Die Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie in der Möbiusschen Ebene II.

Von L. GYARMATHI (Debrecen)

Im ersten Teil der Arbeit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3. 1. *Es sei auf einer Halbebene M_1 die durch Zerfallen in zwei Teile mit der Geraden e der Möbiusebene M über einen Q-Körper entsteht, ein Halbebenenmodell der hyperbolischen ebenen Geometrie gegeben. In diesem Falle ist eine und nur eine der folgenden Bedingungen für die Menge $\mathfrak{K}$ aller Kreise, welche die Geraden des Modells halten, erfüllt:*

a) *Es gibt auf der Hälfte von M, welche sich von M_1 unterscheidet, einen solchen Punkt, daß die durch diesen gehende und die e in zwei Punkten schneidenden Kreise und nur diese zu $\mathfrak{K}$ gehören.*

b) *Es gibt einen Kreis von M_1, welcher keinen Punkt von M_1 enthält, daß die diesen orthogonal schneidenden und die e in zwei Punkten schneidenden Kreise und nur diese zu $\mathfrak{K}$ gehören.*

c) *Es gibt einen solchen echten Kreis von M dessen Mittelpunkt sich auf der, von M_1 sich unterscheidenden Hälfte der M befinden, daß die diesen in Diametralenpunkten, und die e in zwei Punkten schneidenden Kreise und nur diese zu $\mathfrak{K}$ gehören.*

Wir benötigen die folgende

Erklärung {3. 1}. Das Halbebenenmodell der hyperbolischen ebenen Geometrie über dem Körper Q wird dem Typ nach parabolisch, elliptisch oder hyperbolisch genannt, je nachdem die Bedingung a), b) oder c) von Satz 3. 1 für es gültig ist.

In dem folgenden Abschnitt wird die Umkehrung des Satzes 3. 1, die Existenz der drei Typen unserer Modelle bewiesen. Den Beweis werden wir durch die Konstruktion dieser Modelle führen. Von den drei Typen ist die hyperbolische in der mathematischen Literatur unbekannt, deshalb dessen Konstruktion ausführlich gezeigt wird, in Verbindung mit dem anderen machen wir nur die notwendigen Ergänzungen.

§ 4. Die Halbebenenmodelle vom hyperbolischen Typ der hyperbolischen ebenen Geometrie

Satz 4. 1. *Es sei M_1 eine Halbebene, die von Geraden e der Möbiusebene M über dem Körper Q bestimmt ist. Wenn irgendeine Menge $\mathfrak{K}$ der Kreise von M der Bedingung* c) *des Satzes* 3. 1 *genügt, dann hat die hyperbolische ebene Geometrie* *auf M_1 ein und nur ein Halbebenenmodell, in welchem die Menge der Kreise, welche die Geraden des Modells halten, $\mathfrak{K}$ ist.*

Nach 3. 1 ist das Modell vom hyperbolischen Typ.

Beweis. Die Konstruktion des Modells geschieht in zwei Teilen. Im ersten zeigen wir die eigentliche Konstruktion des Modells vom hyperbolischen Typ, im zweiten beweisen wir, daß die Axiome der hyperbolischen ebenen Geometrie in ihm gültig sind.

1. Die Konstruktion des Modells vom hyperbolischen Typ.

In einer Möbiusebene M über dem Körper Q [1]) erklären wir das Modell folgenderweise. Nehmen wir in der zur M gehörenden euklidischen Ebene eine $O(\zeta_1, \zeta_2)$ rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Gerade e sei identisch mit der Axe ζ_1. Jener Teile von M wird M_1 genannt, wo $\zeta_2 > 0$ gilt.

Die Punkte von ζ_1 nennen wir Endpunkte des Modells. Die Koordinaten dieser Punkte — wenn sie nicht ∞ ist — bezeichnen wir oft auch mit ξ oder η und diese Endpunkte mit Ξ bzw. H. Der unendliche Punkt von ζ_1 wird mit Ω bezeichnet.

Nehmen wir einen solchen eigentlichen Kreis k dessen Mittelpunkt auf der jenigen Hälfte von M liegt, welche nicht M_1 ist. [2])

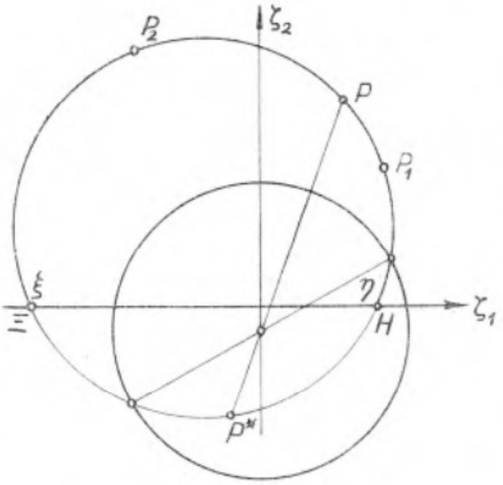

Fig. 1

Erklärung {4.1}. Unter den Modellpunkten versteht man die Punkte von M_1. Die Modelgeraden sind die in M_1 fallende Bögen der Kreise, welche k in diametralen Punkten schneiden. [3]) Ein Modellpunkt inzidiert auf eine Modellgerade, wenn er auf Kreise für das Halten der Modellgerade inzidiert. Der Punkt P von der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden ist zwischen P_1 und P_2 wenn P im Euklidischen Sinne auf dem Bogen solches Kreises so ist, welcher die Modellgerade $P_1 P_2$ halt. (Fig. 1).

Behauptung 4. 1.[4]) *Es gehört zu allen Modellpunkten eineindeutigung auf der Geraden ζ_1 eine elliptische Involution, deren entsprechende Punktpaare die $2-2$ Enden der durch den Punkt P gehenden Modellgeraden sind.*

Beweis. Es ist bekannt, dass die durch einen Punkt gehenden und eine gegebene eigentliche Kreise in diametralen Punkte schneidende Kreise außer P in einem

[1]) Die Punkte von M ist die Menge der Elementenpaare, welche aus den Elementen des Körpers Q bildbar sind, erweitert mit einem einzigen unendlichen Punkt.

[2]) Sei die Gleichung von $k: \xi_1^2 + (\xi_2 - \nu)^2 = 1 \quad (\nu < 0)$

[3]) Die Gleichung der auf $\xi \neq \infty$, $\eta \neq \infty$ Enden inzidierenden Modellgeraden ist

$$\xi\eta(\zeta_2 - \nu) + (\xi + \eta)\nu\zeta_1 + (\nu^2 + 1)\zeta_2 - \nu(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 0, \quad (\zeta_2 > 0,\ \xi \neq \eta)$$

[4]) In § 4, 5, 6 nennt man die einfacheren Sätze Behauptungen.

