Über spezielle bahntreue Abbildungen

Von K. BÉLTEKY (Debrecen)

1. Einleitung

Es sei $\mathfrak{M}$ eine n-dimensionale [1]) differenzierbare Mannigfaltigkeit und es bezeichne (x^i) das lokale Koordinatensystem [2]) der $\mathfrak{M}$. Über diesem Koordinatensystem sind durch die Gleichungen

$$x^i = x^i(s, a^1, \ldots, a^{2n-2}) \tag{1. 1}$$

die Kurven gegeben und diese werden die Bahnen der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ genannt, wenn durch jedes Linienelement (x^i, v^i) nur eine Kurve der Schar (1. 1) hindurchgeht. J. DOUGLAS [3]) hat festgelegt, daß die Integralkurven des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i(x, x') = 0, \tag{1. 2}$$

wo [4]) die $G^i(x, v)$ bezüglich der Veränderlichen v^i positive homogene Funktionen zweiten Grades sind, die Eigenschaften der Kurvenschar (1. 1) haben. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ mit den Kurven (1. 2) werden wir im folgenden Bahnraum nennen.

In der Theorie der Bahnräume spielen die affinzusammenhängenden Bahnräume eine wichtige Rolle. Diese Bahnräume können wir folgendermaßen charakterisieren: die Größen

$$G^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 G^i}{\partial v^j \partial v^k} \tag{1. 3}$$

sind in den unteren Indizes symmetrisch und ihr Transformationsgesetz ist

$$\bar{G}^k_{ab} = G^i_{lj} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}, \tag{1. 4}$$

wenn wir eine beliebige reguläre analytische Koordinatentransformation durchführen. Wenn die G^i_{jk} Funktionen des Linienelementes (x^i, v^i) sind, so wird der affinzusammenhängende Bahnraum mit P_n bezeichnet. Anderseits, wenn

$$2G^i(x, v) \equiv \Gamma^i_{ab}(x) v^a v^b \tag{1. 5}$$

---

[1]) In dieser Arbeit ist $n \geqq 3$.

[2]) S. A. RAPCSÁK [8].

[3]) S. J. DOUGLAS [3].

[4]) Mit ' wird die Ableitung nach dem Bahnparameter s bezeichnet.

sind, so hängt G^i_{jk} nur von dem Zentrum des Linienelementes ab, somit haben wir einen affinzusammenhängenden Bahnraum im Sinne von H. WEYL und bezeichnen denselben mit A_n.

In dieser Arbeit werden wir das folgende Problems untersuchen: Unter welchen Bedingungen können wir den affinzusammenhängenden Bahnraum P_n auf einen metrischen affinzusammenhängenden Raum A_n, d.h. auf einen Riemannschen Raum R_n bahntreu abbilden?

Es ist zu bemerken, daß die später vorkommenden Funktionen zu der Klasse C^k $(k \geqq 4)$ gehören, wo C^k die Klasse der in ihren Veränderlichen k-mal stetig derivierbaren Funktionen bezeichnet.

2. Die Krümmungstensoren und die kovarianten Ableitungen

Es sei gegeben ein affinzusammenhängender Bahnraum P_n mit den Bahnen (1. 2). Führt man die Beziehungen

$$\frac{\partial G^i}{\partial v^k} = G^i_k, \quad \frac{\partial G^i_k}{\partial v^j} = G^i_{jk}, \quad \frac{\partial G^i_{jk}}{\partial v^l} = G^i_{ljk}, \ldots,$$

ein, so sind die BERWALD-schen [5]) Krümmungsgrößen des P_n nach Definition

$$K^i_j(x, v) = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G^i_j}{\partial x^r} v^r + 2G^i_{jr}G^r - G^i_r G^r_j; \tag{2. 1}$$

$$K = \frac{1}{n-1} K^r_r, \tag{2. 1a}$$

$$K^i_{jk}(x, v) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial K^i_k}{\partial v^j} - \frac{\partial K^i_j}{\partial v^k}\right), \tag{2. 2}$$

$$K^i_{hjk}(x, v) = \frac{\partial K^i_{jk}}{\partial v^h} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 K^i_k}{\partial v^h \partial v^j} - \frac{\partial^2 K^i_j}{\partial v^h \partial v^k}\right) = \tag{2. 3}$$

$$= \frac{\partial G^i_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_{hj}}{\partial v^r} G^r_k - \left(\frac{\partial G^i_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial G^i_{hk}}{\partial v^r} G^r_j\right) + G^r_{hj} G^i_{rk} - G^r_{hk} G^i_{rj}.$$

