Über den Grenzwert von Operatorenfolgen

Von ERNŐ GESZTELYI (Debrecen)

J. MIKUSIŃSKI hat zwei Typen von Konvergenz für Folgen von Operatoren eingeführt. Eine Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ von Operatoren konvergiert gegen x im Sinne der ersten Definition, wenn es eine in $0 \leqq t < \infty$ stetige Funktion $p = p(t)$ (d. h. $p \in \mathscr{C}$) gibt, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$px_n \in \mathscr{C} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad px \in \mathscr{C},$$

$$px_n \rightrightarrows px \quad \text{in} \quad 0 \leqq t < \infty$$

d.h. die Folge der Funktionen px_n konvergiert in $0 \leqq t < \infty$ fastgleichmäßig gegen px. ([1]).

Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen x im Sinne der zweiten Definition, wenn es eine Folge $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ von stetigen Funktionen aus der Klasse $\mathscr{C}$ gibt, so daß die Eigenschaften

(A) $$p_n(t) \rightrightarrows p(t) \not\equiv 0 \quad \text{in} \quad [0, \infty), \ (p \in \mathscr{C})$$

(B) $$p_n x_n \in \mathscr{C} \text{ für } \quad n = 1, 2, \ldots, \ px \in \mathscr{C},$$

(C) $$p_n x_n \rightrightarrows px$$

gelten. ([2]).

Die Konvergenz vom ersten Typus (Konvergenz I) geht aus der Konvergenz vom zweiten Typus (Konvergenz II) hervor, wenn man speziell $p_n = p$ wählen kann. Es ist bekannt, daß die Konvergenz II allgemeiner als die Konvergenz I ist. ([2]).

Eine Nullfolge (d. h. wenn $x_n \to 0$) ist dadurch charakterisiert (nach der zweiten Definition), daß sie eine nicht gegen Null strebende Folge $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ von Funktionen durch Multiplikation in eine Nullfolge $p_1 x_1, p_2 x_2, \ldots$ von Funktionen verwandelt.

Wir werden is dieser Arbeit die Konvergenz allgemeiner definieren. Statt der Konvergenz von $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ werden schwächere Eigenschaften, die „Kompaktheit" und die „Nullfolgenfreiheit" vorausgesetzt. Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen wird kompakt genannt, falls jede Teilfolge von $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine fastgleichmäßig konvergente Teilfolge hat. Ist keine Teilfolge von $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, so heißt sie nullfolgenfrei.

Eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Operatoren wird dann eine Nullfolge genannt, wenn es eine kompakte und nullfolgenfreie Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen gibt, so das $\{p_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge von Funktionen ist. Über eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Operatoren kann man also genau dann beweisen, daß sie eine Nullfolge ist, wenn es zu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

eine „beweisende" Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit den obigen Eigenschaften gibt. Deshalb nennen Wir die Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine „verifizierende" Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Im § 1. geben wir die Definition der Konvergenz und werden ihre wichtigsten Eigenschaften beweisen.

Eine Anwendung des eingeführten Konvergenzbegriffs findet sich in § 2. Hier beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften der Transformationen U_k. ([3] siehe auch [1]).

Wir haben in [4] mit Hilfe der Transformationen U_k die Laplace-Transformation verallgemeinert. Den Ausgangspunkt zur Verallgemeinerung lieferte der folgende Satz ([4] s. 196.):

Konvergiert das Laplace-Integral

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

für eine komplexe Zahl p, so konvergiert die Folge der Funktionen

$$U_n T^{-p}(f) = \{ne^{-pnt}f(nt)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

im Sinne der Konvergenz I und es gilt

$$(\ast) \qquad \lim_{n\to\infty} U_n T^{-p}(f) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Dabei ist unter dem Integral auf der rechten Seite ein uneigentliches Riemann-Integral zu verstehen.

Wir haben diesen Satz in [5] (bei $p=0$) auch für ein Lebesgue-Integral bewiesen, und wir haben das Integral eines Operators y durch den Grenzwert

$$(\ast\,\ast) \qquad \lim_{n\to\infty} U_n(y)$$

definiert.

Es ist bekannt, daß die Erscheinung der „Überkonvergenz" bei der Definition der klassischen Laplace-Transformation eintreten kann (s. [6]). D. h. die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\omega_n} e^{-pt}f(t)\,dt \qquad (\omega_n \to \infty)$$

hängt allgemein von der Wahl der Zahlenfolge $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ ab. ([7]).

Jetzt entseht die Frage, ob eine ähnliche Erscheinung bei der allgemeineren Definition der Laplace-Transformation eintreten kann oder nicht. Wir beweisen in diesem Paragraphen den folgenden Satz:

Existiert der Grenzwert $(\ast\,\ast)$, wenn n nur die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, so existiert auch

$$\lim_{n\to\infty} U_{\omega_n}(y)$$

für eine beliebige nichtbeschränkte Folge der reellen Zahlen $0<\omega_1<\omega_2<\ldots$ und der Grenzwert ist von der Wahl dieser Zahlen unabhängig.

In § 3. wird die Aufmerksamkeit auf einige ungelösten Fragen gelenkt.

§ 1.

Definition 1. 1. Eine Folge von Funktionen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}=(f_1, f_2, \dots)$ $(f_n \in \mathscr{C}$, $n=1, 2, \dots)$ heißt kompakt, wenn man aus jeder Teilfolge der Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen kann.

