k,l}(x, y)$$

ist.

V. S. FEDULOV [1]) hat den folgenden Satz mitgeteilt.

Satz A. *Erfüllen die Koeffizienten der doppelten Orthogonalreihe* (1) *die Bedingung,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 < \infty, \tag{2}$$

dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung der $(C, 1. 1)$*-Summierbarkeit in* R *fast überall, daß die Teilfolge* $\{S_{2^m,2^n}(x, y)\}$ $(m, n=1, 2, \ldots)$ *der Partialsummen von* (1) *auf* R *fast überall konvergent ist.*

---

[1]) В. С. Федулов, 0 (С,1,1)-суммируачости двойного ортогонального ряда, *Укранский Математический Журнал* 7 (1955), 433—442

Mit Hilfe dieses Satzes beweist Fedulov die folgende Behauptung.

Satz B. *Aus der Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 [\log\log(k+3)]^2 [\log\log(l+3)]^2$$

folgt die $(C, 1, 1)$*-Summierbarkeit von* (1) *auf* R *fast überall.*

Der Beweis des Satzes A ist aber falsch. Als auch Fedulov bewiesen hat, ist die $(C, 1, 1)$-Summierbarkeit von (1) unter der Bedingung (2) äquivalent mit der Konvergenz der Folge

$$\{\sigma_{2^m, 2^n}(x, y)\} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

fast überall. Zur Gültigkeit des Satzes A ist es also notwendig (und auch hinreichend), daß aus (2)

$$\lim_{m, n\to\infty} (\sigma_{2^m, 2^n} - S_{2^m, 2^n}) = 0 \tag{3}$$

fast überall folgt. Das ist aber in allgemeinen unrichtig (folglich ist auch der Satz A falsch).

Es sei nämlich $\{B_k\}$ eine reelle Zahlenfolge und $\{\Phi_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ein Orthonormalsystem von Funktionen, für welches

$$\lim_{m\to\infty} \sup \left| \sum_{k=1}^{2^m} B_k \Phi_k(x) \right| = \infty \tag{4}$$

in $[a, b]$ fast überall gilt und

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 < \infty$$

ist. [2]) Es existieren offenbar ein Orthonormalsystem $\{\psi_l(y)\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ in $[c, d]$ und eine reelle Zahlenfolge $\{C_k\}$, für die

$$\left| \sum_{l=1}^{2^n} C_l \psi_l(y) \right| \leqq M, \quad 0 < \left| \sum_{l=1}^{2^n} (l-1) C_l \psi_l(y) \right. \tag{5}$$

in $[c, d]$ fast überall gilt und

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l^2 < \infty$$

ist. Es seien weiterhin

$$a_{k,l} = B_k \cdot C_l \qquad \left(\sum_{k, l=1}^{\infty} a_{k,l}^2 < \infty \right)$$

und

$$\varphi_{k,l}(x, y) = \Phi_k(x) \psi_l(y) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots).$$

[2]) Die Existenz solcher Folge $\{B_k\}$ und solches orthonormierten Systems folgt z.B. aus einem bekannten Satz. (Siehe z. B. K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen, I., *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130., Satz I.)

Dann ist

$$S_{2^m,2^n}(x,y)-\sigma_{2^m,2^n}(x,y)=\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}\frac{k-1}{2^m}a_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)+ \tag{6}$$

$$+\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}\frac{l-1}{2^n}a_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)-\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}\frac{(k-1)(l-1)}{2^m2^n}a_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)=$$

$$=\sum\nolimits_1(m,n;x,y)+\sum\nolimits_2(m,n;x,y)-\sum\nolimits_3(m,n;x,y).$$

Aus

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\iint_R\left[\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}\frac{(k-1)(l-1)}{2^m2^n}a_{k,l}\varphi_{k,l}(x,y)\right]^2dx\,dy=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}2^{2n}}\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}(k-1)^2(l-1)^2a_{k,l}^2\leqq$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}^2k^2l^2\sum_{\substack{m\\2^m\geqq k}}\sum_{\substack{n\\2^n\geqq l}}\frac{1}{2^{2m}2^{2n}}=O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}^2<\infty$$

folgt

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum\nolimits_3(m,n;x,y)=0. \tag{7}$$

Auf Grunde von (5) ergibt sich

$$\left|\sum\nolimits_1(m,n;x,y)\right|=\left|\sum_{k=1}^{2^m}\frac{k-1}{2^m}B_k\Phi_k(x)\right|\left|\sum_{l=1}^{2^n}C_l\psi_l(y)\right|\leqq M\left|\sum_{k=1}^{2^m}\frac{k-1}{2^m}B_k\Phi_k(x)\right|.$$

Daraus ist es auf ähnlicher Weise, wie oben ersichtlich, daß

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum\nolimits_1(m,n;x,y)=0$$

fast überall gilt. Dagegen ist

$$\sum\nolimits_2(m,n;x,y)=\sum_{k=1}^{2^m}B_k\Phi_k(x)\sum_{l=1}^{2^n}\frac{l-1}{2^n}C_l\psi_l(y)$$

wegen (4) und (5) in R fast überall divergent, d.h. aus der Bedingung (2) folgt (3) nicht.

