О структуре сплетения конечного числа циклических групп простого порядка

К. БУЗАШИ (Дебрецен)*

§ 1.
Введение

Как известно, силовская p-подгруппа S_n симметрической группы $\mathscr{S}_{p^n}$ является сплетением n циклических групп простого порядка p. В этом и заключается особый интерес задачи исследования строения группы S_n.

В работах Л. А. Калужнина [1], [2] описаны все характеристические подгруппы силовской p-подгруппы S_n симметрической группы $\mathscr{S}_{p^n}$. А. И. Веир в работе [3] даёт красивую модель для строения центрального ряда группы S_n. Для решения поставленной задачи автор работы [3] строит удобный базис в абелевом нормальном делителе группы S_n. Явные формулы, хорошо раскрывающие структуру этого базиса, найдены в работе [4].

Используя эти результаты, в настоящей работе даётся описание очень симметричных свойств строения коммутаторов элементов группы G.

§ 2.
Предварительные замечания

В этом параграфе мы напомним о строении центрального ряда силовской p-подгруппы S_{n+1} симметрической группы $\mathscr{S}_{p^{n+1}}$ (p — простое число) по работе [3], и приведём без доказательства формулы для взаимных коммутаторов элементов группы S_{n+1} (по [4]).

Пусть S_{n+1} — сплетение $n+1$ циклических групп простого порядка p, и задан определяющими соотношениями:

$$\begin{array}{lll}
(a^{(n)}_{i_1i_2\dots i_n})^p = e & (a^{(0)})^{-1}a^{(m)}_{i_1i_2\dots i_m}a^{(0)} = a^{(m)}_{i_1+1\,i_2\dots i_m}, & (m=1,2,\dots,n) \\
(x^{(n)}_{i_1i_2\dots i_{n-1}})^p = e & (a^{(1)}_{i_1})^{-1}a^{(m)}_{i_1i_2\dots i_m}a^{(1)}_{i_1} = a^{(m)}_{i_1i_2+1\,i_3\dots i_m}, & (m=2,3,\dots,n) \\
\vdots & (a^{(2)}_{i_1i_2})^{-1}a^{(m)}_{i_1i_2\dots i_m}a^{(2)}_{i_1i_2} = a^{(m)}_{i_1i_2i_3+1\,i_4\dots i_m}, & (m=3,\dots,n) \\
(a^{(2)}_{i_1i_2})^p = e & \vdots & \\
(a^{(1)}_{i_1})^p = e & (a^{(n-1)}_{i_1\dots i_{n-1}})^{-1}a^{(n)}_{i_2\dots i_{n-1}i_n}a^{(n-1)}_{i_1\dots i_{n-1}} = a^{(n)}_{i_1\dots i_{n-1}i_n+1} & \\
(a^{(0)})^p = e & (a^{(j)}_{\lambda_1\dots\lambda_j})^{-1}a^{(m)}_{i_1\dots i_j\dots i_m}a^{(j)}_{\lambda_1\dots\lambda_j} = a^{(m)}_{i_1\dots i_j\dots i_m}, &
\end{array} \tag{2.1}$$

* K. Buzási, (Debrecen)

$$\text{есш } \lambda_\mu \neq i_\mu \text{ для некоторого } \mu$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, p); \quad (1 \leqq \mu \leqq j,\ j < m).$$

Введём обозначения

$$x^{(m)} = a^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{11\ldots 1}^{(m-1)};\ x^{(n)} = x$$

$$\text{(2. 2)} \qquad y_1^{(m)} = a_{11\ldots 1}^{(m)};\ y_i^{(m)} = (x^{(m)})^{-1} y_{i-1}^{(m)} x^{(m)} \quad \begin{pmatrix} m = 1,2, \ldots, n \\ i = 2,3, \ldots, p^m \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1^{(m)} = y_1^{(m)};\ \alpha_i^{(m)} = (x^{(m)}, \alpha_{i-1}^{(m)}),$$

где $(x^{(m)}, \alpha_{i-1}^{(m)})$ — коммутатор элементов $x^{(m)}$ и $\alpha_{i-1}^{(m)}$.

Очевидно, обозначения (2. 2) имеют смысл, так как порядок элемента $x^{(m)}$ равен p^m.

Положим теперь

$$\text{(2. 3)} \qquad \begin{matrix} A^{(m)} = \{\alpha_{p^m}^{(m)}, \alpha_{p^m-1}^{(m)}, \ldots, \alpha_1^{(m)}\} \\ A_i^{(m)} = \{\alpha_{p^m}^{(m)}, \alpha_{p^m-1}^{(m)}, \ldots, \alpha_i^{(m)}\} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots, n \\ 1 < i \leqq p^m \end{pmatrix}$$

Тогда, по работе [3], центральный ряд группы S_{n+1} имеет вид

$$\text{(2. 4)} \quad A_{p^n}^{(n)} \subset A_{p^n-1}^{(n)} \subset \ldots \subset A_{p^{n-1}+1}^{(n)} \subset A_{p^{n-1}}^{(n)} \cdot A_{p^{n-1}}^{(n-1)} \subset A_{p^{n-1}-1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-1}-1}^{(n-1)} \subset \ldots \subset$$

$$\subset A_{p^{n-2}+1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-2}+1}^{(n-1)} \subset A_{p^{n-2}}^{(n)} \cdot A_{p^{n-2}}^{(n-1)} \cdot A_{p^{n-2}}^{(n-2)} \subset \ldots \subset A_{p^{n-3}+1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-3}+1}^{(n-1)} \cdot A_{p^{n-3}+1}^{(n-2)} \subset \ldots \subset$$

$$\subset A_2^{(n)} \cdot A_2^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot A_2^{(2)} \cdot A_2^{(1)} \subset S_{n+1} = G,$$

где G представляется в виде полупрямого произведения

$$\text{(2. 5)} \qquad G = A^{(n)} \cdot A^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot A^{(1)} \cdot \{x\}.$$

Отсюда

$$\text{(2. 6)} \qquad S_{n+1} = A^{(n)} \cdot S_n,$$

где S_n — сплетение n циклических групп простого порядка p.

В обозначениях (2. 2) имеют место двойственные соотношения:

$$\text{(2. 7)} \qquad \begin{matrix} \alpha_i^{(m)} = \prod\limits_{\nu=1}^{i} (y_\nu^{(m)})^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} \\ y_i^{(m)} = \prod\limits_{\nu=1}^{i} (\alpha_\nu^{(m)})^{(-1)^{\nu-1} C_{i-1}^{\nu-1}} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p^m \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

где C_k^l — коэффициенты бинома Ньютона. Формулы (2. 7) приведены без доказательства. (Они доказаны в [4]).

§ 3.
Свойства коммутаторов элементов группы G*

В этом параграфе устанавливается одно интересное свойство коммутаторов элементов группы G, что $(a^{(m)}, a^{(r)})$ в группе $A^{(r)}$ попадает в подгруппу группы $A^{(r)}$, однозначно определённую индексами m, r ($a^{(m)} \in A^{(m)}$; $a^{(r)} \in A^{(r)}$, $m \leqq r$).

Рассмотрим отображение

$$x \to x^{-1} A^{(n)} x. \tag{1}$$

Так как группу $A^{(n)}$ в аддитивной записи можно рассматривать как линейное пространство над простым полем π характеристики p, то группа автоморфизмов этой группы изоморфна группе $GL(n, \pi)$, и следовательно, соответствие (1) определяет представление циклической группы $\{x\}$ над полем π. Матрица этого представления в базисе $\{\alpha_\mu^{(n)}\}$ имет вид

$$x \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & 0 & & 1 & -1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Отсюда ясно, что это представление группы $\{x\}$ эквивалентно регулярному представлению группы $\{x\}$, так как последнее в базисе $1, (1-x), (1-x)^2, \dots, (1-x)^{p^n-1}$ групповой алгебры $\{x\}\pi$ также записывается в виде (2).

Известно, что циклическая группа порядка p^n над полем характеристики p содержит точно один идеал размерности k $(1 \leqq k \leqq p^n)$. Отсюда сразу вытекает, что для каждого натурального k существует точно один нормальный делитель группы $A^{(n)}$ порядка p^{k+1}.

Рассмотрим идеал $I^{(n-1)}$, порождённый коммутаторами

$$(a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{j_1 j_2 \dots j_n}) \qquad (i_1, \dots, i_{n-1}, j_1, \dots, j_n = 1, 2, \dots, p)$$

Очевидно, коммутаторы, в которых $i_k \neq j_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$, равны единице группы, так как, по определяющим отношениям (2. 1), выполняется

$$(a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}})^{-1} a^{(n)}_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} j_n} a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = a^{(n)}_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} j_n},$$

если $i_k \neq j_k$ хотя бы для одного k из $k = 1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, идеал $I^{(n-1)}$ порождается коммутаторами

$$(a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n}), \qquad i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n = 1, 2, \dots, p-1. \tag{3. 1}$$

При фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ среди коммутаторов вида (3. 1) линейно независимых имеется точно p. Действительно, из (2. 1) следует

$$\prod_{j_n=1}^{p} (a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n}) = \prod_{j_n=1}^{p} (a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}})^{-1} (a^{(n)}_{i_1 \dots i_{n-1} j_n})^{-1} a^{(n-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} a^{(n)}_{i_1 \dots i_{n-1} j_n} =$$

$$= \prod_{j_n=1}^{p} (a^{(n)}_{i_1 \dots i_{n-1} j_n})^{-1} a^{(n)}_{i_1 \dots i_{n-1} j_n} = e.$$

---

* Заметим, что некоторые утверждения этого параграфа могут быть получены также из результатов работ [2], [3].

Однако, произведение любых степеней коммутаторов

$$(a^{(n-1)}_{i_1\dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1\dots i_{n-1}j_n})^{\delta_{j_n}},$$

число которых меньше p, не может равняться единице группы, если не все δ_{j_n} равны нулю. Значит линейно независимых элементов вида (3. 1) в идеале $I^{(n-1)}$, при фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, точно $p-1$. Тогда всех линейно независимых элементов такого вида в идеале $I^{(n-1)}$ имеется точно $p^{n-1}(p-1)$.