Definition 1. 2. Hat eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathscr{C}$ keine Teilfolge, die in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig gegen Null konvergiert, so heißt die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nullfolgenfrei.

Bemerkung. Man sieht sofort, daß jede Teilfolge einer kompakten und nullfolgenfreien Folge wiederum eine kompakte und nullfolgenfreie Folge ist.

Definition 1. 3. Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Operatoren $a_n \in \mathscr{M}$. Gibt es zu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine kompakte und nullfolgenfreie Folge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(q_n \in \mathscr{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $$q_n a_n \in \mathscr{C} \qquad (n=1, 2, \dots),$$

(2) $$q_n a_n \rightrightarrows 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

so heißt die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.

Definition 1. 4. Eine Folge von Operatoren $x_n \in \mathscr{M}$ heißt für $n \to \infty$ konvergent gegen den Operator x, wenn $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist.

Bemergung 1. Es ist leicht ersichtlich auf Grund der obigen Definitionen, daß jede Nullfolge gegen Null konvergiert. Es ist auch sofort klar, daß jede Teilfolge einer Nullfolge wiederum eine Nullfolge ist.

Bemerkung 2. Konvergiert eine Folge $x_1, x_2, \dots$ gegen den Operator x im Sinne der Konvergenz II., so konvergiert sie auch im Sinne der Definition 1. 4. In der Tat ist jede fastgleichmäßig konvergente Folge von Funktionen p_n mit der Eigenschaft $p_n \rightrightarrows p \neq 0$ eine kompakte und nullfogenfreie Folge. Es folgt aus (A) und (C), daß $x_n - x$ eine Nullfolge ist (im Sinne der Definition 1. 3), da die Folge der Funktionen $q_n = g p_n$ ebenfalls kompakt und nullfolgenfrei ist, wobei $g \neq 0$ der „Nenner" von $x = f/g$ ist, und wegen (A) und (C) $q_n(x_n - x) = g(p_n x_n) - p_n f \rightrightarrows 0$ strebt.

Wir werden in dieser Arbeit unter Konvergenz stets den im Sinne der Definition 1. 4. genommenen Begriff verstehen. Wir wollen jetzt die folgenden Eigenschaften der Konvergenz beweisen:

(a) Die konstante Folge $a, a, \dots$ konvergiert gegen a.

(b) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den Grenzwert der ursprünglichen Folge.

Hat eine Konvergenz die Eigenschaften (a) und (b), dann sagt man, daß die Konvergenz vom Typus (L) in Fréchetschem Sinne ist. [1]) Zum Beweis der Eigenschaft (a) betrachten wir die Folge

(1.1) $$a - x, a - x, \dots$$

[1]) S. [8], S. 45.

Es ist zu zeigen, daß die Folge (1.1) dann und nur dann eine Nullfolge sein kann, wenn $x=a$ ist, d.h.:

Satz 1. 1. *Eine konstante Folge*

$$c, c, \ldots \tag{1. 2}$$

ist genau dann eine Nullfolge, wenn $c=0$ ist.

BEWEIS. Ist $c=0$, so ist (1. 2) offenbar eine Nullfolge. Ist umgekehrt (1. 2) eine Nullfolge, so gibt es eine kompakte und nullfolgenfreie Folge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ derart, daß für $n\to\infty$

$$q_n c \rightrightarrows 0 \qquad (q_n c \in \mathscr{C}) \tag{1. 3}$$

in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig konvergiert. Man kann wegen der Kompaktheit von $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge $\{q_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ auswählen, so daß

$$\lim_{n\to\infty} q_{i_n} = q \neq 0 \tag{1. 4}$$

ist, da die Folge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ nullfolgenfrei ist. Ist $c=\frac{f}{g}$, so folgt aus (1. 3) und (1. 4), daß

$$qf = \lim_{n\to\infty} q_{i_n} f = \lim_{n\to\infty} g q_{i_n} c = g \lim_{n\to\infty} q_{i_n} c = 0$$

ist. Daraus folgt $f=0$ nach dem Satz von Titchmarsh (s. [1]), da $q\neq 0$ ist. Folglich ist $c=\frac{f}{g}=0$.

Die Erfüllung der Eigenschaft (b) folgt leicht aus der Tatsache, daß jede Teilfolge einer Nullfolge wiederum eine Nullfolge ist.

Satz 1. 2. *Sind die Folgen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompakt und nullfolgenfrei, so ist auch die Folge $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine kompakte und nullfolgenfreie Folge (wobei $f_n g_n$ die Faltung von f_n und g_n bezeichnet).*

BEWEIS. Erst zeigen wir, daß $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompakt ist. Es sei

$$\{f_{n_k} g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \tag{1. 5}$$

eine beliebige Teilfolge von $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann existiert wegen der Kompektheit von $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ der Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $\varphi_i \rightrightarrows f^*$ für $i\to\infty$.