Punkt P^* sich schneiden. Die Gerade PP^* geht durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und die Punkten P und P^* liegen — im Euklidischen Sinne — auf verschiedenen Seiten von 0. Aus dem obigen, aus der Lage des Kreises k und aus der Lage des Modellpunktes folgt, daß P und P^* auf verschiedenen Seiten von ζ_1 liegen. Deshalb wird durch die Kreisreihe, deren Grundpunkte P und P^* sind, aus ζ_1 eine elliptische Involution herausgeschnitten. Damit bewiesen wir, daß die $2-2$ Ende der durch einen Modellpunkt gehenden Geraden auf ζ_1 die entsprechenden Punktpaare einer elliptischen Involution sind.

Ähnlich kann man die Umkehrung der Behauptung, daß ein Modellpunkt P zu jeder einzelnen elliptischen Involution I_e auf ζ_1 gehört, beweisen. Nehmen wir zwei entsprechende Punktpaare von I_e und führen wir zwei solche Kreise, welche durch je einen Punktpaar gehen und den k in diametralen Punkten schneiden. Die Schnittpunkte P und P^* dieser Kreise haben nach dem obigen solche Lage, daß der eine in M_1 und der andere in der von M_1 verschiedene Hälfte des M fallen. Man kann leicht einsehen, daß die durch die übrigen Punktpaare von I_e gehenden und k in diametralen Punkten schneidende Kreise sich in Punkten P und P^* schneiden. Der Beweis ist damit beendet.

Erklärung {4. 2}. Unter Geradentransformation T versteht man in dem Modell eine solche Abbildung, welche die Gerade mit Enden ξ, η in die Gerade mit Enden ξ', η' überführt und zwischen den Enden der Zusammenhang:

$$\xi' = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}, \quad \eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} \quad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0)\ ^{5)}$$

Aus der Behauptung 4. 1 folgt leicht

Behauptung 4. 2. *Die Geradetransformation T ist nicht nur der auf Geraden sondern auch in den Punkten eineindeutig.*

Erklärung {4.3}. Zwei Modellgeraden sind *parallel*, wenn sie eine gemeinsame Ende haben.

Die Menge solcher Punkte einer Modellgeraden, welche zwischen zwei ihrer Punkten P_1 und P_2 liegen, wird *Strecke* $\overline{P_1P_2}$ genannt.

Die Modellgerade a zerfällt von irgendeinem ihrer Punkte aus in die beiden *Modellhalbgeraden* a_1, a_2. Ein von einem Punkte P ausgehendes Paar von Modellhalbgeraden a_1 und a_2, die nicht zusammen eine Gerade ausmachen, nennen wir einen Modellwinkel und bezeichnen ihn entweder $\sphericalangle(a_1 b_1)$ oder $\sphericalangle(b_1 a_1)$.

Erklärung {4. 4}. $\overline{P_1P_2} \doteq \overline{P_1'P_2'}$ bzw. $\sphericalangle(a_1 b_1) = \sphericalangle(a_2 b_2)$ wenn es eine solche Transformation T gibt, welche den P_1 in P_1', den P_2 in P_2' bzw. die a_1 in a_1' die b_1 in b_1' überführt.

Erklärung {4. 5}. Rechter Modellwinkel ist ein solcher Modellwinkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist. Wenn zwischen zwei Modellgeraden ein rechter Winkel ist, werden die Geraden senkrechte Modellgeraden genannt.

[5]) Es wird bezüglich der Transformation des Endes ∞ bemerkt, wenn $\gamma \neq 0$ ist, dann ist ∞ das Bild von $-\dfrac{\delta}{\gamma}$, und das Bild von ∞ ist $\dfrac{\alpha}{\gamma}$, wenn aber $\gamma = 0$ ist, dann ist das Bild von ∞ es selbst.

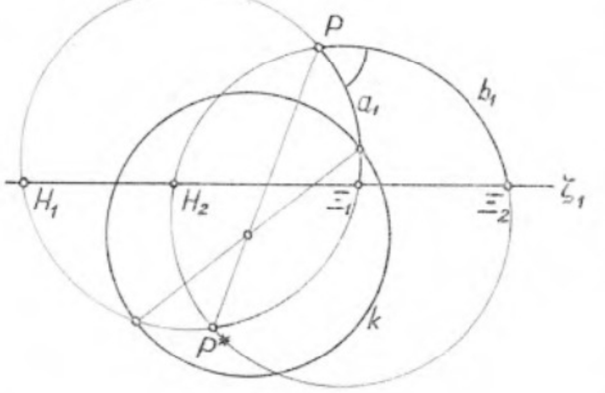

Fig. 2

Erklärung {4. 6}. Unter Winkelcharakteristik versteht man das folgende Doppelverhältnis

$$\Delta(\sphericalangle a_1 b_1) = (\Xi_1 \mathrm{H}_1 \Xi_2 \mathrm{H}_2),$$

wo Ξ_1 bzw. Ξ_2 die Ende von Halbgerade a_1 bw. b_1, und H_1 bzw. H_2 die Ende der zu a_1 bzw. b_1 gehörenden anderen Halbgeraden sind. (Fig. 2).

Behauptung 4. 4. $\sphericalangle(a_1 b_1) = \sphericalangle(a_1' b_1')$ *gilt dann und nur dann, wenn*

(4. 3) $\Delta(\sphericalangle a_1 b_1) = \Delta(\sphericalangle a_1' b_1')$.

Beweis. Es sei die zu $\sphericalangle(a_1 b_1)$ bzw. $\sphericalangle(a_1' b_1')$ gehörende Ende nach obigen $\Xi_1, \mathrm{H}_1, \Xi_2, \mathrm{H}_2$ bzw. $\Xi_1', \mathrm{H}_1', \Xi_2', \mathrm{H}_2'$. Wenn $\sphericalangle a_1 b_1 \equiv \sphericalangle a_1' b_1'$ ist,dann gibt es nach Erklärung 4. 4 eine solche Transformation T, welche die Schenkel der zwei Modellwinkel ineinander über führt. T ist eine projektive Transformation, des halb gilt

$$(\Xi_1 \mathrm{H}_1 \Xi_2 \mathrm{H}_2) = (\Xi_1' \mathrm{H}_1' \Xi_2' \mathrm{H}_2')$$

und so

$$\Delta(\sphericalangle a_1 b_1) = \Delta(\sphericalangle a_1' b_1').$$

Die Bedingung ist also notwendig.