Покажем, что идеал $I^{(n-1)}$ инвариантен относительно всех автоморфизмов, порождённых элементами группы $\{x\}$. Действительно

$$(a^{(0)})^{-1}(a^{(n-1)}_{i_1\dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1\dots i_{n-1}j_n})a^{(0)} = (a^{(n-1)}_{i_1+1\dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1+1\dots i_{n-1}j_n}) \in I^{(n-1)},$$

$$(a^{(m)}_{k_1\dots k_m})^{-1}(a^{(n-1)}_{i_1\dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1\dots i_{n-1}j_n})a^{(m)}_{k_1\dots k_m} =$$

$$= \begin{cases} (a^{(n-1)}_{i_1\dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1\dots i_{n-1}j_n}), & \text{если } k_\lambda \neq i_\lambda \text{ для некоторого } 1 < \lambda \leqq m, \\ (a^{(n-1)}_{k_1\dots k_m i_{m+1}+1\, i_{m+2}\dots i_{n-1}}, a^{(n)}_{k_1\dots k_m i_{m+1}+1\, i_{n-1}j_n},) & \text{если } k_\lambda = i_\lambda \text{ для всех } 1 < \lambda \leqq m, \end{cases}$$

но в обоих случаях коммутаторы лежат в $I^{(n-1)}$ для всех $k_1, k_2, \dots, k_m = 1, 2, \dots, p$; $m = 1, 2, \dots, n-1$. Так как по определению (2. 2) $x = a^{(0)} \cdot a^{(1)}_1 \cdot a^{(2)}_{11} \cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{11\dots 1}$, то $I^{(n-1)}$ инвариантен также относительно всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами из $\{x\}$.

Однако, из определения центрального ряда (2. 4) следует, что идеалом размерности $p^{n-1}(p-1)$, инвариантным относительно этих автоморфизмов, является идеал $A^{(n)}_{p^{n-1}+1}\pi$. Этим доказана нами

Теорема 3. 1. $(a^{(n-1)}, a^{(n)}) \in A^{(n)}_{p^{n-}\ \ +1}$ для всех $a^{(n-1)} \in A^{(n-1)}, a^{(n)} \in A^{(n)}$.

Рассмотрим теперь идеал $I^{(m)}$, порождённый коммутаторами

$$(a^{(m)}_{i_1\dots i_m} \cdot a^{(m+1)}_{i_1\dots i_m j_{m+1}} \cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{i_1\dots i_n j'_{m+1}\dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}) \tag{3. 2}$$

где $i_1, \dots, i_m, j'_{m+1}, \dots, j'_{n-1}, j''_{m+1}, \dots, j''_n = 1, 2, \dots, p; 0 \leqq m \leqq n-1$.

При фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_m$ среди коммутаторов (3. 2) линейно независимых имеется точно $p^{n-m}-1$. Действительно, методами до- казательства теоремы 3. 1 можно показать, что при изменении индексов $j''_{m+1} \dots, j''_n$ от 1 до p произведение всех p^{n-m} так полученных коммутаторов равно единице, но произведение произвольных ($\neq 0$) степеней любых $p^{n-m}-1$ из этих коммутаторов не может равняться единице.

При фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_m$ элементы

$$a^{(m)}_{i_1\dots i_m}, a^{(m+1)}_{i_1\dots i_m j_{m+1}}, \dots, a^{(n-1)}_{i_1\dots i_m j'_{m+1}\dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n},$$

$(1 \leqq j_{m+1}, j'_{m+1}, \dots, j'_{n-1}, j''_{m+1}, \dots, j''_n \leqq p)$ порождают сплетение $\bar{S}_{i_1\dots i_m}$ $n-m+1$ циклических групп порядка p. Очевидно, элементы $a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}$ порождают элементарный абелев нормальный делитель $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$ порядка $p^{p^{n-m}}$ в $\bar{S}_{i_1 \dots i_m}$. Так как коммутаторы (3. 2) лежат в $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$, то $p^{n-m}-1$ линейно независимых из этих взаимных коммутаторов образуют базис подгруппы $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$. Ясно, что взаимные коммутаторы

$$(a^{(m)}_{i_1 \dots i_m}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}), \dots, (a^{(n-1)}_{i_1 \dots i_m j'_{m+} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n})$$

лежат в $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$, даже все

$$(a^{(m)}_{k_1 \dots k_m}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}), \dots, (a^{(n-1)}_{l_1 \dots l_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}),$$

независимо от индексов $k_1, \dots, k_m, \dots, l_1 \dots, l_m$, также принадлежат $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$, так как, если первые m индексов не совпадают соответственно с $i_1, \dots, i_m$, то такой коммутатор равен единице группы.

Но тогда также

$$(a^{(m)}_{k_1 \dots k_m} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{l_1 \dots l_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}) \in \bar{A}_{i_1 \dots i_m}$$

при фиксированных $i_1, \dots, i_m$, независимо от других индексов. Значит мы получили, что при фиксированных $i_1, \dots, i_m$ среди коммутаторов

$$(a^{(m)}_{k_1 \dots k_m} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{l_1 \dots l_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}) \tag{3. 3}$$

линейно независимых имеется точно $p^{n-1}-1$.

При изменении индексов $i_1, \dots, i_m$ среди коммутаторов (3. 2) линейно независимых имеется точно $p^m(p^{n-m}-1)$. Но тогда также среди произвольных коммутаторов вида (3. 3) линейно независимых также точно $p^m(p^{n-m}-1)$.

Осталось показать, что идеал $I^{(m)}$ инвариантен относительно всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами циклической группы $\{x\}$.

Так как $x = a^{(0)} \cdot a^{(1)}_1 \cdot a^{(2)}_{11} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{11 \dots 1}$, то достаточно проверить, что идеал $I^{(m)}$ инвариантен относительно всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами $a^{(0)}, a^{(1)}_1 a^{(2)}_{11}, \dots, a^{(n-1)}_{11 \dots 1}$.

Для коммутаторов, где индексы $i_1, \dots, i_r$ не все равны единице, мы имеем

$$(a^{(r)}_{11 \dots 1})^{-1} (a^{(m)}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}) a^{(r)}_{1 \dots 1} =$$
$$= (a^{(m)}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}) \in I^{(m)}.$$

Если $i_1 = i_2 = \dots = i_r = 1$, то

$$(a^{(r)}_{1 \dots 1})^{-1} (a^{(m)}_{1 \dots 1 i_{r+1} \dots i_m} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{1 \dots 1 i_{r+1} \dots i_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{1 \dots 1 i_{r+1} \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}) a^{(r)}_{1 \dots 1} =$$
$$= (a^{(m)}_{1 \dots 1 i_{r+1}+1 i_{r+2} \dots i_m} \cdot \dots \cdot a^{(n-1)}_{1 \dots 1 i_{r+1}+1 i_{r+2} \dots i_m j'_{m+1} \dots j'_{n-1}}, a^{(n)}_{1 \dots 1 i_{r+1}+1 i_{r+2} \dots i_m j''_{m+1} \dots j''_n}) \in I^{(m)}$$

для всех $r = 0, 1, \dots, m$. При этом мы пользовались только известным свойством коммутаторов

$$c^{-1}(a, b)c = (c^{-1}ac, c^{-1}bc)$$

и определениями (2. 1).

Рассмотрим теперь действие внутренних автоморфизмов, порождённых элементами $a^{(r)}_{1\dots1}$, где $m<r\leqq n-1$. При $l>r$

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_r\dots i_l}a^{(r)}_{1\dots1}=\begin{cases} a^{(l)}_{i_1\dots i_2\dots i_l}, & \text{если не все } i_1,\dots,i_r \text{ равны } 1\\ a^{(l)}_{1\dots1 i_{k+1}+1 i_{k+2}\dots i_l}, & \text{если } i_1=i_2=\dots=i_r=1.\end{cases}$$

Но

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_r\dots j_n}a^{(r)}_{1\dots1}=$$

$$=\begin{cases} a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}, & \text{если не все } i_1,\dots,i_m,j''_{m+1},\dots,j_r \text{ равны } 1\\ a^{(n)}_{1\dots1 j''_{r+1}+1 j''_{r+2}\dots j''_n}, & \text{если } i_1=i_2=\dots=i_m=j''_{m+1}=\dots=j''_r=1,\end{cases}$$

поэтому

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}(a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_r\dots i_l},a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n})a^{(r)}_{1\dots1}\in I^{(m)}.$$

Для $l<r$

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l}a^{(r)}_{1\dots1}=a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l}\cdot(a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l})^{-1}(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l}\cdot a^{(r)}_{1\dots1}.$$

Если не все $i_1,i_2,\dots,i_m,\dots i_l$ равны 1, то полученное выражение равно $a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l}$. Если же $i_1=i_2=\dots=i_l=1$, то мы получим $a^{(l)}_{1\dots1}(a^{(r)}_{1\dots i\,2\,1\dots1})^{-1}a^{(r)}_{1\dots1}$. В первом случае

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}(a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l},a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n})a^{(r)}_{1\dots1}\in I^{(m)}.$$

Во втором случае для всех множителей выполняется

$$(a^{(r)}_{1\dots1},(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}a^{(r)}_{1\dots1})\in I^{(m)},$$

$$(a^{(r)}_{1\dots1\,2\,1\dots1},(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}a^{(r)}_{1\dots1})\in I^{(m)},$$

$$(a^{(l)}_{1\dots1},(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}a^{(r)}_{1\dots1})\in I^{(m)},$$

поэтому также

$$(a^{(l)}_{1\dots1}\cdot(a^{(r)}_{1\dots1\,2\,1\dots1})^{-1}a^{(r)}_{1\dots1},(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n}a^{(r)}_{1\dots1})\in I^{(m)},$$

то есть

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}\cdot(a^{(l)}_{i_1\dots i_m\dots i_l},a_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n})\cdot a^{(r)}_{1\dots1}\in I^{(m)}.$$

Так как все эти коммутаторы лежат в $I^{(m)}$, то также

$$(a^{(r)}_{1\dots1})^{-1}\cdot(a^{(m)}_{i_1\dots i_m}\cdot\ldots\cdot a^{(n-1)}_{i_1\dots i_m j'_{m+1}\dots j'_{n-1}},a^{(n)}_{i_1\dots i_m j''_{m+1}\dots j''_n})a^{(r)}_{1\dots1}\in I^{(m)}$$

для всех $m<r\leqq n-1$.

Мы получили, что действие внутренних автоморфизмов, порождённых элементами $a^{(0)},a^{(1)}_1,a^{(2)}_{11},\dots,a^{(n-1)}_{11\dots1}$ не выводит коммутаторы вида (3.2) из идеала $I^{(m)}$. Значит $I^{(m)}$ инвариантен также относительно внутреннего автоморфизма, порожденного элементом x.

Однако идеалом размерности $p^m(p^{n-m}-1)$, инвариантным относительно этих же автоморфизмов, является идеал $A^{(n)}_{p^m+1}$. Отсюда получается $I^{(m)}=A^{(n)}_{p^m+1}$.