Da die Folge $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ebenfalls kompakt ist, kann man eine Teilfolge $\{\psi_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ von $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}=\{g_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ auswählen, so daß

$$\psi_{i_j} \rightrightarrows g^* \in \mathscr{C} \qquad (j\to\infty) \tag{1. 6}$$

strebt. Da $\{\varphi_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ist, konvergiert

$$\varphi_{i_j} \rightrightarrows f^* \in \mathscr{C} \qquad (j\to\infty). \tag{1. 7}$$

Folglich strebt

$$\varphi_{i_j}\psi_{i_j} \rightrightarrows f^* g^* \qquad (j\to\infty) \tag{1. 8}$$

nach einem bekannten Satz über die fastgleichmäßige Konvergenz von Faltungsfolgen (s. [1]). Damit haben wir die Kompaktheit von $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ bewiesen.

Nun beweisen wir, daß $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ nullfolgenfrei ist. Setzen wir die Existenz einer solchen Teilfolge (1. 5) voraus, daß

$$(1.9) \qquad f_{n_k} g_{n_k} \rightrightarrows 0 \qquad (k \to \infty)$$

strebt. Dann können wir die Teilfolgen $\{\varphi_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ bzw. $\{\psi_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ so auswählen, daß (1. 6) bzw. (1. 7) gelten. Dann ist $f^* g^* = 0$ infolge von (1. 9). Folglich verschwindet mindestens eine der Funktionen f^* und g^* identisch nach dem Satz von Titchmarsh. Das ist aber ein Widerspruch, da die beiden Folgen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ nullfolgenfrei sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Lemma 1. 1. *Enthält jede Teilfolge einer kompakten Funktionenfolge $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\psi_n \in \mathscr{C}$) eine Nullfolge (im Sinne der Definition 1. 3.), so konvergiert ψ_n in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig gegen Null.*

Beweis. Erst zeigen wir, daß jede fastgleichmäßig konvergente Teilfolge von $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen Null konvergiert. Es sei $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine beliebige Teilfolge, so daß

$$(1.10) \qquad \psi_{n_k} \rightrightarrows \psi \qquad (k \to \infty)$$

in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig konvergiert. Es existiert nach Voraussetzung eine Teilfolge $\{\psi_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$, die eine Nullfolge ist. Dann gibt es eine kompakte, nullfolgenfreie Folge $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ derart, daß

$$(1.11) \qquad q_i \psi_{n_{k_i}} \rightrightarrows 0$$

fastgleichmäßig konvergiert. Wegen der Kompaktheit und Nullfolgenfreiheit von $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ gilt

$$(1.12) \qquad \lim_{j \to \infty} q_{i_j} = q \neq 0$$

für eine Teilfolge $\{q_{i_j}\}_{i=1}^{\infty}$. Es ist dann $q\psi = 0$ wegen (1. 10), (1. 11) und (1. 12). Hieraus folgt $\psi = 0$ nach dem Titchmarshschen Satz, da $q \neq 0$ ist.

Wir haben also bewiesen, daß man aus jeder Teilfolge von $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine fastgleichmäßig gegen Null strebende Teilfolge auswählen kann. Hieraus folgt schon

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n = 0$$

und dabei ist die Konvergenz in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig. Setzen wir nämlich im Gegensatz zur Behauptung voraus, daß ψ_n in $[0, \infty)$ nicht fastgleichmäßig gegen Null konvergiert. Dann gibt es ein Intervall $[0, t_0]$, in dem ψ_n nicht gleichmäßig gegen Null konvergiert. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $\{\psi_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, so daß es zu jedem m_k wenigstens ein $t_k \in [0, t_0]$ gibt derart, daß

$$(1.13) \qquad |\psi_{m_k}(t_k)| \geqq \varepsilon$$

ist für jedes $k = 1, 2, \ldots$. Wählt man nun aus der Folge $\{\psi_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine Teilfolge $\{\psi_{m_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$, die in $[0, \infty)$ fastgleichmäßig gegen Null strebt, so muß $\psi_{m_{k_i}}$ in jedem endlichen Intervall, speziell auch in $[0, t_0]$ gleichmäßig gegen Null konvergieren. Das ist wegen (1. 13) ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 1. 3. *Konvergiert eine kompakte Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (im Sinne der Definition 1. 4), so konvergiert sie fastgleichmäßig in $[0, \infty)$ (gegen eine stetige Funktion f^*).*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gilt $f_n \to \frac{f}{g}$ $\left(\frac{f}{g} \in \mathcal{M}, f, g \in \mathcal{C}\right)$, d. h. es gibt eine kompakte nullfolgenfreie Folge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, so daß

$$q_n\left(f_n - \frac{f}{g}\right) \rightrightarrows 0$$

fastgleichmäßig in $[0, \infty)$ konvergiert. Daraus folgt

$$q_n(gf_n - f) \rightrightarrows 0. \tag{1. 14}$$

Somit ist $\{gf_n - f\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. Da $\{gf_n - f\}_{n=1}^{\infty}$ kompakt ist, folgt aus Lemma 1. 1 die fastgleichmäßige Konvergenz

$$gf_n \rightrightarrows f \tag{1. 15}$$

also konvergiert f_n gegen $\frac{f}{g}$ im Sinne der ersten Definition von Mikusiński. Es sei $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine beliebige fastgleichmäßig konvergente Teilfolge, dann strebt $f_{n_k} \rightrightarrows f^* \in \mathcal{C}$. Da die Konvergenz im Sinne der ersten Definition eindeutig ist, haben wir $f^* = \frac{f}{g}$. Damit ist bewiesen, daß man aus jeder Teilfolge der kompakten Folge $\{f_n - f^*\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge auswählen kann. Hieraus folgt nach Lemma 1. 1, daß f_n fastgleichmäßig gegen f^* konvergiert. Somit haben wir den Satz bewiesen.