Die Bedingung ist auch genügend, wenn (4. 3) besteht, dann ist

$$(\Xi_1 \mathrm{H}_1 \Xi_2 \mathrm{H}_2) = (\Xi_1' \mathrm{H}_1' \Xi_2' \mathrm{H}_2')$$

und so zu der Projektivität

$$\Pi \begin{cases} \Xi_1 \mathrm{H}_1 \Xi_2 \mathrm{H}_2 \\ \Xi_1' \mathrm{H}_1' \Xi_2' \mathrm{H}_2' \end{cases}$$

gehörende Transformation T führt a_1 in a_1' und b_1 in b_1' und dies bedeutet, daß $\sphericalangle a_1 b_1 = \sphericalangle a_1' b_1'$ ist.

Behauptung 4. 5. *Die Geraden* $\Xi_1 \mathrm{H}_1$ *und* $\Xi_2 \mathrm{H}_2$ *sind senkrecht auf einander dann, und nur dann, wenn*

(4. 4) $$(\Xi_1 \mathrm{H}_1 \Xi_2 \mathrm{H}_2) = -1$$

ist.

Beweis. Die Behauptung folgt leicht aus der Erklärung des Rechtewinkels, aus der Behauptung 4. 4 und aus den bekannten Eigenschaften des Doppelverhältnisses.

Behauptung 4. 6. *Man kann eine und nur eine Senkrechte in einem Punkt einer Geraden ziehen.*

Beweis. Es sei $\Xi_1 \mathrm{H}_1$ die Gerade, P der Punkt und $\Xi_2 \mathrm{H}_2$ eine solche Senkrechte. Dann ist (4. 4) gültig, und (Ξ_2, H_2) ist ein solches Punktpaar der zu P gehörenden Involution welche das Punktpaar (Ξ_1, H_1) trennt und dieses ist eindeutig bestimmt.

Erklärung {4. 6′}. Unter der Charakteristik der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ versteht man

$$\Delta \overline{P_1 P_2} = (R_1 \hat{R}_1 R_2 \hat{R}_2)$$

wo R_1 und $\hat{R}_1$ bzw. R_2 und $\hat{R}_2$ die Enden der auf Modellgerade $P_1 P_2$ im Punkten P_1 bzw. P_2 aufgestelltem senkrechten Geraden sind. Die Ende der Senkrechten

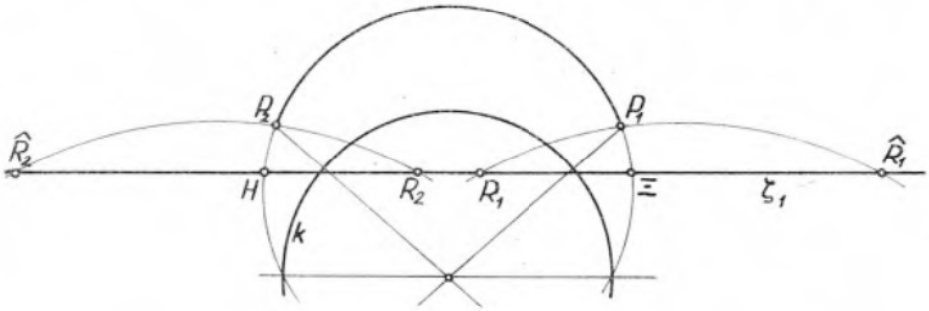

Fig. 3

sei bezeichnet so, daß R_1 und R_2 auf einige Strecke fallen, welche auf ζ_1 die Ende von $P_1 P_2$ bestimmen. (Fig. 3).

Behauptung 4. 7. *$\overline{P_1 P_2} = \overline{P'_1 P'_2}$ ist dann, und nur dann, wenn $\Delta \overline{P_1 P_2} = \Delta \overline{P'_1 P'_2}$.*

Beweis. Wenn $\overline{P_1 P_2} = \overline{P'_1 P'_2}$ ist, dann gibt es eine solche Transformation, welche den P_1 in P'_1, den P_2 in P'_2 überführt, und gleichzeitig gehen die in diesen Punkten auf $P_1 P_2$ bzw. $P'_1 P'_2$ Senkrechte ineinander über. Zu der Transformation gehört eine auf den Enden bezügliche projektive Transformation. Deshalb, wenn wir die Vorschreibungen beachten, welche auf die Bezeichnung von R_i bzw. R'_i $(i=1, 2)$ in {4. 6′} gegeben wird, folgt schon leicht

$$(R_1 \hat{R}_1 R_2 \hat{R}_2) = (R'_1 \hat{R}'_1 R'_2 \hat{R}'_2)$$

oder

$$(R_1 \hat{R}_1 R_2 \hat{R}_2) = (\hat{R}'_1 R'_1 \hat{R}'_2 R'_2)$$

aber weil $(\hat{R}'_1 R'_1 \hat{R}'_2 R'_2) = (R'_1 \hat{R}'_1 R'_2 \hat{R}'_2)$ ist, so besteht nach 4. 6 $\Delta \overline{P_1 P_2} = \Delta \overline{P'_1 P'_2}$. Die Bedingung ist also notwendig.

Wenn aber $\Delta \overline{P_1 P_2} = \Delta \overline{P'_1 P'_2}$, das heißt

$$(R_1 \hat{R}_1 R_2 \hat{R}_2) = (R'_1 \hat{R}'_1 R'_2 \hat{R}'_2)$$

ist, ferner bestehen die folgenden Bezeichungen nach der Erklärung {4. 6} und nach senkrechten Modellgeraden:

(4. 5) $(\Xi \mathrm{H} R_1 \hat{R}_1) = -1$, $(\Xi \mathrm{H} R_2 \hat{R}_2) = -1$, $(\Xi' \mathrm{H}' R'_1 \hat{R}'_1) = -1$, $(\Xi' \mathrm{H}' R'_2 \hat{R}'_2) = -1$.

Da aber führt die Projektivität

$$\Pi \begin{cases} R_1 \hat{R}_1 R_2 \hat{R}_2 \\ R'_1 \hat{R}'_1 R'_2 \hat{R}'_2 \end{cases}$$

die durch die Punktpaare $(R_1, \hat{R}_1)$ und $(R_2, \hat{R}_2)$ bestimmte hyperbolische Involution I in die durch die Punktpaare $(R_1', \hat{R}_1')$ und $(R_2', \hat{R}_2')$ bestimmte hyperbolischen Involution I' und natürlich ihre Doppelpunkte Ξ, H in die Doppelpunkte Ξ', H' über. Nehmen wir die zu Π gehörende Transformation T. Diese führt die Modellgerade ΞH in die Modellgerade Ξ'H' und die $R_1\hat{R}_1$ bzw. $R_2\hat{R}_2$ in die $R_1'\hat{R}_1'$ bzw. $R_2'\hat{R}_2'$ über, das heißt es geht P_1 in P_1' und P_2 in P_2' über. Dies bedeutet nach {4, 4} daß $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1'P_2'}$ ist. Die Bedingung ist auch genügend.