Этим самым нами доказаны следующие факты:

Теорема 3. 2. $(a^{(m)}, a^{(n)})\in A^{(n)}_{p^m+1}$ *для всех* $a^{(m)}\in A^{(m)}$ и $a^{(n)}\in A^{(n)}$ при $m=0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема 3. 3. $(a^{(k)}, a^{(n)})\in A^{(n)}_{p^m+1}$ *для всех* $a^{(k)}\in A^{(k)}$, $m\leqq k\leqq n-1$, $m=0, 1, \ldots, n-1$.

Действительно, $(a^{(k)}, a^{(n)})\in A^{(n)}_{p^k+1}\subseteqq A^{(n)}_{p^m+1}$ по строению центрального ряда (2. 4).

Очевидным следствием из этих теорем является

Теорема 3. 4. $(g_m, a^{(n)})\in A^{(n)}_{p^m+1}$ *для всех* $g_m\in A^{(n-1)}\cdot A^{(n-2)}\cdot\ldots\cdot A^{(m)}$, $m=0, 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим теперь подгруппу $G'=A^{(k)}\cdot A^{(k-1)}\cdot\ldots\cdot A^{(1)}\cdot\{a^{(0)}\}$, где k — произвольный индекс, для которого $0<k\leqq n$. Она, очевидно, является сплетением $k+1$ циклических групп простого порядка p, порождённых элементами $a^{(k)}_{i_1\ldots i_k}, a^{(k-1)}_{j_1\ldots j_{k-1}}, \ldots a^{(1)}_j, \ldots, a^{(0)}$. В подгруппе G' подгруппа $A^{(k)}$ является элементарным абелевым нормальным делителем порядка p^k.

Тогда элемент $x^{(k)}$ имеет порядок p^k и порождает автоморфизм группы $A^{(k)}$. Подобно рассмотренному раньше случаю, соответствие

$$x^{(k)}\to(x^{(k)})^{-1}A^{(k)}x^{(k)} \tag{3. 4}$$

является представлением циклической группы $\{x^{(k)}\}$ автоморфизмами группы $A^{(k)}$, порождёнными элементами группы $\{x^{(k)}\}$. В точности повторяя рассуждения, приводящие к предыдущим теоремам этого параграфа, можем установить следующие факты:

Теорема 3. 5. $(a^{(l)}, a^{(k)})\in A^{(k)}_{p^l+1}$ *для всех* $a^{(l)}\in A^{(l)}$ *и* $a^{(k)}\in A^{(k)}$ *при* $0<k\leqq n$, $0\leqq l\leqq k-1$.

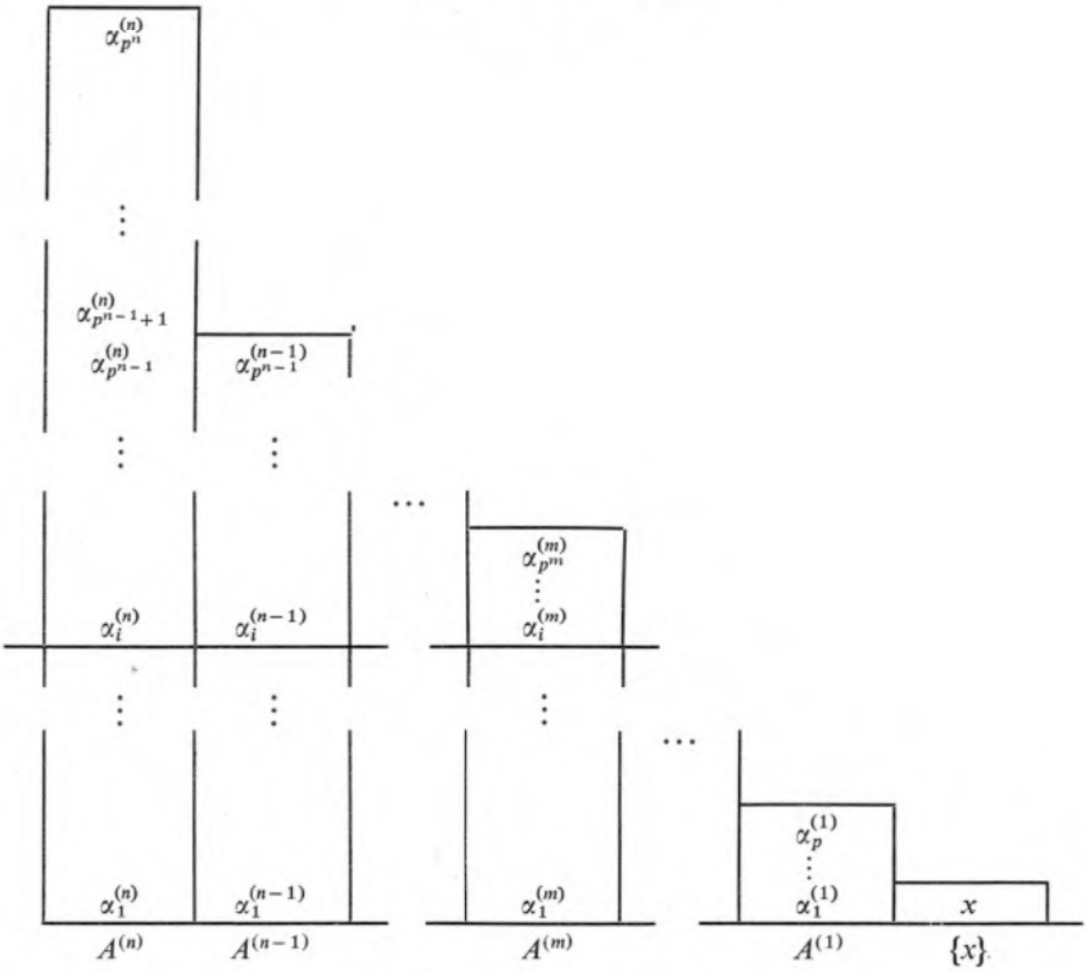
Теорема 3. 6. $(a^{(r)}, a^{(k)})\in A^{(k)}_{p^l+1}$ *для всех* $a^{(r)}\in A^{(r)}$ *и* $a^{(k)}\in A^{(k)}$ *при* $l\leqq r\leqq k-1$, $0<k\leqq n$, $0\leqq l\leqq k-1$.

Теорема 3. 7. $(g_l, a^{(k)})\in A^{(k)}_{p^l+1}$ *для всех* $g_l\in A^{(k-1)}\cdot A^{(k-2)}\cdot\ldots\cdot A^{(l)}$, $l=0, 1, \ldots, k-1$.

В итоге получается следующая картина.

Рассмотрим диаграмму (предложенную в работе [3]), построенную следующим образом: Под столбцами диаграммы указаны подгруппы (по (2. 3)), которых они означают. В столбцы записаны образующие элементы, порождающие соответствующие подгруппы. Если на любой высоте диаграммы провести горизонтальную черту и записать полупрямое произведение подгрупп, определённых пересеченными столбцами и взятых с таким нижним индексом, которым обладает базисный элемент непосредственно над чертой, то мы получим характеристическую подгруппу нашей группы. (Например черта на нашей диаграмме определяет характеристическую подгруппу $A^{(n)}_i\ A^{(n-1)}_i\ldots A^{(m)}_i$). С помощью этой диаграммы введём некоторые понятия.

Диаграмма группы G.



Определение 3. 1. k-ой критической точкой называется черта, мысленно проведенная на диаграмме под элементами с нижним индексом p^{n-k}.

Определение 3. 2. Будем говорить, что коммутатор $(a, b) \in A^{(m)}$ попадает за k-ую критическую точку, если $(a, b) \in A^{(m)}_{p^{n-k}+1}$, $m > n > k$.

С помощью этих понятий полученные в этом параграфе результаты можем сформулировать так:

Следствие 3. 1. *Коммутатор* $(a^{(k)}, a^{(m)})$, $a^{(k)} \in A^{(k)}$, $a^{(m)} \in A^{(m)}$, $m > k$ *попадает за* $n-k$*-ую критическую точку в* $A^{(m)}$. *Более того, коммутатор* $(g_k, a^{(m)})$ *попадает за* $m-k$*-ую критическую точку в* $A^{(m)}$ *для всех* $a^{(m)} \in A^{(m)}$, *если*

$$g_k \in A^{(k)} \cdot \ldots \cdot A^{(m-1)}.$$

§ 4.
Свойства коммутаторов базисных элементов группы G

В этом параграфе даётся более глубокий анализ свойств коммутаторов элементов группы G. Устанавливается, что взаимные коммутаторы двух базисных элементов группы G, записанных в приведённой в параграфе 3 диаграмме, попадают в чётко определённые, симметрично построенные области диаграммы.

В большинстве случаев будем опираться на соотношения (2. 7). Однако иногда будем пользоваться тем, уже отмеченным раньше, фактом, что отображение $x \to x^{-1}gx$ является представлением циклической группы $\{x\}$ автоморфизмами группы $A^{(n)}$, порождёнными элементами группы $\{x\}$, так как это обстоятельство позволяет перевести вычисления в групповую алгебру $A^{(n)}\pi$ группы $A^{(n)}$ над конечным полем π из p элементов.

Для произвольных $g \in A^{(n)}$ и $a \in G$ выполняется равенство

$$a^{-1}ga = g \cdot (a, g)^{-1}.$$

В аддитивной записи этот факт записуется в виде

$$ga = g - g(1-a),$$

где оператор a действует по определению $ga = a^{-1}ga$. Значит коммутатор (a, g) в этой записи имеет вид $g(1-a)$. Иногда будем пользоваться такой записью для коммутаторов элементов группы G.

В дальнейшем неоднократно будем применять следующую *формулу*

$$\alpha_{i+1}^{(n)} = \alpha_1^{(n)}(1-x)^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n - 1). \tag{4. 1}$$

Доказывать её будем индукцией по i. Формула верна для $i=0$. Предположим, что имеет место

$$\alpha_i^{(n)} = \alpha_1^{(n)}(1-x)^{i-1}.$$

Тогда из определения (2. 2) элементов $\alpha_j^{(n)}$ следует

$$\alpha_{i+1}^{(n)} = \alpha_i^{(n)}(1-x) = [\alpha_1^{(n)}(1-x)^{i-1}](1-x) = \alpha_1^{(n)}(1-x)^i.$$

Формула доказана. Отсюда следует также *формула*

$$\alpha_i^{(n)}x = \alpha_i^{(n)} - \alpha_1^{(n)}(1-x)^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n - 1). \tag{4. 2}$$

Рассмотрим сначала коммутаторы элементов подгруппы $A^{(n)}$ с элементами подгруппы $A^{(0)}$.

Теорема 4. 1.