Wegen der Homogenitätseigenschaft der $G^i(x, v)$ sind der Tensor (2. 1) und nach ihrer Definition die Tensoren (2. 2), (2. 3) in den v^i positiv homogen von der Ordnung zwei, eins, bezw. Null. Weiter führen wir die Tensoren

$$K_j \overset{\text{def}}{=} K^r_{jr}, \quad K_{hj} = K^r_{hjr} = \frac{\partial K_j}{\partial v^h}$$

ein. Aus (2. 3) erhält man die Identitäten:

$$K_{hj} - K_{jh} = -K^r_{rhj}, \tag{2. 4}$$

$$\frac{\partial K_{hj}}{\partial v^l} = \frac{\partial K_{lj}}{\partial v^h}. \tag{2. 5}$$

[5]) In dieser Arbeit wenden wir die Berwaldsche Theorie derBahnräume an. S. L. BERWALD [1]

Der Tensor K^i_{hjk} ist in den unteren Zeigern zyklisch symmetrisch, in den Zeigern j, k schiefsymmetrisch:

(2. 6) $$K^i_{hjk}+K^i_{jkh}+K^i_{khj} = 0,$$

(2. 7) $$K^i_{hjk}+K^i_{hkj} = 0,$$

und befriedigt die Bianchische Identität:

(2. 8) $$K^i_{hjk|l}+K^i_{hkl|j}+K^i_{hlj|k}+K^m_{jk}G^i_{mhl}+K^m_{kl}G^i_{mhj}+K^m_{lj}G^i_{mhk} = 0.$$

Die (2. 8) betreffende kovariante Ableitung für einen beliebigen Tensor $T^i_j(x, v)$ ist Definitionsgemäß

(2. 9) $$T^i_{j|k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_j}{\partial v^r} G^r_k + T^r_j G^i_{rk} - T^i_r G^r_{jk}$$

und diese kovariante Ableitung genügt den folgenden Vertauschungsformeln:

(2. 10) $$T_{hk|i|j} - T_{hk|j|i} = -\frac{\partial T_{hk}}{\partial v^r} K^r_{ij} - T_{rk}K^r_{hij} - T_{hr}K^r_{kij},$$

(2. 11) $$\left(\frac{\partial T_{hl}}{\partial v^k}\right)_{|j} - \frac{\partial T_{hl|j}}{\partial v^k} = T_{rl}G^r_{hkj} + T_{hr}G^r_{lkj}.$$

In dem Raum A_n sind die Bahnen wegen (1. 5) mit dem Differentialgleichungssystem

(2. 12) $$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{ab}(x)\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} = 0$$

gegeben. Bekanntlich ist

(2. 13) $$R^i_{jkl}(x) = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^i_{rl} - \Gamma^r_{jl}\Gamma^i_{rk}$$

der Krümmungstensor des affinzusammenhängenden Bahnraumes A_n. Führt man den verjüngten Krümmungstensor

(2. 14) $$R_{ij} = R^s_{ijs}$$

ein, so gilt

(2. 15) $$R_{ij} - R_{ji} = -R^s_{sij}.$$

Die Identitäten (2. 6) und (2. 7) in A_n sind auch gültig und die Bianchishe Identität hat die folgende Gestalt:

(2. 16) $$R^h_{ijk;l} + R^h_{ikl;j} + R^h_{ilj;k} = 0.$$

Das in (2. 16) auftretende Zeichen „;" bedeutet die kovariante Ableitung, die zu dem Zusammenhang $\Gamma^i_{jk}(x)$ gehört. Dieselbe wird angewendet, wenn die Tensoren nur von dem Zentrum des Linienelementes abhängen. Es ist für einen beliebigen Tensor T^i_j nach der Definition

(2. 17) $$T^i_{j;k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + T^r_j\Gamma^i_{rk} - T^i_r\Gamma^r_{jk},$$

und die zugehörige Vertauschungsformel z.B.

$$T_{j;i;k} - T_{j;k;i} = -T_r R^r_{kij}. \tag{2.18}$$

Zwecks später Anwendung führen wir die folgende Verallgemeinerung der mit $\Gamma^i_{jk}(x)$ definierten kovarianten Ableitung ein:

$$\nabla_l S^i_j(x, v) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial S^i_j}{\partial x^l} - \frac{\partial S^i_j}{\partial v^r} \Gamma^r_{la} v^a + S^r_j \Gamma^i_{rl} - S^i_r \Gamma^r_{jl}, \tag{2.19}$$

weil im allgemeinsten Falle die Größen vom Linienelement (x^i, v^i) abhängen. Wenn die Größen von der Richtung des Linienelementes unabhängig sind, dann gilt

$$\nabla_l T^i_j(x) \equiv T^i_{j;l}.$$

Für die Ableitungen (2. 19) und $\partial \ldots / \partial v^i$ bestehen Vertauschungsformeln von welchen wir nur die Folgenden brauchen:

$$\nabla_l \nabla_k T^i_j(x, v) - \nabla_k \nabla_l T^i_j(x, v) = -\frac{\partial T^i_j}{\partial v^r} R^r_{akl} v^a + T^r_j R^i_{rkl} - T^i_r R^r_{jkl}, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \nabla_k T^i_j}{\partial v^l} - \nabla_k \frac{\partial T^i_j}{\partial v^l} = 0. \tag{2.21}$$