Bemerkung I. Die zu der Projektivität $\Pi_1 \begin{cases} R_1\hat{R}_1R_2\hat{R}_2 \\ \hat{R}_1'R_1'\hat{R}_2'R_2' \end{cases}$ gehörende Transformation T_1 führt die P_1 in P_1', und P_2 in P_2' über. Die T führt die ausgewählte Seite von ΞH in die eine Seite von Ξ'H', die T' aber in die andere Seite über.

Bemerkung II. Man kann leicht einsehen, daß die Transformation T auch die Punkte der Strecke $\overline{P_1P_2}$ in die Punkte der Strecke $\overline{P_1'P_2'}$ überführt.

2. Die Axiome der hyperbolischen ebenen Geometrie sind in dem Modell gültig.

Zuerst stellen wir die Axiome der ebenen hyperbolischen Geometrie zusammen. Diese Axiome hat Hilbert angewendet, als er die hyperbolische Geometrie ohne die Stetigkeitsaxiome aufgebaut hat. ([5], S. 168.)

I. Axiome der Verknüpfung

I_1. *Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade.*
I_2. *Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.*
I_3. *Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.*

II. Axiome der Anordnung.

II_1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt auch B zwischen C und A.*
II_2. *Wenn A und B zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es wenigstens einen Punkt C, der zwischen A und B liegt und wenigstens einen Punkt D, so daß B zwischen A und D liegt.*
II_3. *Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den Beiden anderen liegt.*
II_4. *Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegenen Punkte und a einen Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft; falls nun diese Gerade durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch durch einen Punkt der Strecke BC oder der Strecke AC.*

III. Axiome der Kongruenz

III_1. *Wenn A, B zwei Punkte der Geraden a sind, und A′ ein Punkt einer Geraden a′ ist, so kann man auf einer gegebenen Hälfte der Geraden a′ von A′ aus stets einen und nur einen Punkt B′ finden, so daß die Strecke AB der Strecke A′B′ kongruent* *oder gleich ist, in Zeichen* $AB \equiv A'B'$. *Jede Strecke ist sich selbst kongruent, in Zeichen:* $AB \equiv AB$ *und* $BA \equiv AB$.

III_2. *Wenn die Strecke AB sowohl der Strecke A'B' als auch der Strecke A"B" kongruent ist, so ist auch A'B' der Strecke A"B" kongruent.*

III_3. *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf a und ferner A'B' und B'C' zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf einer Geraden a'; falls nun* $AB \equiv A'C'$ *und* $BC \equiv B'C'$ *gilt, so ist auch* $AC \equiv A'C'$.

III_4. *Es sei ein Winkel (hk), eine Gerade a' und eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute h' eine Halbgerade der Geraden a', die vom Punkte* 0 *ausgeht, dann gibt es eine und nur eine Halbgerade k', so daß der Winkel (hk) dem Winkel (h'k') kongruent oder gleich ist, in Zeichen:* $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$ *und daß zugleich alle Punkte des Winkelraums von* $\sphericalangle(h'k')$ *auf der gegebenen Seite von a' liegen.*

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, in Zeichen $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk)$ *und* $\sphericalangle hk \equiv \sphericalangle(kh)$.

III_5. *Wenn für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen* $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ *und* $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ *gelten, so gilt auch stets* $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C$.[6])

IV. Axiom von den sich schneidenden und nicht schneidenden Geraden

IV. *Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgeraden* a_1, a_2 *die nicht auf ein und derselben Geraden liegen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch* a_1, a_2 *gebildeten Winkelraum gelegene, von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.*

a) Die Gültigkeit der Axiome der Verknüpfung und der Anordnung

Die Axiome I_1 und I_2 sind in unserem Modell gültig, weil ein und nur ein Kreis, welcher Modellgerade hält, durch zwei Modellpunkte hindurchgeht. Nämlich geht ein und nur ein solcher Kreis — wie man schon in dem ersten Teil erwähnt hat — durch zwei Punkte, welcher den Kreis k in diametralen Punkten schneidet, ausgenommen solche Punktpaare, welche Antiinwers für k sind. Bei der Lage unseres Kreises k liegen aber die Antiinverspunkte der Modellpunkte auf derjenigen Hälfte der Möbiusebene, welche von M_1 verschieden ist. (Fig. 1.)

Die Gültigkeit der axiome I_3, II_1, II_2, und II_3 folgt daraus, daß diese Axiome in der Möbiusebene über dem Körper Q, wenn man von dem unendlichen Punkt absieht, [7]) gültig sind. Diese Axiome sind in der Möbiusebene auf den um seine Endpunkte bringenden eigentlichen Kreisbögen gültig, wenn man statt Gerade Kreisbögen sagt. Auf den eigentlichen Kreisbögen liegenden Modellgeraden sind solche Kreisbögen. Auf den Halbgeraden liegenden Modellgeraden sind auch diese Axiome gültig, weil sie Euklidische Halbgeraden sind.

Die Gültigkeit der Axiome II_4 folgt daraus, daß die sogenannten Kreisaxiome in der Möbiusebene über dem Körper Q gültig sind.

[6] Die Axiome I—III. sind mit den entspechenden Axiomen der Euklidischen Ebene indentisch.

[7] Diese Ebene ist mit der Euklidischen Ebene äquivalent.

b) Die Gültigkeit der Axiome der Kongruenz.

Hilfssatz I. *Es sind immer zu jeden Punktpaar (A, A_1) der auf einen Kreis liegenden elliptischer Involution zwei solche Punktpaare (B, B_1) und $\bar{B}, \bar{B}_1)$ der Involution bestimmbar, auf welchen*

$$(1) \qquad (AA_1BB_1) = (PQRS) \quad \textit{und} \quad (AA_1\bar{B}\bar{B}_1) = (PQRS)$$

ist, wo P, Q, R, S ein gegebenes Punktquadrupel ist und (P, Q) trennt (R, S). Da $(PQRS) = -1$ ist, so ist $(BB_1) = \bar{B}, \bar{B}_1)$.

Beweis. Wir werden die Punktpaare (B, B_1) und $(B_1\bar{B}_1)$ konstruieren. Die Konstruktion wird zuerst in dem Fall der auf einem eigentlichen Kreis k liegender Involution erledigt. (Fig. 4.) Es sei M das Zentrum der Involution und (A, A_1) ihr Punktpaar. Wir nehmen einen solchen Punkt N, für welchen $(AA_1MN) = (PQRS)$ ist. Wegen den für das Quadrupel P, Q, R, S vorgeschriebenen Bedingungen ist N der äußere Punkt von k. Zeichen wir aus k zu der k zwei Tangenten. Die zwei Berührungspunkte B_1 und $\bar{B}_1$ der zwei Tangenten sind je Punkte der zwei gesuchten Punktpaare, nämlich ist nach der Konstruktion $(PQRS) = (AA_1MN) = (AA_1BB_1) = (AA_1\bar{B}\bar{B}_1)$. Aus der Konstruktion folgt, daß die elliptische Involution keine andere (1) genügende Punktpaare hat und da $(PQRS) = -1$ ist, so ist $B = \bar{B}_1$.