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = \begin{cases} \alpha_{kp+r+1}^{(n)}, & \text{если } r \neq 0 \\ e, & \text{если } r = 0 \end{cases}$$

для всех $0 \leqq k < p^{n-1}$, $0 \leqq r < p$.

Доказательство. Из определений (2. 1) и (2. 2) следует

$$(4.\ 1)\qquad (a^{(0)})^{-1}\, y^{(n)}_{kp+r}\, a^{(0)} = \begin{cases} y^{(n)}_{kp+r+1} & \text{если} \quad r \neq 0 \\ y^{(n)}_{(k-1)p+1} & \text{если} \quad r = 0. \end{cases}$$

Тогда, используя формулы (2.7), мы имеем

$$(a^{(0)}, \alpha^{(n)}_{kp+r}) = (a^{(0)})^{-1} \cdot \left[\prod_{\nu=1}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{-(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \right] a^{(0)} \cdot \prod_{\nu=1}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}}.$$

Разбиваем произведение на „группы" из p множителей, отделяя в каждой элемент с индексом, кратным p. Тогда получим

$$(a^{(0)}, \alpha^{(n)}_{kp+r}) = (a^{(0)})^{-1} \left[(y^{(n)}_p)^{-C^{p-1}_{kp+r-1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{p-1} (y^{(n)}_\nu)^{-(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \cdot (y^{(n)}_{2p})^{C^{2p-1}_{kp+r-1}} \cdot \right.$$
$$\cdot \prod_{\nu=p+1}^{2p-1} (y^{(n)}_\nu)^{-(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \cdot \ldots \cdot (y^{(n)}_{kp})^{(-1)^{kp} C^{kp-1}_{kp+r-1}} \cdot \prod_{\nu=(k-1)p+1}^{kp-1} (y^{(n)}_\nu)^{-(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\left. \cdot \prod_{\nu=kp+1}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{-(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \right] a^{(0)} \cdot \prod_{\nu=1}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}}.$$

Подвергаем теперь выражение в квадратной скобке внутреннему автоморфизму, порождённому элементом $a^{(0)}$:

$$(a^{(0)}, \alpha^{(n)}_{kp+r}) = (y^{(n)}_1)^{-C^{p-1}_{kp+r-1}} \cdot \prod_{\nu=2}^{p} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1}} \cdot (y^{(n)}_{p+1})^{C^{2p-1}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\nu=p+2}^{2p} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1}} \cdot \ldots \cdot (y^{(n)}_{(k-1)p+1})^{(-1)^{kp} C^{kp-1}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\nu=(k-1)p+2}^{kp} (y^{(m)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1}} \cdot \prod_{\nu=kp+2}^{kp+r+1} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\nu=1}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} = \prod_{i=0}^{k-1} (y^{(n)}_{ip+1})^{(-1)^{(i+1)p} C^{(i+1)p-1}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=ip+2}^{(i+1)p} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1}} \cdot \prod_{\nu=kp+2}^{kp+r+1} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}}.$$

Разложим теперь последний множитель выражения и группируем элементы с равными нижними индексами:

$$(4.\ 2)\qquad (a^{(0)}, \alpha^{(n)}_{kp+r}) = \prod_{i=0}^{k-1} (y^{(n)}_{ip+1})^{(-1)^{(i+1)p} C^{(i+1)p-1}_{kp+r-1} + (-1)^{ip} C^{ip}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=ip+2}^{(i+1)p} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-1} + (-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \cdot (y^{(n)}_{kp+1})^{(-1)^{kp} C^{kp}_{kp+r-1}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\nu=kp+2}^{kp+r} (y^{(n)}_\nu)^{(-1)^{\nu-1} C^{\nu-2}_{kp+r-2} + (-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{kp+r-1}} \cdot (y^{(n)}_{kp+r+1})^{-(-1)^{kp+r-1} C^{kp+r-1}_{kp+r-1}}.$$

Если $r \neq 0$, то $C_{kp+r-1}^{(i+i)p-1}$ делится на p для любого $i=0, 1, \ldots, k-1$. Кроме того, очевидно,

$$C_{kp+r-1}^{ip} \equiv C_k \pmod p,$$
$$C_{kp+r-1}^{\nu-2} + C_{kp+r-1}^{\nu-1} = C_{kp+r}^{\nu-1}.$$

Следовательно, в случае $r \neq 0$ мы получим:

$$(a^{(0)}, a_{kp+r}^{(n)}) = \prod_{i=0}^{k-1} (y_{ip+1}^{(n)})^{(-1)^{ip} C_k^i} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=ip+2}^{(i+1)p} (y_\nu^{(n)})^{(-1)^{\nu-1} C_{kp+r}^{\nu-1}} \cdot$$
$$\cdot (y_{kp+1}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_k^k} \cdot \prod_{\nu=kp+2}^{kp+r} (y_\nu^{(n)})^{(-1)^{\nu-1} C_{kp+r}^{\nu-1}} \cdot (y_{kp+r+1}^{(n)})^{(-1)^{kp+r}}.$$

Учитывая теперь, $C_{kp+r}^{ip} \equiv C_k^i \pmod p$, имеем

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = \prod_{i=0}^{k-1} (y_{ip+1}^{(n)})^{(-1)^{ip} C_{kp+r}^{ip}} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=ip+2}^{(i+1)p} (y_\nu^{(n)})^{(-1)^{\nu-1} C_{kp+r}^{\nu-1}} \cdot$$
$$\cdot (y_{kp+1}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_{kp+r}^{kp}} \cdot \prod_{\nu=kp+2}^{kp+r} (y_\nu^{(n)})^{(-1)^{\nu-1} C_{kp+r}^{\nu-1}} \cdot (y_{kp+r+1}^{(n)})^{(-1)^{kp+r} C_{kp+r}^{kp+r}} =$$
$$= \prod_{\nu=1}^{kp+r+1} (y_\nu^{(n)})^{(-1)^{\nu-1} C_{kp+r}^{\nu-1}} = \alpha_{kp+r+1}^{(n)}.$$

Если $r=0$, то $(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = e$. Действительно,

$$\left.\begin{aligned} C_{kp-1}^{(i+1)p-1} &\equiv C_{k-1}^i \\ C_{kp-1}^{ip} &\equiv C_{k-1}^i \end{aligned}\right\} \pmod p;$$

значит

$$-(-1)^{(i+1)p-1} C_{k-1}^i + (-1)^{ip} C_{k-1}^i = (-1)^{(i+1)p} C_{k-1}^i + (-1)^{ip} C_{k-1}^i = 0.$$

Кроме того,

$$C_{kp-1}^{\nu-2} + C_{kp-1}^{\nu-1} = C_{kp}^{\nu-1} \equiv 0 \pmod p$$

для всех $ip+2 \leqq \nu \leqq (i+1)p$, $(i=0, 1, \ldots k-1)$. Остальные множители при $r=0$ в (4. 2) отсутствуют.
Теорема доказана.

Введём несколько понятий.

Определение 4. 1. Запишем последовательность $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_{p^m}^{(m)}$ базисных элементов группы $A^{(m)}$, расположенных на диаграмме предыдущего параграфа, в виде столбца с возрастающими снизу вверх индексами. Назовем $k+1$-ым периодом j-ого порядка группы $A^{(m)}$ отрезок $\alpha_{kp^j+1}^{(m)}, \alpha_{kp^j+2}^{(m)}, \ldots, \alpha_{(k+1)p^j}^{(m)}$ длины p^j этой последовательности элементов $(1 \leqq k \leqq p^{m-j})$.

Определение 4. 2. Для периода j- ого порядка $\alpha_{kp^j+1}^{(m)}, \ldots, \alpha_{(k+1)p^j}^{(m)}$ группы $A^{(m)}$ период j-ого порядка $\alpha_{(k+1)p^j+1}^{(m)}, \ldots, \alpha_{(k+2)p^j}^{(m)}$ называется следующим.

Определение 4. 3. Элемент $\alpha_{kp^j+1}^{(m)}$ называется главной буквой $k+1$-ого периода j-ого порядка $\alpha_{kp^j+1}^{(m)}, \ldots, \alpha_{(k+1)p^j}^{(m)}$ группы $A^{(m)}$. Об элементах

$\alpha^{(m)}_{kp^j+2}, \ldots, \alpha^{(m)}_{p^m}$ будем говорить, что они находятся выше элемента $\alpha^{(m)}_{kp^j+1}$. Элемент $\alpha^{(m)}_1$ называется главной буквой группы $A^{(m)}$. Элемент $\alpha^{(m)}_{kp^j+r}$ назовём r-ым элементом $k+1$-ого периода j-ого порядка группы $A^{(m)}$.

Определение 4. 4. Если $(a, b)=c$, то мы будем говорить, что элемент a переводит элемент b в элемент c.

В терминах этих определений нами установлен следующий факт:

Следствие 4. 1. *Элемент $a^{(0)}$ группы $A^{(0)}=\{a^0\}$ переводит главные буквы периода 0-ого порядка группы $A^{(n)}$ в главные буквы следующего периода 0-ого порядка группы $A^{(n)}$, за исключением последнего элемента периода 1-ого порядка, которого он переводит в единицу группы.*

Рассмотрим теперь коммутаторы элементов группы $A^{(1)}$ с элементами группы $A^{(n)}$.

Теорема 4. 2. $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(n)})=\alpha^{(n)}_{p+1}$

Доказательство. Так как

$$x^p = (a^{(0)}\cdot a_1^{(1)}\cdot a_{11}^{(2)}\cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{11\ldots 1})^p = a^{(1)}_{p-1}\cdot a^{(2)}_{p-11}\cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{p-11\ldots 1}\cdot$$
$$\cdot a^{(1)}_{p-2}\cdot a^{(2)}_{p-21}\cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{p-21\ldots 1}\cdot \ldots \cdot a_2^{(1)}\cdot a_{21}^{(2)}\cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{21\ldots 1}\cdot a_1^{(1)}\cdot a_{11}^{(2)}\cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{11\ldots 1},$$

то, используя формулу (4. 1), получим

$$\alpha^{(n)}_{p+1} = \alpha_1^{(n)}(1-x)^p = \alpha_1^{(n)}(1-x^p) = \alpha_1^{(n)}(1-a_1^{(1)}a_{11}^{(2)}\cdot \ldots \cdot a^{(n-1)}_{1\ldots 1}) = \alpha_1^{(n)}(1-a_1^{(1)}).$$

Действительно, операторы $a^{(1)}_{p-1}, a^{(2)}_{p-11}, \ldots, a^{(n-1)}_{p-11\ldots 1}, a^{(1)}_{p-2}, a^{(2)}_{p-21}, \ldots, a^{(n-1)}_{p-21\ldots 1}, \ldots$ $\ldots, a_2^{(1)}, a_{21}^{(2)}, \ldots, a^{(n-1)}_{21\ldots 1}$ оставляют на месте элемент $\alpha_1^{(n)}$, а элемент $\alpha_1^{(n)}a_1^{(1)}$ уже инвариантен относительно операторов $a_{11}^{(2)}, \ldots, a^{(n-1)}_{11\ldots 1}$. Теорема доказана.