Wenn A_n ein metrischer Raum ist, d.h. wenn ein metrischer Fundamentaltensor $g_{ij}(x)$ existiert, so ist

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \tag{2.22}$$

und wegen der Symmetrie des Tensors R_{ij} gilt statt der Identität (2. 15) die Beziehung

$$R^s_{sjk} = 0. \tag{2.23}$$

3. Die invariante Tensoren der bahntreuen Abbildungen

Unter den Bahnen des affinzusammenhängenden Bahnraumes P_n verstehen wir die Integralkurven des Differentialgleichungssystems (1. 2) zusammen mit allen zulässigen Parametertransformationen, die auf den Bahnen gleichzeitig eingeführt werden können. Sei

$$s = s(t) \qquad (ds/dt > 0)$$

eine solche Transformation, so daß das Differentialgleichungssystem der Bahnen die Gestalt

$$[\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x})]\dot{x}^k = [\ddot{x}^k + 2G^k(x, \dot{x})]\dot{x}^i \tag{3.1}$$

annimmt, wo die Ableitung nach t durch Punkte bezeichnet wird. ((3. 1) ist eine parameterinvariante Form des Differentialgleichungssystems der Bahnen.)

Der Bahnparameter s wird ein affiner Parameter genannt, wenn das Differentialgleichungssystem der Bahnen die Gestalt (1. 2) hat. Zwischen den affinen Parametern $\bar{s}$ und s bestehen die folgende Relation:

$$\bar{s} = a \cdot s + b \qquad (a \neq 0,\ b\colon \text{ konstante}).$$

Betrachten wir die affinzusammenhängenden Bahnräume P_n und $\bar{P}_n$, und die Abbildung $\mathfrak{B}\colon P_n \to \bar{P}_n$. Die Abbildung $\mathfrak{B}$ wird hahntreue Abbildung — im Falle metrischer Räume geodätische Abbildung — genannt, wenn die Bahnen des Raumes für $\mathfrak{B}$ ineinander übergehen.

Bekannt ist der folgende [6])

Satz A. *Die Abbildung $\mathfrak{B}$ überführt die Bahnen* (3. 1) *des P_n dann und nur dann in die Bahnen*

$$(\ddot{x}^i + 2\bar{G}^i)\dot{x}^k = (\ddot{x}^k + 2\bar{G}^k)\dot{x}^i \tag{3. 2}$$

des $\bar{P}_n$, falls

$$\bar{G}^i(x, v) = G^i(x, v) + p(x, v)v^i \tag{3. 3}$$

gilt, wobei $p(x, v)$ eine in v^i positive homogene skalare Funktion ersten Grades ist.

Auf Grund dieses Satzes bleiben die Tensoren

$$W^h_j = K^h_j - K\delta^h_j - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial K^r_j}{\partial v^r} - \frac{\partial K}{\partial v^j}\right) v^h, \tag{3. 4}$$

$$W^h_{jk} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial W^h_k}{\partial v^j} - \frac{\partial W^h_j}{\partial v^k}\right), \tag{3. 5}$$

$$W^h_{ijk} = \frac{\partial W^h_{jk}}{\partial v^i} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 W^h_k}{\partial v^i \partial v^j} - \frac{\partial^2 W^h_j}{\partial v^i \partial v^k}\right) \tag{3. 6'}$$

bei bahntreuen Abbildungen unverändert, wo $\delta^j_h = 1$ für $j = h$, $\delta^j_h = 0$ für $j \neq h$ ist. Der Weylsche Projektivkrümmungstensor (3. 6′) hat auf Grund ihrer Definition folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} W^h_{ijk} = {} & K^h_{ijk} + \frac{1}{n+1}\frac{\partial(K_{jk} - K_{kj})}{\partial v^i} v^h + \frac{1}{n+1}\delta^h_i (K_{jk} - K_{kj}) + \\ & + \frac{1}{n^2-1}\delta^h_j \left(nK_{ik} + K_{ki} + \frac{\partial K_{km}}{\partial v^i} v^m\right) - \frac{1}{n^2-1}\delta^h_k \left(nK_{ij} + K_{ji} + \frac{\partial K_{jm}}{\partial v^i} v^m\right). \end{aligned} \tag{3. 6}$$

Der Tensor $W^h_{i\ jk}$ ist in den unteren Zeigern zyklisch symmetrisch, in den Zeigern j, k schiefsymmetrisch:

$$W^h_{ijk} + W^h_{jki} + W^h_{kij} = 0, \tag{3. 7}$$

$$W^h_{ijk} + W^h_{ikj} = 0, \tag{3. 8}$$

und man sieht leicht ein, daß

$$W^h_{hjk} = 0, \quad W^h_{ihk} = 0, \quad W^h_{ijh} = 0 \tag{3. 9}$$

sind.