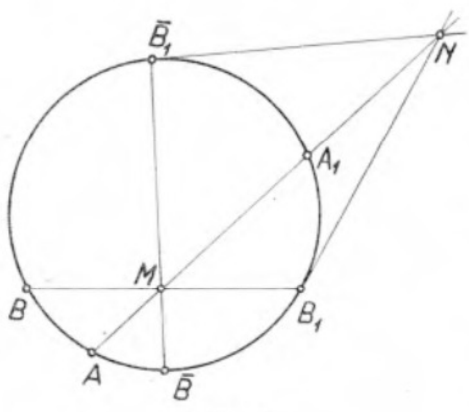

Fig. 4

Wenn die elliptische Involution auf einer Geraden liegt, dann muß man sei zuerst auf einen eigentlichen Kreis aus einem Punkt projizieren. Den obige Beweis kann man auch jetzt anwenden, weil bei der Projizierung das Doppelverhältnis und die zyklische Ordnung invariant ist.

Bemerkung. Aus der Konstruktion folgt auch, daß die zyklischen Ordnungen (AA_1B) und $(AA_1\bar{B})$ entgegengesetzt sind.

Hilfssatz II. *Es seien zwei Involutionen I und $\bar{I}$ gegeben und es sei ferner (Ξ, H) bzw. $(\bar{\Xi}, \bar{\mathrm{H}})$ ein Punktpaar von I bzw. von $\bar{I}$, dann gibt es eine solche Projektivität, welche I in $\bar{I}$ und (Ξ, H) in $(\bar{\Xi}, \bar{\mathrm{H}})$ überführt.*

Beweis. Es ist bekannt, daß die Projektivität die elliptische Involution in elliptische Involution überführt. Nach Hilfssatz I. bestimmen wir das Punktpaar (A, A_1) von I bzw. $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$ von $\bar{I}$ so, daß

$$(2) \qquad (\Xi\mathrm{H}A_1B_1) = -1, \quad \text{bzw.} \quad (\bar{\Xi}\bar{\mathrm{H}}\bar{A}_1\bar{B}_1) = -1$$

sei. Ein solches Punktpaar ist nach Hilfssatz I eindeutig bestimmt. Die Projektivitäten

$$(4, 12) \quad \Pi_1\colon \begin{cases} \Xi\mathrm{H}A_1B_1 \\ \bar{\Xi}\bar{\mathrm{H}}\bar{A}_1\bar{B}_1 \end{cases} \quad \Pi_2\colon \begin{cases} \Xi\mathrm{H}A_1B_1 \\ \bar{\Xi}\bar{\mathrm{H}}\bar{B}_1\bar{A}_1 \end{cases} \quad \Pi_3\colon \begin{cases} \Xi\mathrm{H}A_1B_1 \\ \bar{\mathrm{H}}\bar{\Xi}\bar{A}_1\bar{B}_1 \end{cases} \quad \Pi_4\colon \begin{cases} \Xi\mathrm{H}A_1B_1 \\ \bar{\mathrm{H}}\bar{\Xi}\bar{B}_1\bar{A}_1 \end{cases}$$

führen I in $\bar{I}$ über, weil (Ξ, H) in $(\bar{\Xi}, \bar{\mathrm{H}})$ und (A_1, B_1) in $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$ übergeht.

Bemerkung. Außer den vier Projektivitäten (4, 12) gibt es keine solche, welche die obige Eigenschaft haben.

Alle Projektivitäten welche I in $\bar{I}$ und (Ξ, H) in $(\bar{\Xi}, \bar{\mathrm{H}})$ überführen, führen $(A_1, B_1$ in $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$ über. Nämlich ist (A_1, B_1) bzw. $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$ das einzige in I bzw. in $\bar{I}$, welches (Ξ, H) bzw. $(\bar{\Xi}, \bar{\mathrm{H}})$ harmonisch trennt.

Das Axiom III_1 ist gültig. Es seien Ξ und H, die zwei Enden der Modellgeraden AB, und es liege B auf $\overrightarrow{AH}$. Wählen wir eine Halbgerade einer Geraden $\Xi'\mathrm{H}'$ aus, welche den Punkt A' bestimmt, zB. die Halbgerade $\overrightarrow{A'H'}$. Es seien R_1 und $\hat{R}_1$ bzw. R_2 und $\hat{R}_2$ die Enden solcher Modellgeraden welche auf $\Xi\mathrm{H}$ in A bzw. in B senkrecht sind, R_1' und R_2' die zwei Enden der in auf $\Xi'\mathrm{H}'$ senkrechten Geraden. Bei der Bezeichnung beachten wir was {4. 6} vorschreibt. Nehmen wir die zu der Projektivität

$$\Pi: \begin{cases} \Xi\ \mathrm{H}\ R_1\hat{R}_1 \\ \Xi'\mathrm{H}'\ R_1'\hat{R}_1' \end{cases}$$

gehörende Transformation T. Wegen der Normalität ist $(\Xi\mathrm{H}R_1\hat{R}_1) = (\Xi'\mathrm{H}'R_1'\hat{R}_1') = -1$. T führt $\Xi\mathrm{H}$ im $\Xi'\mathrm{H}'$, A in A' und die Halbgerade $\overrightarrow{AH}$ in $\overrightarrow{A'H'}$ über. Es sei $R_2' = \Pi(R_2)$ und $\hat{R}_2' = \Pi(R_2)$.

Wegen der projektiven Transformation der Enden ist

$$(R_1\hat{R}_1R_2\hat{R}_2) = (R_1'\hat{R}_1'R_2'\hat{R}_2'), \tag{4. 7}$$

ferner

$$(\Xi\mathrm{H}R_2\hat{R}_2) = (\Xi'\mathrm{H}'R_2'\hat{R}') = -1. \tag{4. 8}$$

Nach (4. 8) trennt sich $(\Xi'\mathrm{H}')$ und $(R_2'\hat{R}_2')$ deshalb $\Xi'\mathrm{H}'$ und R_2', $\hat{R}_2'$, die in einem Modellpunkt B' sich schneiden. Aus (4. 7) folgt, daß $AB \equiv A'B'$ ist. T führt $\overrightarrow{AH}$ in $\overrightarrow{A'H'}$ über. Ferner ist $B \in \overrightarrow{AH}$, deshalb $B' \in \overrightarrow{A'H'}$ das heißt B' tut der Forderung des Axioms III_1 genug.