Подобно (4. 1) легко доказать *формулу*

$$\alpha^{(m)}_{i+1} = \alpha_1^{(m)}(1-x^{(m)})^i, \qquad (i=1, 2, \ldots, p^m-1;\ 1 \leqq m \leqq n). \tag{4. 3}$$

Теорема 4. 3.

$$(\alpha_1^{(1)}, \alpha^{(n)}_{kp^2+lp+1}) = \begin{cases} \alpha^{(n)}_{kp^2+(l+1)p+1}, & \text{\textit{если}}\quad 0 \leqq l < p-1 \\ e, & \text{\textit{если}}\quad l=p-1 \end{cases}$$

для всех $0 \leqq k < p^{n-2}$.

Доказательство. Очевидно, теорему можно сформулировать в виде:

$$(a_1^{(1)}, \alpha^{(n)}_{kp+1}) = \begin{cases} \alpha^{(n)}_{(k+1)p+1}, & \text{если}\quad k \neq rp-1 \\ e, & \text{если}\quad k = rp-1 \end{cases}$$

для всех $0 \leqq k < p^{n-1}$, $r=1, 2, \ldots, p^{n-2}$, так как $a_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}$. Доказывать теорему будем в таком виде. Из определений (2. 1) и (2. 2) следует

$$(a_1^{(1)})^{-1}y^{(n)}_{\mu p+1}a_1^{(1)} = \begin{cases} y^{(n)}_{(\mu+1)p+1}, & \text{если}\quad \mu \neq rp-1 \\ y^{(n)}_{(\mu-p+1)p+1}, & \text{если}\quad \mu = rp-1. \end{cases}$$

Пусть сначала $k=rp-1$. В этом случае, используя соотношения (2. 7), имеем

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\nu=1}^{kp+1} (y_\nu^{(n)})^{-(-1)^{\nu-1} C_{kp}^{\nu-1}} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{kp+1}^{(n)} =$$

$$= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\nu=0}^{k} [y_{\nu p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{\nu-1} C_{kp}^{\nu-1}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} =$$

$$= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p+\mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{kp}^{(\lambda p+\mu)p}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)},$$

так как $C_{kp}^{hp+\eta} \equiv 0 \pmod p$ для всех $1 \leqq \eta < p$.

Однако непосредственным подсчётом можно показать, что

$$C_{(rp-1)p}^{(\lambda p+\mu)p} \equiv C_{rp-1}^{\lambda p+\mu} \equiv (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda \pmod p.$$

Следовательно

$$(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{(rp-1)p}^{(\lambda p+\mu)p} \equiv (-1)^{(\lambda p+\mu)p} \cdot (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda = (-1)^{\lambda p} C_{r-1}^\lambda \pmod p,$$

значит можно записать

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = (a_1^{(1)})^{-1} \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p+\mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{\lambda p} C_{r-1}^{\lambda}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)}.$$

Кроме того,

$$(a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p+\mu)p+1}^{(n)} \cdot a_1^{(1)} = \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p+\mu)p+1}^{(n)},$$

так как множители произведения под действием записанного внутреннего автоморфизма только перемещаются в циклическом порядке.

Отсюда уже следует, что

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = e, \quad \text{если} \quad k = rp-1.$$

Пусть теперь $k \neq rp-1$ и пусть $k=rp+r_1$, где $0 \leqq r \leqq p-1$.

Тогда

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\nu=0}^{kp+1} (y_\nu^{(n)})^{-(-1)^{\nu-1} C_{kp}^{\nu-1}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} =$$

$$= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \left\{ \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-2} [y_{(\lambda p+\mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{kp}^{(\lambda p+\mu)p}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{(\lambda p+p-1)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+p-1)p} C_{kp}^{(\lambda p+p-1)p}} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp+\mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp+\mu)p} C_{kp}^{(rp+\mu)p}} \right\} \cdot$$

$$\cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-2} [y_{(\lambda p+\mu+1)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{kp}^{(\lambda p+\mu)p}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{\lambda p^2+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+p-1)p} C_{kp}^{(\lambda p+p-1)p}} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp+\mu+1)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp+\mu)p} C_{kp}^{(rp+\mu)p}} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} =$$

$$= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y^{(n)}_{(\lambda p+\mu)p+1}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{kp}^{(\lambda p+\mu-1)p}} \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y^{(n)}_{\lambda p^2+1}]^{(-1)^{(\lambda p+p)p} C_{kp}^{(\lambda p+p-1)p}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{r_1+1} [y^{(n)}_{(rp+\mu)p+1}]^{(-1)^{(rp+\mu)p} C_{kp}^{(rp+\mu-1)p}} \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y^{(n)}_{(\lambda p+\mu)p+1}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{kp}^{(\lambda p+\mu)p}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y^{(n)}_{(rp+\mu)p+1}]^{(-1)^{(rp+\mu)p} C_{kp}^{(rp+\mu)p}} =$$

$$= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y^{(n)}_{(\lambda p+\mu)p+1}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p} [C_{kp}^{(\lambda p+\mu-1)p} + C_{kp}^{(\lambda p+\mu)p}]} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\lambda=0}^{r} [y^{(n)}_{\lambda p^2+1}]^{(-1)^{\lambda p^2} [C_{kp}^{\lambda p^2} - C_{kp}^{(\lambda p+p-1)p}]} \cdot \prod_{\mu=1}^{r_1} [y^{(n)}_{(rp+\mu)p+1}]^{(-1)^{(rp+\mu)p} [C_{kp}^{(rp+\mu-1)p} + C_{kp}^{(rp+\mu)p}]} \cdot$$

$$\cdot [y^{(n)}_{(rp+r_1+1)p+1}]^{(-1)^{(rp+r_1+1)p} C_{kp}^{(rp+r_1)p}}.$$

Однако, как уже отмечалось,

$$C_{kp}^{hp} \equiv C_k^h \pmod p, \quad C_{kp}^{\lambda p^2} \equiv C_{rp}^{\lambda} \pmod p, \quad C_{kp}^{(\lambda p+p-1)p} \equiv 0 \pmod p.$$

Кроме того, по известным свойствам биномиальных коэффициентов

$$C_k^{\lambda p+\mu-1} + C_k^{\lambda p+\mu} = C_{k+1}^{\lambda p+\mu}, \quad C_k^{rp+\mu-1} + C_k^{rp+\mu} = C_{k+1}^{rp+\mu}.$$

Следовательно, при $k \neq rp-1$ мы имеем

$$(a_1^{(1)}, a_{kp+1}^{(n)}) = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y^{(n)}_{(\lambda p+\mu)p+1}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{(k+1)p}^{(\lambda p+\mu)p}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\lambda=0}^{r} [y^{(n)}_{\lambda p^2+1}]^{(-1)^{\lambda p^2} C_{(k+1)p}^{\lambda p^2}} \cdot \prod_{\mu=1}^{r_1} [y^{(n)}_{(rp+\mu)p+1}]^{(-1)^{(rp+\mu)p} C_{(k+1)p}^{(rp+\mu)p}} \cdot$$

$$\cdot [y^{(n)}_{(rp+r_1+1)p+1}]^{(-1)^{(rp+r_1+1)p} C_{(k+)p}^{(rp+r_1+1)p}} = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y^{(n)}_{(\lambda p+\mu)p+1}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p} C_{(k+1)p}^{(\lambda p+\mu)p}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=0}^{r_1+1} [y^{(n)}_{(rp+\mu)p+1}]^{(-1)^{(rp+\mu)p} C_{(k+1)p}^{(rp+\mu)p}} = \alpha^{(n)}_{(k+1)p+1}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4. 3 легко получить следующую *формулу*

$$\alpha^{(n)}_{\nu p^2+\mu p+1} = \alpha^{(n)}_{\nu p^2+1}\left(1-a_1^{(1)}\right)^{\mu} \tag{4. 4}$$

для всех $0 \leqq \nu < p^{n-2}$; $0 \leqq \mu < p$.

Действительно, формула верна для любого фиксированного ν и $\mu=1$ (по теореме 4. 3). Предположим, что она верна для того же ν и всех $r<\mu$, то есть

$$\alpha^{(n)}_{\nu p^2+rp+1} = \alpha^{(n)}_{\nu p^2+1}\left(1-a_1^{(1)}\right)^{r}.$$

Тогда, на основании теоремы 4. 3,

$$\alpha^{(n)}_{vp^2+(r+1)p+1} = \alpha^{(n)}_{vp^2+rp+1}(1-a_1^{(1)}).$$

Отсюда, пользуясь предположением индукции, получим

$$\alpha^{(n)}_{vp^2+(r+1)p+1} = [\alpha^{(n)}_{vp^2+1}(1-a_1^{(1)})^r]\cdot(1-a_1^{(1)}) = \alpha^{(n)}_{vp^2+1}(1-a_1^{(1)})^{r+1}.$$

Лемма 4. 1. $(a_i^{(1)}, \alpha^{(n)}_{kp+1}) = e \quad (1 < i \leqq p,\ 0 \leqq k < p^{n-1})$.

Лемма очевидна, так как

$$\alpha^{(n)}_{kp+1} = \prod_{\lambda=0}^{k} [y^{(n)}_{\lambda p+1}]^{(-1)^{\lambda p} C^{\lambda p}_{kp}},$$

но оператор $a_i^{(1)}$ при $i > 1$ оставляет на месте все элементы вида $y^{(n)}_{\lambda p+1}$.

Лемма 4. 2.

$$(a_1^{(1)}, \alpha^{(n)}_{kp+r}) = \begin{cases} e & \textit{если} \quad k = mp-1 \\ \alpha_{(k+1)p+1}, & \textit{если} \quad k \neq mp-1 \end{cases}$$

для всех $0 \leqq k < p^{n-1}$, $1 < r < p$.