Definition 1. 5. Es sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Operatoren. Gibt es zu $\{a_n\}$ eine kompakte und nullfolgenfreie Funktionenfolge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ derart, daß die Eigenschaften

$$q_n a_n \in \mathcal{C} \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

$$q_n a_n \rightrightarrows 0 \qquad (n \to \infty) \tag{2}$$

gelten, so heißt die Folge $\{q_n\}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Bemerkung. Mit Hilfe der obigen Definition können wir die Definition 1. 3. einfacher formulieren: Eine Operatorenfolge ist genau dann eine Nullfolge, wenn sie eine verifizierende Folge hat.

Satz 1. 4. *Es sei $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige kompakte und nullfolgenfreie Folge. Ist $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge der Operatorenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, so ist auch $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

BEWEIS. Da die Folge der Funktionen $q_n a_n$ fastgleichmäßig gegen Null konvergiert, kann man wegen der Kompaktheit von $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ aus jeder Teilfolge der Folge $\psi_n = p_n q_n a_n$ eine (fastgleichmäßige) Nullfolge auswählen. Somit konvergiert $\{p_n q_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ fastgleichmäßig gegen Null nach Lemma 1. 1. Folglich ist $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, da nach Satz 1. 2 $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompakt und nullfolgenfrei ist.

Eine unmittelbare Folgerung des obigen Satzes ist der

Satz 1. 5. *Ist $\{a_n\}$ eine Nullfolge, so ist auch $\{p_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge für eine beliebige kompakte Funktionenfolge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Satz 1. 6. *Zwei beliebige Nullfolgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ haben stets eine gemeinsame verifizierende Folge.*

BEWEIS. Es seien $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ bzw. $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ die verifizierenden Folgen von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bzw. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann ist nach Satz 1. 4 $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge sowohl von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ als auch von $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Satz 1. 7. *Sind $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Nullfolgen, so sind auch $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Nullfolgen.*

BEWEIS. Es sei $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gemeinsame verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann gelten

$$p_n a_n,\ p_n b_n \in \mathscr{C} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

$$p_n a_n \rightrightarrows 0,\ p_n b_n \rightrightarrows 0.$$

Folglich gelten

$$p_n(a_n+b_n)\in\mathscr{C},\ p_n^2 a_n b_n \in \mathscr{C} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

$$p_n(a_n+b_n)=p_n a_n+p_n b_n \rightrightarrows 0,$$

$$p_n^2 a_n b_n \rightrightarrows 0.$$

Also ist $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Gleicherweise ist $\{p_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, da $\{p_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ nach Satz 1. 2 eine kompakte und nullfolgenfreie Folge ist.

Satz 1. 8. *Ist $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, so ist auch $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge bei beliebigem Operator c.*

BEWEIS. Es sei $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ferner sei $c=\dfrac{f}{g}\in\mathscr{M}$, $(f, g\in\mathscr{C})$. Dann ist $\{gp_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$, da

$$(gp_n)(ca_n)=f(p_n a_n)\rightrightarrows 0$$

gilt, und $\{gp_n\}_{n=1}^{\infty}$ wegen $g\neq 0$ kompakt und nullfolgenfrei ist.

Satz 1. 9. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge. Setzen wir voraus, daß $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen x^* und x^{**} konvergiert. Dann sind $\{x_n-x^*\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{x_n-x^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ (nach Definition 1. 4) Nullfolgen. Wegen Satz 1. 8 ist auch $\{x^{**}-x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-1(x_n-x^{**})\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. Folglich ist

$$\{x^{**}-x^*\}_{n=1}^{\infty}=\{(x^{**}-x_n)+(x_n-x^*)\}_{n=1}^{\infty}$$

eine Nullfolge nach Satz 1. 7. Also muß nach Satz 1. 1 $x^{**}-x^*=0$ sein, d. h. $x^{**}=x^*$.

Satz 1. 10. *Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge. Ist $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, so ist auch $\{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Für $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist der Satz mit dem Satz 1. 7 identisch. Es sei nun $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \frac{f}{g} \neq 0$ $(f, g \in \mathscr{C})$, also $f \neq 0$, $g \neq 0$. Ist $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$, so sind dann $\{fq_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{gq_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompakt und nullfolgenfrei. Es sei $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann ist $\{p_n g q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $x_n a_n$. Die Folge $\{fq_n p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist nämlich eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nach Satz 1. 4. Gleicherweise ist $\{gq_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$. Dann gelten $fq_n p_n a_n \rightrightarrows 0$, $gq_n(x_n - x) \rightrightarrows 0$. Also

$$(p_n g q_n)(x_n a_n) = fq_n p_n a_n + (gq_n x_n - fq_n)(p_n a_n) =$$
$$= fq_n p_n a_n + gq_n(x_n - x)(p_n a_n) \rightrightarrows 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 1. 11. *Aus* $x_n \to x$ *und* $y_n \to y$ *folgt* $x_n + y_n \to x + y$ *und* $x_n y_n \to xy$.