Bemerkung. Aus der Bemerkung des Hilfssatzes II. folgt, daß ein und nur ein solcher Punkt B' existiert.

Die Gültigkeit des Axioms III_2. folgt einfach aus der Verwendung der Streckencharakteristik.

Die Gültigkeit des Axioms III_3. ist durch die Anwendung einer geeigneten Transformation T beweisbar.

Das Axiom III_4. ist gültig. Betrachten wir den Winkel $\sphericalangle(hk)$ dessen Scheitel O ist und es seien die Enden der Modellhalbgeraden h bzw. k Ξ_1 bzw. Ξ_2 und die Enden der ergänzenden Modellhalbgeraden seien H_1 bzw. H_2. Es sei $a' = \Xi_1'\mathrm{H}_1'$ gegeben und darauf liege der Punkt O. Es gehört auf ζ_1 nach Satz 1. zu O eine elliptische Involution. Nach Hilfssatz I ist in dieser Involution, wenn man die zu der Reihenfolge $\Xi_1'\mathrm{H}_1'\Xi_2'$ gehörende Richtung vorschreibt ein und nur ein Punktpaar $(\Xi_2'\mathrm{H}_2')$ für welches.

$$(\Xi_1'\mathrm{H}_1'\Xi_2'\mathrm{H}_2') = (\Xi_1\mathrm{H}_1\Xi_2\mathrm{H}_2 \tag{$*$}$$

ist. Es sei $O'\Xi_1' = h'$ und $O'\Xi_2' = k'$, da $(*)$ bedeutet, daß $\Delta(\sphericalangle hk) = \Delta(\sphericalangle h'k')$ gilt, und so ist nach Behauptung 4. 4 $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$.

Wenn wir die andere Richtung wählen, dann wird die Halbgerade k' auf der anderen Seite von a' liegen.

Das Axiom III_5. ist gültig. Aus dem obigen folgt, wenn die Bedingungen des Axioms sich erfüllen die Existenz einer solchen Transformation T, welche das Dreieck ABC in den Dreieck $A'B'C'$ überführt, so daß $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ ist.

c) Die Gültigkeit des Axioms von der sich schneidenden und nicht schneidenden Geraden.

Die Gültigkeit dieses Axioms folgt daraus, daß das sogenannte Kreisaxiom in der Möbiusebene über dem Körper Q sich erfüllt.

Im obigen haben wir gezeigt, daß in unserem Modell die Axiome I—IV der hyperbolischen ebenen Geometrie gelten. Dieses ist ein Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie über dem Körper Q. Man kann leicht kontrollieren, daß die Eigenschaften der Halbebenenmodelle sich ebenfalls erfüllen (S. Teil I. Erklärung 2. 1). Dieses ist also ein Halbebenmodell. Ferner ist $\mathfrak{K}$ die Menge der Kreise, welche die Modellgeraden halten. Mit dieser hat man ein solches Halbebenenmodell konstruktiert, dessen Existenz in Satz 4. 1 behauptet wurde.

Die Eindeutigkeit unseres Modells folgt daraus, daß man — nach der Aufnahme von e und k — wegen der Eindeutigkeit der Erklärungen — nur ein Halbebenenmodell aufbauen kann.

§ 5. Die Halbebenenmodelle von parabolischem Typ der hyperbolischen ebenen Geometrie

Satz 5. 1. *Es sei M_1 ein Halbebene, die von Geraden e der Möbiusebene M über dem Körper Q bestimmt ist. Wenn irgendeine Menge $\mathfrak{K}$ der Kreise von M der Bedingung* a) *des Satzes* 3. 1. *genügt, dann hat die hyperbolische ebene Geometrie auf M_1 ein und nur ein Halbebenenmodell, in welchem die Menge der Kreise, welche die Geraden das Modells halten $\mathfrak{K}$ ist.*

BEWEIS. Satz 5. 1 ist ganz analog zu Satz 4. 1. Nur steht die Bedingung a) statt der Bedingung c). Aus dem Beweis werden wir nur jenen Teil herausheben, welcher sich auf Bedingung a) bezieht.

1. *Die Konstruktion des Modells vom parabolischen Typ.* [8])

Nehmen wir einen Punkt F auf, der auf derjenigen Hälfte von M liegt, welche nicht M_1 ist.

Erklärung {5. 1}. Unter Modellpunkten versteht man die Punkte von M. Die Modellgeraden sind die in M_1 fallenden Bögen der Kreise, welche durch den Punkt F gehen. (Fig. 5.)

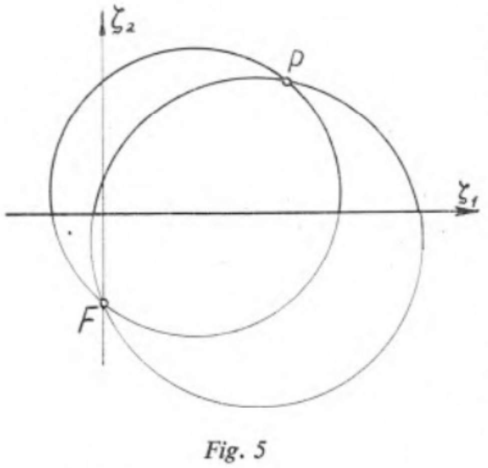

Fig. 5

[8] In diesem und in folgendem § sind die Vereinbarungen gültig, welche man im vorigen § für die Bezeichnungen gemacht hat.

Behauptung 5. 1. *Es gehört zu allen Modellpunkten P eineindeutig auf der Geraden ζ_1 eine elliptische Involution deren entsprechende Punktpaare die 2—2 Enden der durch den Punkt P gehenden Modellgeraden sind.*

Beweis. Unsere Behauptung folgt unmittelbar aus der Erklärung der Modellpunkte und der Modellgeraden und aus der Verbindung, welche zwischen der Kreisreihe und der Involution besteht.

In dem Modell vom parabolischen Typ ist auch die allgemeine Streckencharakteristik {4. 6′} gültig, aber hier kann man eine einfachere Streckencharakteristik einführen.

Erklärung {5. 6}. Unter der Streckencharakteristik der Strecke P_1P_2 versteht man das Doppelverhältnis

$$\Delta \overline{P_1 P_2} = (\Xi \mathrm{H} P_2 P_1) \tag{5. 1}$$

wo Ξ und H zu P_1P_2 gehörende zwei Enden sind, und die zwei Enden bezeichnet man so, dass P_1 auf die Halbgerade $\overrightarrow{P_1 H}$ liegt.