Доказательство.

$$\alpha^{(n)}_{kp+r}(1-a_1^{(1)}) = \alpha^{(n)}_{kp+1}(1-x)^{r-1}\cdot(1-a_1^{(1)}) =$$

$$= \alpha^{(n)}_{kp+1}(1+a_1^{(1)}) + \alpha^{(n)}_{kp+1}\cdot\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j C^j_{r-1} x^j (1-a_1^{(1)}).$$

Однако

$$x^j a_1^{(1)} = a^{(1)}_{p-(j-1)}\cdot x^j\cdot(a^{(n-1)}_{1\ldots1})^{-1}\cdot\ldots\cdot(a^{(2)}_{11})^{-1}\cdot a^{(2)}_{12}\cdot\ldots\cdot a^{(n-1)}_{121\ldots1} =$$

$$= a^{(1)}_{p-(j-1)}\cdot a^{(2)}_{p-(j-1)1}\cdot\ldots\cdot a^{(n-1)}_{p-(j-1)1\ldots1}\cdot(a^{(n-1)}_{p-(j-1)p\ldots p})^{-1}\cdot x^j\cdot$$

$$\cdot(a^{(n-1)}_{1\ldots1})^{-1}\ldots(a^{(2)}_{11})^{-1} = \ldots = a^{(1)}_{p-(j-1)}\cdot a^{(2)}_{p-(j-1)1}\cdot\ldots\cdot a^{(n-1)}_{p-(j-1)1\ldots1}\cdot$$

$$\cdot(a^{(n-1)}_{p-(j-1)p\ldots p})^{-1}\cdot\ldots\cdot(a^{(2)}_{p-(j-1)p})^{-1}\cdot x^j = a_v x^j,$$

где элемент a_v является произведением элементов, первый нижний индекс которых равен $p-(j-1)$, так как $j \leqq r-1 < p$. Поэтому оператор a_v оставляет на месте элемент

$$\alpha^{(n)}_{kp+1} = \prod_{\lambda=0}^{k}[y^{(n)}_{\lambda p+1}]^{(-1)^{\lambda p} C^{\lambda p}_{kp}}.$$

Следовательно,

$$\alpha^{(n)}_{kp+1}\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j C^j_{r-1} x^j(1-a_1^{(1)}) = \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j C^j_{r-1}\alpha^{(n)}_{kp+1}(1-a_v)x^j = e.$$

Поэтому

$$\alpha^{(n)}_{kp+r}(1-a_1^{(1)}) = \alpha^{(n)}_{kp+1}(1-a_1^{(1)}) = \begin{cases} e, & \text{если} \quad k = mp-1 \\ \alpha_{(k+1)p+1}, & \text{если} \quad k \neq mp-1 \end{cases}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. 3. $(a_i^{(1)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p+1}^{(n)}$, $(1 < i \leqq p, 0 \leqq k < p^{n-1}, 1 < r < p)$.

Доказательство.

$$\alpha_{kp+r}^{(n)}(1-a_i^{(1)}) = \alpha_{kp+1}^{(n)}(1-x)^{r-1}(1-a_i^{(1)}) =$$
$$= \alpha_{kp+1}^{(n)}(1-a_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j C_{r-1}^j \alpha_{kp+1}^{(n)} x^j (1-a_i^{(1)}).$$

Первое слагаемое равно единице (Лемма 4. 1). Для второго слагаемого

$$x^j(1-a_i^{(1)}) = (1-a_{i-j}^{(1)}a')x^j.$$

Очевидно, для каждого фиксированного индекса i найдётся точно один номер j, при котором $i-j \equiv 1 \pmod p$. Остальные члены суммы обращаются в единицу. Действительно, для членов с индексом $j < i-1$ выполняется $x^j a_i^{(1)} = a_{i-j}^{(1)} x^j$. Для $j = i-1$ имеем $x^j a_i^{(1)} = a_1^{(1)} x^j$, то есть для $j = i-1$ элемент $a' = e$. Если же $i \leqq j$, то $x^j a_i^{(1)} = a_{p-(j-i)}^{(1)} a'$, где элемент a' является произведением элементов, первый индекс которых равен $p-(j-i-1)$, а операторы с такими нижними индексами оставляют на месте элемент $\alpha_{kp+1}^{(n)}$. Поэтому, (по (4. 2))

$$\alpha_{kp+r}^{(n)}(1-a_i^{(1)}) = C_{r-1}^{i-1}(-1)^{i-1} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)}(1-a_1^{(1)})x^{i-1} \in A_{(k+1)p+1}^{(n)}.$$

Лемма доказана.

Из лемм 4. 2 и 4. 3 сразу вытекает

Следствие 4. 2. $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p+1}^{(n)}$, $(1 < i \leqq p, 0 \leqq k < p^{n-1}, 1 \leqq r < p)$.

Действительно, из соотношений (2. 7) и определений (2. 1), (2. 2) следует, что элемент $\alpha_i^{(1)}$ является произведением некоторых степеней элементов $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_i^{(1)}$. Так как коммутаторы этих элементов с элементом $\alpha_{kp+r}^{(n)}$ лежит в подгруппе $A_{(k+1)p+1}^{(n)}$ (по леммам 4. 2 и 4. 3), значит и следствие 4. 1 верно.

Следствие 4. 3. *Главная буква группы $A^{(1)}$ переводит любой элемент периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$ в главную букву следующего периода 1-го порядка, за исключением элементов последнего периода 1-го порядка в периодах 2-го порядка, которых он переводит в единицу.*

Элементы, находящиеся выше главной буквы группы $A^{(1)}$, переводят все элементы периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$ в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже главной буквы следующего периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$.

Теорема 4. 4. $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) \in A_{kp+2}^{(n)}$, $(1 < i \leqq p, 0 < k < p^{n-1})$.

Доказательство. Для любого $1 < i \leqq p$ имеем

$$(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) = ((a^{(0)}, \alpha_{i-1}^{(1)}), \alpha_{kp}^{(n)}) = ((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1} \cdot a^{(0)} \cdot a_{i-1}^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) =$$
$$= ((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}) \cdot (a^{(0)} \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) \cdot (((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(n)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}), a^{(0)} \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}),$$

где последний множитель уже принадлежит группе $A_{kp+2}^{(n)}$.

Рассмотрим остальные множители:

$$\left((a^{(0)})^{-1}\cdot(\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1},\alpha_{kp}^{(n)}\right)=\left((a^{(0)})^{-1},\alpha_{kp}^{(n)}\right)\cdot\left((\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1},\alpha_{kp}^{(n)}\right)\cdot\left(\left((a^{(0)})^{-1},\alpha_{kp}^{(n)}\right),(\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}\right),$$

где последний множитель лежит в $A_{kp+2}^{(n)}$. Так как $(a^{(0)},\alpha_{kp}^{(n)})=e$ (по теореме 4. 1), то также $\left((a^{(0)})^{-1},\alpha_{kp}^{(n)}\right)=e$. Однако

$$\left((\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1},\alpha_{kp}^{(n)}\right)=\alpha_{i-1}^{(1)}\cdot(\alpha_{kp}^{(n)})^{-1}\cdot(\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}\cdot\alpha_{kp}^{(n)}=\alpha_{i-1}^{(1)}(\alpha_{kp}^{(n)},\alpha_{i-1}^{(1)})\cdot(\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}=$$
$$=(\alpha_{kp}^{(n)},\alpha_{i-1}^{(1)})\cdot\left((\alpha_{kp}^{(n)},\alpha_{i-1}^{(1)}),(\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}\right),$$

где последний множитель лежит в $A_{kp+2}^{(n)}$. Для второго множителя имеем

$$(a^{(0)}\cdot\alpha_{i-1}^{(1)},\alpha_{kp}^{(n)})=(a^{(0)},\alpha_{kp}^{(n)})\cdot(\alpha_{i-1}^{(1)},\alpha_{kp}^{(n)})\cdot\left((a^{(0)},\alpha_{kp}^{(n)}),\alpha_{i-1}^{(1)}\right),$$

где

$$(a^{(0)},\alpha_{kp}^{(n)})=e,\quad \left((a^{(0)},\alpha_{kp}^{(n)}),\alpha_{i-1}^{(1)}\right)\in A_{kp+2}^{(n)}.$$

Следовательно

$$(\alpha_i^{(1)},\alpha_{kp}^{(n)})=a_{kp+2}^{(n)}(\alpha_{kp}^{(n)},\alpha_{i-1}^{(1)})\cdot(\alpha_{i-1}^{(1)},\alpha_{kp}^{(n)})=a_{kp+2}^{(n)}$$

где $a_{kp+2}^{(n)}\in A_{kp+2}^{(n)}$. Теорема доказаза.

Следствие 4. 4. *Элементы, находящиеся выше главной буквы группы $A^{(1)}$, переводят последний элемент любого периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$ в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже второго элемента следующего периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$.*

Рассмотрим теперь коммутаторы базисных элементов группы $A^{(m)}$ для произвольного $m<n$ с элементами группы $A^{(n)}$.

Теорема 4. 5. $(\alpha_1^{(m)},\alpha_1^{(n)})=\alpha_{p^m+1}^{(n)}$ *для всех* $1\leqq m<n$.

Доказательство. Как известно (формула (4. 1)),

$$\alpha_{p^m+1}^{(n)}=\alpha_1^{(n)}(1-x)^{p^m}=\alpha_1^{(n)}(1-x^{p^m}).$$

Но

$$\begin{aligned}x^{p^m}=\;&a_{pp\ldots p}^{(m)}\cdot a_{pp\ldots p1}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{pp\ldots p1\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\cdot a_{p-1p\ldots p}^{(m)}\cdot a_{p-1p\ldots p1}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{p-1p\ldots p1\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\vdots\\ &\cdot a_{1p\ldots p}^{(m)}\cdot a_{1p\ldots p1}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{1p\ldots p1\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\cdot a_{pp-1p\ldots p}^{(m)}\cdot a_{pp-1p\ldots p1}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{pp-1p\ldots p1\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\vdots\\ &\cdot a_{1p-1p\ldots p}^{(m)}\cdot a_{1p-1p\ldots p1}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{1p-1p\ldots p1\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\vdots\\ &\cdot a_{p1\ldots1}^{(m)}\cdot a_{p1\ldots11}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{p1\ldots11\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\cdot a_{p-11\ldots1}^{(m)}\cdot a_{p-11\ldots11}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{p-11\ldots11\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\vdots\\ &\cdot a_{21\ldots1}^{(m)}\cdot a_{21\ldots11}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{21\ldots11\ldots1}^{(n-1)}\cdot\\ &\cdot a_{11\ldots1}^{(m)}\cdot a_{11\ldots11}^{(m+1)}\cdot\ldots\cdot a_{11\ldots11\ldots1}^{(n-1)}\cdot\end{aligned}$$