Beweis. Die Folgen $a_n = \{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$ und $b_n = \{y_n - y\}_{n=1}^{\infty}$ sind Nullfolgen. Also ist $\{(x_n + y_n) - (x + y)\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge nach Satz 1. 7. Gleicherweise ist $\{x_n y_n - xy\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge auf Grund der Sätze 1. 10, 1. 8 und 1. 7.

Satz 1. 12. *Aus* $x_n \to x$ *und* $y_n \to y \neq 0$ *folgt*

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}.$$

Beweis. Es genügt $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$ zu beweisen, denn hieraus folgt schon

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} \to x \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

auf Grund von Satz 1. 11.

Es sei $y = \frac{f}{g}$ $(f, g \in \mathscr{C})$. Dann ist $f \neq 0$ wegen $y \neq 0$ und $g \neq 0$ wegen $y \in \mathscr{M}$. Ist $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{y - y_n\}_{n=1}^{\infty}$, so ist auch $\{gq_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{y - y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Folglich gilt

$$\psi_n = gq_n(y - y_n) \in \mathscr{C} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

und

$$\psi_n \rightrightarrows 0 \qquad (n \to \infty).$$

Somit strebt $gq_n \psi_n$ fasgleichmäßig gegen Null nach Lemma 1. Ferner ist die Folge der Funktionen

$$\varphi_n = gq_n y_n = q_n f - \psi_n$$

kompakt und nullfolgenfrei. Folglich ist auch $\{\varphi_n q_n f\}_{n=1}^{\infty}$ kompakt und nullfolgenfrei (Satz 1. 2). Diese Folge ist eine verifizierende Folge von $\left\{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right\}_{n=1}^{\infty}$, da

$$\varphi_n q_n f\left(\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right) = (gq_n y_n) q_n f\left(\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right) = g^2 q_n^2 y_n y\left(\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right) =$$
$$= (gq_n)[gq_n(y-y_n)] = gq_n\psi_n \rightrightarrows 0$$

gilt. Somit ist $\left\{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, und das war zu beweisen.

§ 2.

Als Anwendung des im ersten Paragraphen entwickelten Konvergenzbegriffs wollen wir die Konvergenz der Operatorenfolgen

$$U_{\omega_1}(x),\ U_{\omega_2}(x),\ \ldots,\ U_{\omega_n}(x),\ \ldots$$

untersuchen.

Wir beginnen erst mit der Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften von U_k.

(I) U_k ist für beliebige feste positive Zahl k definiert, wie folgt:

$$U_k(f) = \{kf(kt)\} \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{C}$$

$$U_k(x) = \frac{U_k(f)}{U_k(g)} \quad \text{für} \quad x = \frac{f}{g} \in \mathscr{M} \qquad (f, g \in \mathscr{C}).$$

(Bezüglich der Eindeutigkeit dieser Definition siehe z.B. [4]).

(II) U_k ist additiv:

$$U_k(x+y) = U_k(x) + U_k(y) \qquad (x, y \in \mathscr{M}).$$

(III) U_k ist homogen:

$$U_k(\lambda x) = \lambda U_k(x) \qquad \big(x \in \mathscr{M},\ \lambda \in K(=\text{Zahlenkörper})\big).$$

(IV) U_k ist multiplikativ:

$$U_k(xy) = U_k(x)U_k(y) \qquad (x, y \in \mathscr{M}).$$

(V) Es gilt $U_\mu U_\nu = U_{\mu\nu}$ für jedes $\mu > 0$ und $\nu > 0$, d. h.:

$$U_\mu[U_\nu(x)] = U_{\mu\nu}(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathscr{M}$$

(s. [4]).

(VI) $U_k(x)$ ist stetig bezüglich der Konvergenz I. (s. [4]), (d. h. aus $x_n \overset{(I)}{\to} x$ folgt stets $U_k(x_n) \overset{(I)}{\to} U_k(x)$ für $n \to \infty$).

(VII) Ist $U_n(a) = a$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ bei irgendeinem Operator a, so ist a eine Zahl. (s. [4]).

(VIII) Konvergiert die Folge $\{U_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ im Sinne der Konvergenz I., so ist ihr Grenzwert stets eine Zahl (s. [4]).

Wir wollen nun die Stetigkeit von U_k bezüglich der in § 1. definierten Konvergenz beweisen.

Satz 2. 1. *Die Transformation U_k ist in jedem Punkt stetig. (Unter Punkt verstehen wir einen Operator).*

Beweis. Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige konvergente Operatorenfolge, deren Grenzwert x ist. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} U_k(x_n) = U_k(x) \tag{2. 1}$$

zu beweisen. Es sei $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$. Dann ist $\{U_k(q_n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{U_k(x_n) - U_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Nämlich ist die Folge der Funktionen

$$U_k(q_n) = \{kq_n(kt)\}$$

offenbar kompakt und nullfolgenfrei, und wir erhalten wegen

$$\{\varphi_n(t)\} = q_n(x_n - x) \rightrightarrows 0$$

durch Anwendung von (II) und (IV)

$$U_k(q_n)[U_k(x_n) - U_k(x)] = U_k(q_n)U_k(x_n - x) = U_k[q_n(x_n - x)] =$$
$$= U_k(\varphi_n) = k\{\varphi_n(kt)\} \rightrightarrows 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Somit ist $\{U_k(x_n) - U_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, q.e.d.