Behauptung 5. 7. $\overline{P_1P_2} \equiv \overline{P_1'P_2'}$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\Delta \overline{P_1 P_2} = \Delta \overline{P_1' P_2'} \tag{5. 2}$$

ist.

Behauptung 5. 7′. *Bei der Transformation T ist das Doppelverhältnis auf der Modellgeraden invariant.*

Auf den Beweis dieser zwei Behauptungen wird in dem §. 8. eingegangen.

2. *Der Beweis der Gültigkeit der Axiome* I—IV *und der Eindeutigkeit des Modells*

Es kann wie in §. 4. geschehen.

Der Beweis des Satzes 5. 1 ist damit beendet.

§ 6. Die Halbebenenmodelle von elliptischem Typ der hyperboliischen ebenen Geometrie

Satz 6. 1. *Es sei M_1 eine Halbebene, die von Geraden e der Möbiusebene M über dem Körper Q bestimmt ist. Wenn irgendeine Menge $\mathfrak{K}$ der Kreise von M der Bedingung* b) *des Satzes* 3. 1 *genügt, dann hat die hyperbolische ebene Geometrie auf M_1 ein und nur ein Halbebenenmodell, in welchem die Menge der Kreise, welche die Geraden des Modells halten $\mathfrak{K}$ ist.*

Beweis. Hier werden wir ebenfalls nur jenen Teil herausheben, welcher sich auf Bedingung b) bezieht.

Die Konstruktion des Modells von hyperbolischem Typ.

Nehmen wir einem Kreis k auf, welcher keinen Punkt von M_1 enthält.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

A) Der Kreis k ist ein eigentlicher Kreis k_1 (Fig. 6.)

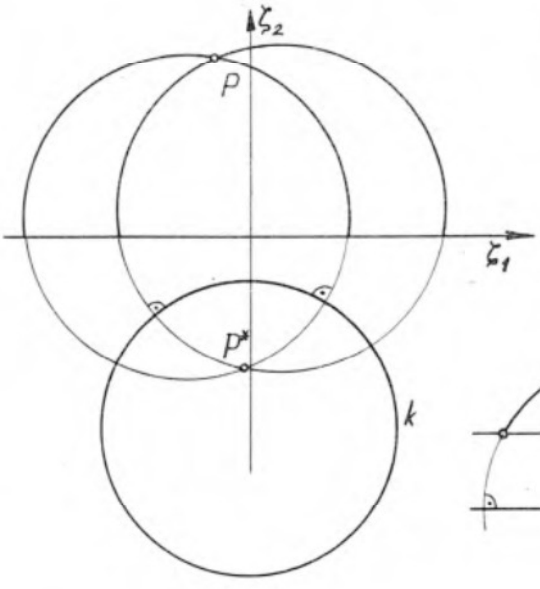

Fig. 6

B) Der Kreis k ist eine mit $\zeta_1=e$ parallele Gerade a (Fig. 7.)

k_1 sei

$$\zeta_1^2+(\zeta_2-\nu)^2=1, \quad \nu\leqq -1$$

a sei

$$\zeta_2=\alpha, \quad \alpha\leqq 0.$$

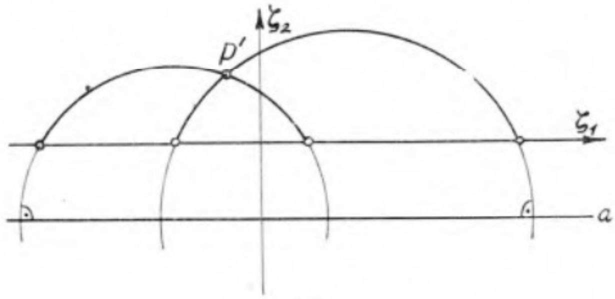

Fig. 7

Erklärung {6. 1}. Die Modellgeraden sind die in M_1 fallenden Bögen der Kreise, welche k_1 bzw. a senkrecht schneiden.

Behaputung 6. 1. ist dieselbe wie Behauptung 4. 1. und 5. 1.

Beweis. Er ist dem Beweis der Behauptung 4. 1 ähnlich. Man hat nur statt den den Kreis k in diametralen Punkten schneidenden Kreisen die den Kreis k_1 bzw. die Gerade a orthogonal schneidende Kreise zu schreiben.

Bemerkung. Von den Modellen sind die zu $\alpha=0$ gehörenden Modelle beachtungswert. In diesem Fall ist die Gerade a mit ζ_1 identisch und unser Modell ist das wohlbekannte Poincarésche Halbebenenmodell. Dieses klassische Modell kann also auch mit unserem einheitlichen Verfahre gewonnen werden.

§ 7. Die Umkehrung des Hauptzatzes

Satz 7. *Es sei M_1 eine Halbebene, die von der Geraden e der Möbiusebene M über dem Körper Q bestimmt ist. Wenn irgendeine Menge $\mathfrak{K}$ der Kreise von M der einer der Bedingungen* a), b), c) *des Satzes* 3. 1 *genügt, dann hat die hyperbolische ebene Geometrie auf M_1 ein und nur ein Halbebenenmodell, in welchem die Menge der Kreise, welche die Geraden des Modells halten, $\mathfrak{K}$ ist.*

Beweis. Aus den Sätzen 4. 1, 5. 1 und 6. 1 folgt die Gültigkeit des Satzes 7.

§ 8. Die Kreismodelle der hyperbolischen ebenen Geometrie

Es ist bekannt, daß Poincarésche Halbebenenmodell mittels Inversion in den Poincaréschen Kreismodell der hyperbolischen ebenen Geometrie überführen kann. Diese Tatsache gründet sich darauf, daß die projektive Beziehung (das Doppelverhältnis) bei Inversion invariant ist. Die geeignete Inversion führt die Projektivität des Endes welches auf ζ_1 liegt, auf dem Kreis über. Diese Inversion bewahrt die Eineindeutigkeit der Transformation T für die Modellgeraden und die Modellpunkte. Ferner kann man feststellen, daß die Axiome I—IV auch nach der Inversion gültig sind. Wegen den obigen Eigenschaften der Inversion kann man alle Halbebenenmodelle in Kreismodelle überführen, wenn man eine solche Inversion benützt welche ζ_1 in einen eigentlichen Kreis überführt. Es gilt natürlich auch umgekehrt: die Kreismodelle kann man mit den geeigneten Inversionen in die Halbebenenmodelle überführen.

a) *Erörterung der interessenteren Kreismodelle der hyperbolischen ebenen Geometrie.*

I. *Die Kreismodelle von parabolischem Typ*

1. *Das Cayley—Kleinische Modell.* Auf den Halbebenenmodell von parabolischem Typ wenden wir eine solche Inversion an, welche den Punkt F in den unendlichen Punkt Ω von M überführt. In diesem Falle geht die Gerade e in einen Kreis k über. Die Modellgeraden sind diejenigen Strecken der den Kreis k schneidenden Geraden, welche im Inneren von k sind. In diesen Modellen kann man die Entsprechende von Transformation T auf die ganze projektive Ebene erweitern und damit bekommt man eine solche Projektivgruppe, welche k in sich selbst und seine Innere in seine Innere überführt. Hier ist die Streckencharakteristik {5. 6′} gültig und das Doppelverhältnis ist invariant. Wenn man aber das Cayley—Kleinsche Modell mit Inversion in den Halbebenenmodell überführt, dann kann man einfach die Gültigkeit des Satzes 5. 7 und 5. 7′ folgern.