В этом произведении только операторы $a_{1\ldots 1}^{(m)}, \ldots, a_{1\ldots 1}^{(n-1)}$ двигают элемент $\alpha_1^{(n)}$, а все операторы $a_{1\ldots 1}^{(m+1)}, \ldots, a_{1\ldots 1}^{(n-1)}$ уже оставляют на месте элемент $\alpha_1^{(n)} a_{1\ldots 1}^{(m)}$. Следовательно, $\alpha_{p^m+1}^{(n)} = \alpha_1^{(n)}(1 - a_{1\ldots 1}^{(m)})$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. 6.

$$(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = \begin{cases} e, & \text{если} \quad k = rp-1 \\ \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если} \quad k \neq rp-1, \end{cases}$$

$$(0 \leqq k < p^{n-m}, \quad 0 < m < n).$$

Доказательство. Из определений (2. 1) и (2. 2) следует,

$$(a_{1\ldots 1}^{(m)})^{-1} \cdot y_{\mu p^m+1}^{(n)} \cdot a_{1\ldots 1}^{(m)} = \begin{cases} y_{(\mu+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если} \quad \mu \neq rp-1 \\ y_{(\mu-p+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если} \quad \mu = rp-1. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь соотношениями (2. 7), мы имеем

$$(a_{1\ldots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = (a_{1\ldots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\nu=1}^{kp^m+1} (y_\nu^{(n)})^{-(-1)^{\nu-1} C_{kp^m}^{\nu-1}} \right\} \cdot a_{1\ldots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+1}^{(n)} =$$

$$= (a_{1\ldots 1}^{(m)})^{-1} \cdot \left\{ \prod_{\nu=0}^{k} (y_{\nu p^m+1}^{(n)})^{-(-1)^{\nu p^m} C_{kp^m}^{\nu p^m}} \right\} \cdot a_{1\ldots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+1}^{(n)}.$$

Пусть $k = rp-1$. Тогда

$$(a_{1\ldots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = (a_{1\ldots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m} C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}} \right\} \cdot a_{1\ldots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+1}^{(n)}.$$

Заметим, что

$$(a_{1\ldots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)} \right\} \cdot a_{1\ldots 1}^{(m)} = \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)},$$

так как под действием внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $a_{1\ldots 1}^{(m)}$, множители произведения только перемещаются в циклическом порядке. Осталось заметить, что

$$C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m} \equiv (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda \pmod p,$$

значит

$$(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m} C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m} \equiv (-1)^{\lambda p+\mu} \cdot (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda = (-1)^{\lambda p} C_{r-1}^\lambda \pmod p,$$

то есть в произведении

$$\prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m} C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}}$$

все множители имеют равные показатели степени. Мы получим, что $(a_{1\ldots 1}^{(m)})^{-1} \alpha_{kp^m+1}^{(n)} a_{1\ldots 1}^{(m)} = \alpha_{kp^m+1}^{(n)}$, если $k = rp-1$, то есть $(a_{1\ldots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = e$.

Пусть теперь $k=rp+r_1$, где $0\leqq r_1<p-1$. Тогда

$$(a_{1\ldots1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = (a_{1\ldots1}^{(m)})^{-1}\Bigg\{\prod_{\lambda=0}^{r-1}\prod_{\mu=0}^{p-2}[y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\lambda=0}^{r-1}[y_{(\lambda p+p-1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+p-1)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+p-1)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\mu=0}^{r_1}[y_{(rp+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(rp+\mu)p^m}}\Bigg\}\cdot a_{1\ldots1}^{(m)}\cdot\alpha_{kp^m+1}^{(n)}.$$

Учитывая (4. 3), получим

$$(a_{1\ldots1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = \prod_{\lambda=0}^{r-1}\prod_{\mu=0}^{p-2}[y_{(\lambda p+\mu+1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\lambda=0}^{r-1}[y_{\lambda p^{m+1}+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p+p-1)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+p-1)p^m}}\cdot\prod_{\mu=0}^{r_1}[y_{(rp+\mu+1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(rp+\mu)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\alpha_{kp^m+1}^{(n)} = \prod_{\lambda=0}^{r-1}\prod_{\mu=1}^{p-1}[y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu-1)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\lambda=0}^{r-1}[y_{\lambda p^{m+1}+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p+p)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+p-1)p^m}}\cdot\prod_{\mu=1}^{r_1+1}[y_{(rp+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp+\mu)p^m}C_{kp^m}^{r(r_p+\mu-1)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\lambda=0}^{r-1}\prod_{\mu=0}^{p-1}[y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}}\cdot\prod_{\mu=0}^{r_1}[y_{(rp+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp+\mu)p^m}C_{kp^m}^{(rp+\mu)p^m}}.$$

Произведём умножение элементов с одинаковыми индексами:

$$(a_{1\ldots1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = \prod_{\lambda=0}^{r-1}\prod_{\mu=1}^{p-1}[y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m}[C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu-1)p^m}+C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}]}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\lambda=0}^{r-1}[y_{\lambda p^{m+1}+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p+p)p^m}[C_{kp^m}^{(\lambda p+p-1)p^m}-C_{kp^m}^{\lambda p^{m+1}}]}\cdot[y_{rp^{m+1}+1}^{(n)}]^{(-1)^{rp^{m+1}}C_{kp^m}^{rp^{m+1}}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\mu=1}^{r_1}[y_{(rp+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp+\mu)p^m}[C_{kp^m}^{(rp+\mu)p^m}+C_{kp^m}^{(rp+\mu-1)p^m}]}\cdot[y_{(rp+r_1+1)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp+r_1+1)p^m}}.$$

Однако

$$C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu-1)p^m}+C_{kp^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}\equiv C_{(k+1)p^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}\pmod p,$$

$$C_{kp^m}^{(\lambda p+p-1)p^m}\equiv 0\pmod p,\quad C_{kp^m}^{\lambda p^{m+1}}\equiv C_{(k+1)p^m}^{\lambda p^{m+1}}\pmod p,$$

$$C_{kp^m}^{(rp+\mu)p^m}+C_{kp^m}^{(rp+\mu-1)p^m}\equiv C_{(k+1)p^m}^{(rp+\mu)p^m}\pmod p,$$

поэтому

$$(a_{1\ldots1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = \prod_{\lambda=0}^{r-1}\prod_{\mu=1}^{p-1}[y_{(\lambda p+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p+\mu)p^m}C_{(k+1)p^m}^{(\lambda p+\mu)p^m}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\lambda=0}^{r-1}[y_{\lambda p^{m+1}+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p^{m+1}}C_{(k+1)p^m}^{\lambda p^{m+1}}}\cdot\prod_{\mu=0}^{r_1+1}[y_{(rp+\mu)p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp+\mu)p^m}C_{(k+1)p^m}^{(rp+\mu)p^m}} = \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(n)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4. 5. *Главная буква группы $A^{(m)}$ переводит главную букву любого периода m-го порядка в главную букву следующего периода m-го порядка группы $A^{(n)}$, за исключением главной буквы последнего периода m-го порядка в периоде $m+1$-го порядка, которую она переводит в единицу.*

Лемма 4. 4 $(a^{(i)}_{1\dots 1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) = e$ *для всех* $0 \leqq i < m$, $0 < m < n$, $1 \leqq k \leqq p^{n-m}$.

Действительно, для произвольного фиксированного i

$$(a^{(i)}_{1\dots 1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) = (a^{(i)}_{1\dots 1})^{-1} \left\{ \prod_{\mu=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{p^m} [y^{(n)}_{\mu p^m+\nu}]^{(-1)^{\mu p^m+\nu-1} C^{\mu p^m+\nu-1}_{kp^m-1}} \right\} \cdot a^{(i)}_{1\dots 1} \cdot \alpha^{(n)}_{kp^m}.$$

Однако для фиксированного μ выполняется

$$(-1)^{\mu p^m+\nu-1} C^{\mu p^m+\nu-1}_{kp^m-1} \equiv (-1)^{\mu p^m+\nu-1} \cdot (-1)^{\nu-1} C^{\mu}_{k-1} = (-1)^{\mu} C^{\mu}_{k-1} \pmod p,$$

то есть показатели степеней элементов произведения

$$\prod_{\nu=1}^{p^m} [y^{(n)}_{\mu p^m+\nu}]^{(-1)^{\mu p^m+\nu-1} C^{\mu p^m+\nu-1}_{kp^m-1}}$$

равны. Кроме того это произведение инвариантно относительно внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $a^{(i)}_{1\dots 1}$, так как произведение можно разбить на такие группы из p^i элементов, элементы которых под действием упомянутого внутреннего автоморфизма переставляются в циклическом порядке. Лемма доказана.

Следствие 4. 6. $(\alpha^{(m)}_i, \alpha^{(n)}_{kp^m}) \in A^{(n)}_{kp^m+2}$ *для всех* $1 < i \leqq p^m$, $1 \leqq m < p^{n-m}$.

Доказательство следует из леммы 4. 4. Действительно,

$$(\alpha^{(m)}_i, \alpha^{(n)}_{kp^m}) = ((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1} \cdot x^{(m)} \cdot \alpha^{(m)}_{i-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) = ((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) \cdot$$
$$\cdot (x^{(m)} \cdot \alpha^{(m)}_{i-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) \cdot (((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}), x^{(m)} \cdot \alpha^{(m)}_{i-1}).$$

Последний множитель принадлежит подгруппе $A^{(n)}_{kp^m+2}$. Остаётся рассмотреть первые множители.

$$((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) = ((x^{(m)})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) \cdot ((\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) \cdot$$
$$\cdot (((x^{(m)})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}), (\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1}).$$

Последний множитель лежит в $A^{(n)}_{kp^m+2}$. Первый множитель равен единице по лемме 4. 4, так как

$$x^{(m)} = a^{(0)} \cdot a^{(1)}_1 \cdot a^{(2)}_{11} \cdot \ldots \cdot a^{(m-1)}_{11\dots 1},$$

а элемент $\alpha^{(n)}_{kp^m}$ остаётся на месте под действием всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами

$$a^{(0)}, a^{(1)}_1, a^{(2)}_{11}, \ldots, a^{(m-1)}_{11\dots 1}.$$

Но

$$((\alpha^{(m)}_{i-1})^{-1}, \alpha^{(n)}_{kp^m}) = (\alpha^{(n)}_{kp^m}, \alpha^{(m)}_{i-1}) \cdot a_{kp^m+2},$$

где $a_{kp^m+2}\in A^{(n)}_{kp^m+2}$. Точно так же подсчитаем коммутатор

$$(x^{(m)}\cdot\alpha^{(m)}_{i-1},\,\alpha^{(n)}_{kp^m})=(x^{(m)},\,\alpha^{(n)}_{kp^m})\cdot(\alpha^{(m)}_{i-1},\,\alpha^{(n)}_{kp^m})\cdot((x^{(m)},\,\alpha^{(n)}_{kp^m}),\,\alpha^{(m)}_{i-1})=$$
$$=(\alpha^{(m)}_{i-1},\,\alpha^{(n)}_{kp^m})\cdot a^{*}_{kp^m+2},$$

и получим

$$(\alpha^{(m)}_{i},\,\alpha^{(n)}_{kp^m})=a'_{kp^m+2}(\alpha^{(n)}_{kp^m},\,\alpha^{(m)}_{i-1})\cdot(\alpha^{(m)}_{i-1},\,\alpha^{(n)}_{kp^m})=a'_{kp^m+2}\in A^{(n)}_{kp^m+2}.$$

Следствие доказано.