Satz 2. 2. *Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = a \tag{2. 2}$$

für irgendeinen Operator x, so ist a eine komplexe Zahl.

Beweis. Wir haben diesen Satz in [4] auf Grund der Stetigkeit von U_k bezüglich der spezielleren Konvergenz I. bewiesen. Da wir die Stetigkeit für die allgemeinere Konvergenz in Satz 2. 1 bewiesen haben, können wir den Beweis von Satz 10. 1 in [4] (S. 199) Wort für Wort wiederholen. Unter konvergenz ist natürlich die allgemeinere zu verstehen. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen aus Zweckmäßigkeitsgründen die Transformationen

$$E^{\alpha}(x) = U_{e^{\alpha}}(x) \qquad (-\infty < \alpha < \infty;\ x \in \mathcal{M})$$

einführen, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Die Transformation E^{α} ist also linear und multiplikativ:

$$E^{\alpha}(x+y) = E^{\alpha}(x) + E^{\alpha}(y) \qquad (x, y \in \mathcal{M}), \tag{2. 3}$$

$$E^{\alpha}(\lambda x) = \lambda E^{\alpha}(x) \qquad (x \in \mathcal{M};\ \lambda \in \mathcal{K}), \tag{2. 4}$$

$$E^{\alpha}(xy) = E^{\alpha}(x)E^{\alpha}(y). \tag{2. 5}$$

Aus (2. 5) folgt

$$E^{\alpha}(1) = 1 \tag{2. 6}$$

und somit wegen (2. 4)

$$E^{\alpha}(\lambda) = \lambda \qquad (\lambda \in \mathcal{K}). \tag{2. 7}$$

Aus der Eigenschaft (V) ergibt sich

(2. 8) $$E^{\alpha}E^{\beta} = E^{\alpha+\beta} \qquad \alpha, \beta \in (-\infty, \infty).$$

In der Tat gilt

$$E^{\alpha}E^{\beta} = U_{e^{\alpha}}U_{e^{\beta}} = U_{e^{\alpha}e^{\beta}} = U_{e^{\alpha+\beta}} = E^{\alpha+\beta}.$$

Lemma 2. *Es sei $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ eine beliebige beschränkte Folge von reellen Zahlen:*

(2. 9) $$|\beta_n| \leqq K \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Ist die Operatorenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ eine Nullfolge, so ist auch die Folge der Operatoren

(2. 10) $$E^{\beta_n}(a_n) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

eine Nullfolge.

Beweis. Es sei $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann gilt $\varphi_n = q_n a_n \in \mathscr{C}$ $(n = 1, 2, \dots)$ und

(2. 11) $$\varphi_n = q_n a_n \rightrightarrows 0.$$

Wir beweisen, daß

(2. 12) $$\{E^{\beta_n}(q_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

eine verifizierende Folge von $\{E^{\beta_n}(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ist. Es gilt wegen (2. 5)

$$E^{\beta_n}(q_n)E^{\beta_n}(a_n) = E^{\beta_n}(q_n a_n) = E^{\beta_n}(\varphi_n) = \{e^{\beta_n}\varphi_n(e^{\beta_n}t)\} \in \mathscr{C}$$

für jedes $n = 1, 2, \dots$ und aus (2. 11) folgt

(2. 13) $$E^{\beta_n}(q_n)E^{\beta_n}(a_n) = \{e^{\beta_n}\varphi_n(e^{\beta_n}t)\} \rightrightarrows 0.$$

Es sei nämlich ein $t_0 > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es wegen (2. 11) ein N_0, so daß

(2. 14) $$|\varphi_n(t)| < \varepsilon e^{-K}$$

ist für $n > N_0$ und $t \in [0, e^K t_0]$, wobei K eine in (2. 9) definierte Schranke der Zahlen β_n ist. Ist nun $0 \leqq t \leqq t_0$, so gilt $0 \leqq e^{\beta_n}t \leqq e^{\beta_n}t_0 \leqq e^K t_0$. Also ist wegen (2. 14)

$$|E^{\beta_n}(\varphi_n)| = |e^{\beta_n}\varphi_n(e^{\beta_n}t)| < e^K \varepsilon e^{-K} = \varepsilon$$

für $n > N_0$. Wir haben also (2. 13) bewiesen.

Um die Kompaktheit und Nullfolgenfreiheit von (2. 12) zu beweisen, braucht man einzusehen, daß jede Teilfolge von (2. 12) eine fastgleichmäßig konvergente Teilfolge hat, und ihr Grenzwert nicht identisch verschwindet. Es sei

$$\{E^{\beta_{k_n}}(q_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$$

eine beliebige Teilfolge von (2. 12). Auf Grund der Kompaktheit und Nullfolgenfreiheit von $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ kann man aus der Teilfolge $\{q_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ eine fastgleichmäßig konvergente Teilfolge $\{q_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ auswählen, so daß

(2. 15) $$\lim_{n\to\infty} q_{i_n} = q \neq 0$$

ist.