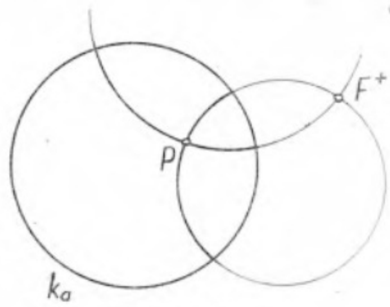

Fig. 8

Aus dem obigen folgt, daß man das Halbebenenmodell von parabolischem Typ als eine halbebene Version des Cayley—Kleinschen Modells ansehen kann.

2. *Eine Version des Cayley—Kleinsche Modells.* Den Punkt F des parabolischen Halbebenenmodells führen wir mit Inversion in den Punkt F^*, welches vom Ω verschieden ist, über. Die die Modellgeraden haltenden Kreise sind hier die den k_a schneidenden und durch F^* gehenden Kreise. (Fig. 8.)

II. *Die elliptischen Kreismodelle*

Auf die elliptischen Halbebenenmodelle wenden wir eine solche Inversion an, welche die Gerade e in den Kreis k_a und die Halbebene M_1 in das Innere von k_a überführt, und dabei gehe der Kreis k in den Kreis k_s über. In diesem Falle sind die die Modellgeraden haltenden Kreise auf k_s senkrecht und sie schneiden k_a

(Fig. 9.). Die Modellpunkte sind die inneren Punkte von k_a. Im Falle der verschiedenen elliptischen Kreismodelle kann k_s mit k_a identisch sein (das klassische Poincarésche Kreismodell), k_s ist möglicherweise ausser k_a sogar k_s und k_a berührten möglicherweise einander äußerlich.

III. *Die Kreismodelle von hyperbolischem Typ*

Wenden wir auf den Halbebenenmodell von hyperbolischem Typ eine solche Inversion an, welche die e in einen eigentlichen Kreis k_a überführt und M_1 in das Innere von k_a. Die die Modellgeraden haltenden Kreise sind solche Kreise, welche

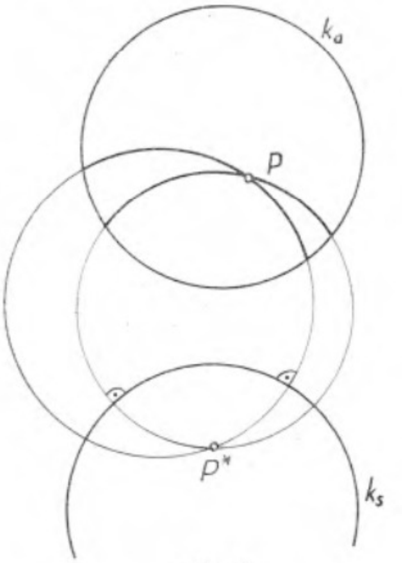

Fig. 9

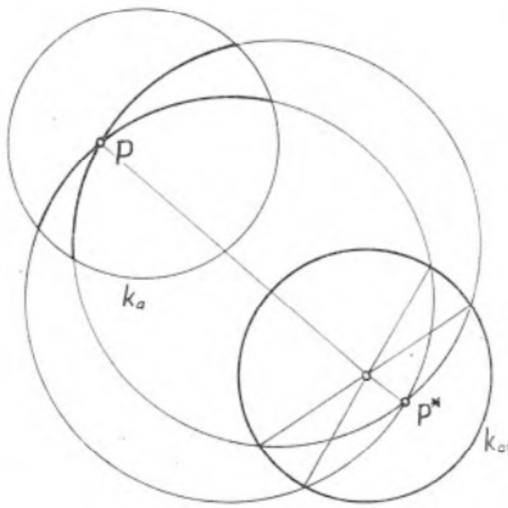

Fig. 10

einen Kreis k_{as} in diametralen Punkten und k_a ebenfals schneiden. Nämlich gehören die die Modellgeraden haltenden Kreise zu den invarianten Kreisen einer Antiinvolution zweiter Art und diese gehen nach der Inversion in einen solchen über. (Fig. 10.) Der Mittelpunkt von k_{as} ist ein äußerlicher Punkt von k_a.

b) *Die direkte Herleitung der Kreismodelle der hyperbolischen ebenen Geometrie.*

Nicht nur mit Inversion kann man die Kreismodelle herleiten sondern auch auf direktem Wege. Dies geschieht ganz analog, wie es in unserer Arbeit für die Halbebenenmodelle steht. Bei den Kreismodellen nimmt ein eigentlicher sogenannter Grundkreis die Rolle der Geraden e über. In der Möbiusebene spielen aber — wie man erwähnt hat — die Kreise und die Gerade eine ebensolche Rolle. Es ist leicht einzusehen, daß alle Behauptungen, welche man für die Gerade e gemacht hat, für den eigentlichen Grundkreis auch gültig sind. Man kann auch auf der Fall des eigentlichen Grundkreises alle andere Erklärungen, Behauptungen, Erwägungen umschreiben. Nach entsprechenden Umschreibungen kann man direkt zu allen Kreismodellen der hyperbolischen ebenen Geometrie über dem Körper Q gelangen. So können wir zwischen den anderen einheitlich auch die zwei Klassischen (Poincarésche und Cayley—Kleinsche) Kreismodelle aufbauen.

Literatur

[1] F. BACHMANN, Eine Begründung der absolute Geometrie in der Ebene, *Math. Ann.*, **113** (1937), 424—451.
[2] W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie III., *Berlin*, 1929.
[3] J. BOLYAI, Appendix (Szerkesztette Kárteszi Ferenc) *Budapest, 1952.*
[4] GY. HAJÓS, Bevezetés a geometriába, *Budapest*, 1960.
[5] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, *Stuttgart*, 1956.
[6] B. KERÉKJÁRTÓ, A geometria alapjairól, I. kötet, *Szeged*, 1937.; II. kötet, *Budapest*, 1944.

(Eingegangen am 18. Juni 1967.)