Es gilt aber der folgende

Hilfsatz. *Im Falle*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}^2[\log\log(k+3)]^2\,[\log\log(l+3)]^2<\infty \tag{8}$$

ist notwendige und hinreichende Bedingung für die $(C,1,1)$*-Summierbarkeit der doppelten Orthonormalreihe* (1) *in* R *fast überall, daß die Folge* $\{S_{2^m,2^n}(x,y)\}$ $(m,n=1,2,\ldots)$ *fast überall konvergiert.*

Bemerkung. Natürlich ergibt sich die Gültigkeit des Satzes B aus diesem Hilfsatz ebenso wie aus dem Satz A.

Auf Grund der obigen, zum Beweis des Hilfsatzes ist es genügend zu zeigen, daß in (6)

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum\nolimits_i(m,n;x,y) = 0 \qquad (i=1,2)$$

auf R fast überall gilt. Es sei

$$a_{k,l}^{*} = \frac{(k-1)a_{k,l}}{2^{m+1}} \qquad (2^m < k \leqq 2^{m+1};\ m=0,1,\ldots).$$

Auf Grund von (8) ist

$$(8^*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^{*2}[\log\log(k+3)]^2[\log\log(l+3)]^2 < \infty.$$

In der zitierten Arbeit hat FEDULOV gezeigt, daß aus (8*) die Konvergenz der Folge

$$S_{2^m,2^n}^{*}(x,y) = \sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n} a_{k,l}^{*}\varphi_{k,l}(x,y)$$

in R fast überall folgt. Es sei $(x_0, y_0)\in R$ ein beliebiger und in weiteren fester Punkt, wo die Folge $\{S_{2^m,2^n}^{*}(x,y)\}$ konvergiert, d.h. für beliebiges $\varepsilon>0$ existiert eine ganze Zahl ν, so daß

$$|S_{2^{m_1},2^{n_1}}^{*}(x_0,y_0) - S_{2^{m_2},2^{n_2}}^{*}(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{8} \qquad (m_i, n_i > \nu\ \ (i=1,2))$$

und

$$\left|\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\sum_{l=1}^{2^n} a_{k,l}^{*}\varphi_{k,l}(x_0,y_0)\right| < M(\nu;x_0,y_0) \qquad 0\leqq i\leqq \nu$$

für alle n gilt. Wenn also m genügend groß ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|\sum\nolimits_1(m,n;x_0,y_0)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n}\frac{k-1}{2^m}a_{k,l}\varphi_{k,l}(x_0,y_0)\right| = \\
&= \frac{1}{2^m}\left|\sum_{i=0}^{m-1}2^{i+1}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\sum_{l=1}^{2^n}a_{k,l}^{*}\varphi_{k,l}(x_0,y_0)\right| \leqq \\
&\leqq \frac{1}{2^m}\left|\sum_{i=0}^{\nu}2^{i+1}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\sum_{l=1}^{2^n}a_{k,l}^{*}\varphi_{k,l}(x_0,y_0)\right| + \\
&+ \frac{1}{2^m}\sum_{i=\nu+1}^{m-1}2^{i+1}\left|\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\sum_{l=2^{\nu+1}+1}^{2^n}a_{k,l}^{*}\varphi_{k,l}(x_0,y_0)\right| + \\
&+ \frac{1}{2^m}\sum_{i=\nu+1}^{m-1}2^{i+1}\left|\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\sum_{l=1}^{2^{\nu+1}}a_{k,l}^{*}\varphi_{k,l}(x_0,y_0)\right| < \\
&< \frac{2^{\nu+2}M(\nu;x_0,y_0)}{2^m} + \frac{\frac{\varepsilon}{8}\sum_{i=\nu+1}^{m-1}2^{i+1}}{2^m} + \frac{\frac{\varepsilon}{8}\sum_{i=\nu+1}^{m-1}2^{i+1}}{2^m} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ähnlicherweise können wir, zeigen, daß

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum\nolimits_2(m,n;x,y) = 0$$

in R fast überall gilt.

(Eingegangen am 2. März 1967.)