Wegen der Beschränktheit der Zahlenfolge $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ können wir aus der Folge $\{\beta_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge $\{\beta_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ auswählen:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{j_n} = \beta. \tag{2. 16}$$

Wegen (2. 9) gilt offenbar

$$|\beta| \leqq K. \tag{2. 17}$$

Weiterhin strebt

$$\varepsilon_n = e^{\beta_{j_n}} - e^{\beta} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{2. 18}$$

Es sei $t_0 > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Die Funktion $q \in \mathscr{C}$ ist im Intervall $[0, e^K t_0]$ gleichmäßig stetig. Folglich gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|q(t_1) - q(t_2)| < \frac{\varepsilon e^{-K}}{4} \tag{2. 19}$$

ist für $|t_1 - t_2| < \delta$ und $t_1, t_2 \in [0, e^K t_0]$. Da $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist, gibt es ein N_1 wegen (2. 15), so daß bei beliebigem $t \in [0, e^K t_0]$

$$|q_{j_n}(t) - q(t)| < \frac{\varepsilon e^{-K}}{4} \tag{2. 20}$$

ist für $n > N_1$. Wegen (2. 15) gibt es eine Schranke $M > 0$, so daß

$$|q_{j_n}| \leqq M \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2. 21}$$

ist in $[0, e^K t_0]$. Es sei

$$\varepsilon^* = \min\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\delta}{t_0}\right). \tag{2. 22}$$

Wegen (2. 18) gibt es ein N_2, so daß

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon^* \tag{2. 23}$$

ist für $n > N_2$. Es sei

$$N = \max(N_1, N_2). \tag{2. 24}$$

Ist nun $0 \leqq t \leqq t_0$, so ist $0 \leqq e^{\beta_{j_n}} t \leqq e^K t_0$. Also gilt wegen (2. 20)

$$|q_{j_n}(e^{\beta_{j_n}} t) - q(e^{\beta_{j_n}} t)| < \frac{\varepsilon e^{-K}}{4} \tag{2. 25}$$

für $n > N$ stets in $[0, t_0]$. Da für $n > N$ und $t \in [0, t_0]$ wegen (2. 23) und (2. 22)

$$|e^{\beta_{j_n}} t - e^{\beta} t| = |e^{\beta_{j_n}} - e^{\beta}|\, t \leqq |\varepsilon_n|\, t_0 < \frac{\delta}{t_0}\, t_0 = \delta$$

ist, ergibt sich infolge von (2. 19)

$$|q(e^{\beta_{j_n}} t) - q(e^{\beta} t)| < \frac{\varepsilon e^{-K}}{4} \tag{2. 26}$$

für $n>N$ und $t\in[0, t_0]$. Nun erhalten wir aus (2. 18), (2. 17), (2. 25), (2. 26), (2. 23) und (2. 22)

$$|E^{\beta j_n}(q_{j_n})-E^{\beta}(q)| = |e^{\beta j_n}q_{j_n}(e^{\beta j_n}t)-e^{\beta}q(e^{\beta}t)| \leqq$$

$$\leqq |e^{\beta}[q_{j_n}(e^{\beta j_n}t)-q(e^{\beta}t)]|+|\varepsilon_n|\,|q_{j_n}(e^{\beta j_n}t)| \leqq$$

$$= |q_{j_n}(e^{\beta j_n}t)-q(e^{\beta j_n}t)|\,e^K+|q(e^{\beta j_n}t)-q(e^{\beta}t)|\,e^K+|\varepsilon_n|\,M \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon e^{-K}}{4}\,e^K+\frac{\varepsilon e^{-K}}{4}\,e^K+\frac{\varepsilon}{2M}\,M=\varepsilon$$

für $n>N$ und $t\in[0, t_0]$.

Somit haben wir bewiesen, daß man aus der Teilfolge $\{E^{\beta k_n}(q_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$ die fastgleichmäßig konvergente Teilfolge $\{E^{\beta j_n}(q_{j_n})\}_{k=1}^{\infty}$ auswählen kann. Dabei ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} E^{\beta j_n}(q_{j_n}) = E^{\beta}(q) = \{e^{\beta}q(e^{\beta}t)\} \neq 0,$$

da $q\neq 0$ ist. Also ist (2. 12) eine verifizierende Folge von (2. 10). Damit haben wir das Lemma bewiesen.

Satz 2. 3. *Es sei x irgendein Operator. Konvergiert die Folge*

$$\{E^n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2. 27}$$

gegen eine komplexe Zahl α, so konvergiert auch die Folge

$$\{E^{\nu_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

gegen α für eine beliebige nichtbeschränkte Folge von reellen Zahlen

$$\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_n<\ldots\,. \tag{2. 28}$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\{\alpha-E^n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2. 29}$$

eine Nullfolge. Dann ist auch

$$\{\alpha-E^{[\nu_n]}(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2. 30}$$

eine Nullfolge, wo $[\nu_n]$ die größte ganze Zahl $\leqq \nu_n$ bezeichnet. Ist nämlich $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von (2. 29), so ist $\{q_{[\nu_n]}\}_{n=1}^{\infty}$ eine verifizierende Folge von (2. 30), da die Folge $\{q_{[\nu_n]}\}_{n=1}^{\infty}$ offenbar kompakt und nullfolgenfrei ist, ferner wegen

$$q_n[\alpha-E^n(x)]\rightrightarrows 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty, \tag{2. 31}$$

auch

$$q_{[\nu_n]}(\alpha-E^{[\nu_n]})\,(x)\rightrightarrows 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty \tag{2. 32}$$

gilt. Daß (2. 32) tatsächlich fastgleichmäßig gegen Null strebt, folgt aus Lemma 1. Man kann nämlich wegen (2. 31) aus jeder Teilfolge von (2. 32) eine Nullfolge auswählen, da die Zahlenfolge (2. 28) nichtbeschränkt ist.