Следствие 4. 7. *Элементы, находящиеся выше главной буквы группы $A^{(m)}$, переводят последний элемент любого периода m-го порядка в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже второго элемента следующего периода m-го порядка группы $A^{(n)}$.*

Лемма 4. 5. $(a^{(m)}_{\lambda_1\ldots\lambda_m},\alpha^{(n)}_{kp^m+1})=e$ *для всех* $0\leqq k<p^{n-m}$, *если некоторое* $\lambda_i\neq 1$. Утверждение очевидно, так как (по соотношениям (2. 7)) элемент $\alpha^{(n)}_{kp^m+1}$ распадается в произведение некоторых степеней элементов, первые m индексов которых равны единице. Но такие элементы остаются на месте под действием внутреннего автоморфизма, порожденного любым элементом вида $a^{(m)}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}$ где $\lambda_i\neq 1$.

Из теоремы 4. 6 и леммы 4. 5 непосредственно получается

Теорема 4. 7.

$$(\alpha^{(m)}_{i},\,\alpha^{(n)}_{kp^m+1})=\begin{cases}\alpha^{(n)}_{(k+1)p^m+1}, & \textit{если}\quad k\neq rp-1\\ e, & \textit{если}\quad k=rp-1,\end{cases}$$

$i=1,2,\ldots,p^m;\ 0\leqq k<p^{n-m})$.

Лемма 4. 6.

$$(a^{(m)}_{1\ldots1},\,\alpha^{(n)}_{kp^m+r})=\begin{cases}\alpha^{(n)}_{(k+1)p^m+1}, & \textit{если}\quad k\neq \mu p-1\\ e, & \textit{если}\quad k=\mu p-1,\end{cases}$$

$0\leqq k<p^{n-m}$, $1\leqq r<p^m$.

Доказательство.

$$(a^{(m)}_{1\ldots1},\,\alpha^{(n)}_{kp^m+r})=(a^{(m)}_{1\ldots1})^{-1}\cdot\left\{\prod_{\lambda=0}^{k-1}\prod_{\mu=0}^{p^m}[y^{(n)}_{\lambda p^m+\mu}]^{-(-1)^{\lambda p^m+\mu-1}C^{\lambda p^m+\mu-1}_{kp^m+r-1}}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\prod_{\mu=1}^{r}[y^{(n)}_{kp^m+\mu}]^{-(-1)^{kp^m+\mu-1}C^{kp^m+\mu-1}_{kp^m+r-1}}\right\}\cdot a^{(m)}_{1\ldots1}\cdot\alpha^{(n)}_{kp^m+r}=$$
$$=(a^{(m)}_{1\ldots1})^{-1}\prod_{\lambda=0}^{k}[y^{(n)}_{\lambda p^m+1}]^{-(-1)^{\lambda p^m}C^{\lambda p^m}_{kp^m+r-1}}\cdot a^{(m)}_{1\ldots1}\cdot\prod_{\lambda=0}^{k}[y^{(n)}_{\lambda p^m+1}]^{(-1)^{\lambda p^m}C^{\lambda p^m}_{kp^m+r-1}},$$

так как внутренний автоморфизм, порождённый элементом $a^{(m)}_{1\ldots1}$ оставляет на месте все элементы вида $y^{(n)}_{\lambda p^m+\mu}$, где $\mu\neq 1$.
Однако

$$C^{\lambda p^m}_{kp^m+r-1}\equiv C^{\lambda}_{k}\equiv C^{\lambda p^m}_{kp^m}\pmod p.$$

Поэтому

$$(a^{(m)}_{1\ldots 1}, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) = (a^{(m)}_{1\ldots 1})^{-1} \prod_{\lambda=0}^{k} [y^{(n)}_{\lambda p^m+1}]^{-(-1)^{\lambda p^m} C^{\lambda p^m}_{kp^m}} \cdot a^{(m)}_{1\ldots 1} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\lambda=0}^{k} [y^{(n)}_{\lambda p^m+1}]^{(-1)^{\lambda p^m} C^{\lambda p^m}_{kp^m}} = (a^{(m)}_{1\ldots 1}, \alpha^{(n)}_{kp^m+1}).$$

Лемма 4. 7. $(a^{(m)}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) \in A^{(n)}_{(k+1)p^m+1}$, *где* $1 \leqq r \leqq p^m$, $0 \leqq k < p^{n-m}$, $m < n$ $\lambda_i = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство. По определению (2. 2), $y^{(m)}_1 = a^{(m)}_{1\ldots 1}$, и элементы $y^{(m)}_v =$, $= (x^{(m)})^{-1} y^{(m)}_{y-1} x^{(m)}$ пробегают все образующие элементы $a^{(m)}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}$ группы $A^{(m)}$. Поэтому теорему можем перефразировать так

$$(y^{(m)}_v, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) \in A^{(n)}_{(k+1)p^m+1},$$

где $1 \leqq r < p^m$, $0 \leqq k < p^{n-m}$, $m < n$, $v = 1, 2, \ldots, p$. Лемма верна для $v = 1$ (по лемме 4. 6). Предположим, что

$$(y^{(m)}_\mu, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) \in A^{(n)}_{(k+1)p^m+1}$$

для всех $1 \leqq \mu < p^m$, $1 \leqq r < p^m$, $0 \leqq k < p^{n-m}$. Тогда

$$(y^{(m)}_{\mu+1}, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) = ((x^{(m)})^{-1} \cdot y^{(m)}_\mu \cdot x^{(m)}, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) =$$
$$= (x^{(m)})^{-1} \cdot (y^{(m)}_\mu, x^{(m)} \cdot \alpha^{(n)}_{kp^m+r} \cdot (x^{(m)})^{-1}) \cdot x^{(m)}.$$

Однако, как и все члены центрального ряда группы $A^{(n)}$, так же и группа $A^{(n)}_{kp^m+r}$ инвариантна относительно внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $x^{(m)}$, значит и относительно инверсного к нему автоморфизма. Следовательно элемент $x^{(m)} \alpha^{(n)}_{kp^m+r} (x^{(m)})^{-1} \in A^{(n)}_{kp^m+r}$, значит его можно записать в виде произведения некоторых степеней элементов $\alpha^{(n)}_{p^n}, \alpha^{(n)}_{p^n-1}, \ldots, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}$. По предположению индукции коммутатор каждого из этих элементов с элементом $y^{(m)}_\mu$ лежит в $A^{(n)}_{(k+1)p^m+1}$, следовательно и коммутатор $(y^{(m)}_\mu, x^{(m)} \cdot \alpha^{(n)}_{kp^m+r} \cdot (x^{(m)})^{-1})$ принадлежит подгруппе $A^{(n)}_{(k+1)p^m+1}$. Из инвариантности подгруппы $A^{(n)}_{(k+1)p^m+1}$ относительно внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $x^{(m)}$, лемма уже следует.

Теорема 4. 8. $(\alpha^{(m)}_i, \alpha^{(n)}_{kp^m+r}) \in A^{(n)}_{(k+1)p^m+1}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p^m$, $0 \leqq k < p^{n-m}$, $m < n$, $1 \leqq r \leqq p^m$.

Теорема непосредственно вытекает из лемм 4. 6 и 4. 7.

Следствие 4. 8. *Любой элемент группы $A^{(m)}$ переводит все элементы любого периода m-го порядка в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже главной буквы следующего периода m-го порядка группы $A^{(n)}$*

Заметим теперь, что $S_{n+1} \cong A^{(n)} \cdot S_n$, и вообще $S_{r+1} \cong A^{(r)} \cdot S_r$, где S_r — сплетение циклических групп простого порядка p. Следовательно, все доказанные нами результаты для группы $A^{(n)}$ справедливы также для произвольной группы $A^{(r)}$. Имеют место следующие факты:

Теорема 4. 9.

$$(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(r)}, & \text{если} \quad k \neq \nu p-1 \\ e, & \text{если} \quad k = \nu p-1 \end{cases}$$

для всех $0 < r \leqq n$, $0 \leqq k < p^{r-m}$, $1 < r \leqq n$, $1 \leqq \mu \leqq p^m$.

Теорема 4. 10. $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(r)}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p^m$, $m < r \leqq n$, $0 \leqq k < p^{r-m}$, $1 \leqq \mu < p^m$.

Теорема 4. 11. $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(r)}) \in A_{kp^m+2}^{(r)}$ *для всех* $1 \leqq i \leqq p^m, m < r \leqq n, 0 < k \leqq p^{r-m}$.

Из этих теорем сразу получается

Следствие 4. 9. $(a^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(r)}$ *для всех* $m < r \leqq n$, $0 \leqq k < p^{r-m}$, $1 \leqq \mu \leqq p^m$, $a^{(m)} \in A^{(m)}$.

Следствие 4. 10. $(a^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(r)}) \in A_{kp^m+2}^{(r)}$ *для всех* $m < r \leqq n, 0 < k < p^{r-m}, a^{(m)} \in A^{(m)}$.

В итоге

Следствие 4. 11. *Все элементы группы $A^{(m)}$ переводят любой базисный элемент произвольного периода m-го порядка группы в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже главной буквы следующего периода m-го порядка группы $A^{(r)}$.*

Следствие 4. 12. *Все элементы группы $A^{(m)}$ переводят последний базисный элемент любого периода m-го порядка группы $A^{(r)}$ в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже второго базисного элемента следующего периода m-го порядка группы $A^{(r)}$.*

Литература

[1] L. Kalujnine, Sur les p-groupes de Sylow du groupe symetrique de degré m, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **221** (1945), 222—224.

[2] L. Kalujnine, La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis, *Ann. Sci. École Norm. Sup.,* (3) **65** (1948) 239—276.

[3] A. I. Weir, The Sylow subgroups of the symmetric group, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **6** (1955) 534—541.

[4] К. Бузаши. Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы S_3 симметрической группы Sp^3, Publ. Math. Debreben, *14* (1967) 285—310.

(Постипило 10. VI. 1967.)