Dann ist auch $\{\alpha - E^{\nu_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. Unter Anwendung von (2. 7), (2. 8) und (2. 3) erhalten wir nämlich

$$\alpha - E^{\nu_n}(x) = \alpha - E^{[\nu_n]+(\nu_n - [\nu_n])}(x) =$$

$$= E^{(\nu_n - [\nu_n])}(\alpha) - E^{(\nu_n - [\nu_n])}\big(E^{[\nu_n]}(x)\big) = E^{(\nu_n - [\nu_n])}\big(\alpha - E^{[\nu_n]}(x)\big).$$

Hieraus ist auf Grund von Lemma 2. ersichtlich, daß $\{\alpha - E^{\nu_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, da $|\nu_n - [\nu_n]| < 1$ ist. Q. e. d.

Satz 2. 4. *Existiert*

$$\lim_{n\to\infty} E^{\log n}(x) = \alpha$$

wo n die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, so ist α eine komplexe Zahl, und es gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} E^n(x) = \alpha$$

Beweis. Da $E^{\log n} = U_e^{\log n} = U_n$ ist, folgt nach Satz 2. 2, daß α eine Zahl ist.

Setzen wir $\beta_n = \log n - [\log n]$, so ergibt sich

$$\alpha - E^{[\log n]}(x) = \alpha - E^{-\beta_n + \log n}(x) = E^{-\beta_n}(\alpha) - E^{-\beta_n}\big(E^{\log n}(x)\big) = E^{-\beta_n}\big(\alpha - E^{\log n}(x)\big).$$

Hieraus sieht man wegen Lemma 2, daß $\{\alpha - E^{[\log n]}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, da nach Voraussetzung $\alpha - E^{\log n}(x)$ gegen Null strebt, und $|-\beta_n| < 1$ ist. Somit ist auch $\{\alpha - E^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, da die Folge $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{[\log n]\}_{n=1}^{\infty}$ ist. Man kann die letzte Behauptung folgenderweise formulieren: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es mindestens eine natürliche Zahl m so daß $n = [\log m]$ ist. Wegen

$$[\log m] \leqq \log m < [\log m] + 1$$

erhalten wir

$$n \leqq \log m < n + 1$$

d. h.

$$e^n \leqq m < e^{n+1}.$$

Man braucht also zu zeigen, daß jedes Intervall (e^n, e^{n+1}) wenigstens eine natürliche Zahl m enthält. Das ist aber trivial, da die Länge des Intervalls

$$e^{n+1} - e^n = (e-1)e^n > 1 \qquad (n > 0)$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. 5. *Existiert*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = \alpha \tag{2. 33}$$

wo n die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, so existiert auch

$$\lim_{n\to\infty} U_{\omega_n}(x) = \alpha \tag{2. 34}$$

für eine beliebige nichtbeschränkte Folge von reellen Zahlen

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots .$$

Dabei ist α stets eine Zahl.

BEWEIS. Aus der Voraussetzung (2. 33) folgt $E^{\log n}(x) = U_n(x) \to \alpha$, wobei α nach Satz 2. 2 eine Zahl ist. Dann folgt nach Satz 2. 4 $E^n(x) \to \alpha$. Hieraus folgt weiterhin nach Satz 2. 3, daß $\lim_{n\to\infty} E^{v_n}(x) = \alpha$ ist für eine beliebige nichtbeschränkte monoton wachsende Zahlenfolge $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ist speziell $v_n = \log \omega_n$, so ergibt sich

$$U_{\omega_n}(x) = U_{e^{v_n}}(x) = E^{v_n}(x) \to \alpha.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 3.

Wir wollen endlich einige Probleme stellen.

Problem 1. Gibt es eine Operatorenfolge, die im Sinne der Definition von § 1. konvergiert, aber im Sinne der Definition II. divergiert?

Problem 2. Kann man den Satz 2. 5 nur unter der Voraussetzung der Konvergenz II. beweisen?

Problem 3. Ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} U_{\omega_n}(x)$ $(\omega_n \to \infty)$ von der Wahl der Zahlenfolge

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$$

stets unabhängig?

Literatur

[1] J. MIKUSIŃSKI, Operational Calculus, *New York,* 1959.
[2] K. URBANIK, Sur la structure non topologique du corps des opérateurs, *Studia Math.,* **14** (1954), 243—246.
[3] C. RYLL—NARDZEWSKI, Sur le corps des opérateurs de Mikusińki, *Studia Math.,* **14** (1954), 247—248.
[4] E. GESZTELYI, Über lineare Operatortransformationen, *Publ. Math. Debrecen,* **14** (1967), 169—206.
[5] E. GESZTELYI, Limit and infinite integral of a Mikusiński operator, *Studia Math.,* ((to appear).
[6] G. DOETSCH, Handbuch der Laplace-Transformation I., *Basel,* 1950.
[7] S. RIOS, La hiperconvergencia en las integrales de Laplace-Stieltjes, *Bol. Sem. Mat.,* **4** (1934/1935), 47—50.
[8] C. KURATOWSKI, Topologie I., *Warszawa—Wroclaw,* 1948.

(Eingegangen am 17. Juni 1967-)