---

[6]) S. L. BERWALD [1].

Bei bahtreuen Abbildungen ändert sich der Douglassche Tensor [7])

$$D^h_{ijk} = G^h_{ijk} - \frac{1}{n+1}(G^m_{ijm}\delta^h_k + G^m_{jkm}\delta^h_i + G^m_{kim}\delta^h_j) - \frac{1}{n+1} G^m_{ijkm} v^h \tag{3.10}$$

ebenfalls nicht, und er genügt den folgenden Relationen:

$$D^h_{hjk} = 0, \quad D^h_{ihk} = 0, \quad D^h_{ijh} = 0. \tag{3.11}$$

Jetzt betrachten wir einen Riemannschen Raum R_n. Führt man auf den Bahnen (2. 12) des R_n an Stelle des ausgezeichneten Parameters s einen beliebigen zulässigen Parameter t ein, so nimmt das Differentialgleichungssystem der Bahnen die Gestalt

$$(\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jl}\dot{x}^j\dot{x}^l)\dot{x}^k = (\ddot{x}^k + \Gamma^k_{jl}\dot{x}^j\dot{x}^l)\dot{x}^i \tag{3.12}$$

an, wobei durch Punkte die Ableitung nach t bezeichnet wird.

Bekanntlich gilt der folgende

Satz B. [8]) *Ein Riemannscher Raum R_n wird auf den Riemannschen Raum $\bar{R}_n$ geodätisch abgebildet, falls*

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \varphi_j\delta^h_i + \varphi_i\delta^h_j \tag{3.13}$$

gilt, wobei φ_j ein kovariantes Vektorfeld ist, Γ^h_{ij} und $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ aber die Christoffelschen Symbole zweiter Art der Räume R_n bezw. $\bar{R}_n$ sind.

Auf Grund dieses Satzes ändert sich bei geodätischen Abbildung der Weylsche Tensor

$$W^i_{jkl}(x) = R^i_{jkl} + \frac{R_{lj}}{n-1}\delta^i_k - \frac{R_{jk}}{n-1}\delta^i_l \tag{3.14}$$

nicht, und er befriedigt die Identitäten (3. 7), (3. 8) und (3. 9).

4. Die spezielle bahntreuen Abbildungen

Es seien R_n und $\bar{R}_n$ zwei Riemannsche Räume. Für den Fall einer geodätischen Abbildung $R_n \to \bar{R}_n$ haben U. Dini [9]) und T. Levi—Civita [10]) den Zusammenhang zwischen den metrischen Grundtensoren der Räume R_n und $\bar{R}_n$ bestimmt. Wir werden die Geodätische Abbildung $R_n \to \bar{R}_n$ mit Hilfe des Tensors (3. 14) folgendermaßen charakterisieren:

---

[7]) S. J. Douglas [3].
[8]) S. L. P. Eisenhart [4].
[9]) S. U. Dini [2].
[10]) S. T. Levi—Civita [6].

Satz 1. *Der Raum R_n kann auf den Raum $\bar{R}_n$ dann und nur dann geodätisch abgebildet werden, wenn die folgenden Identitäten erfüllt sind:*

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk}, \tag{4. 1}$$

$$\bar{\nabla}_s \bar{W}^s_{ijk} - \nabla_s W^s_{ijk} = \frac{n-2}{n-1} W^s_{ijk}(\bar{\Gamma}^r_{rs} - \Gamma^r_{rs}),$$

wo W^h_{ijk} und $\bar{W}^h_{ijk}$ die Weylschen Tensoren der Räume R_n und $\bar{R}_n$ sind.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (4. 1) können wir durch eine Rechnung mit Hilfe von (3. 9) und von Satz B. leicht ableiten, weil bei einer geodätischen Abbildung der Weylsche Tensor (3. 14) Invariant ist.

Nehmen wir umgekehrt an, daß die Identitäten (4. 1) erfüllt sind.

Zuerst bestimmen wir die kovariante Ableitung des Vektors φ_j. Der Krümmungstensor (2. 13) des $\bar{R}_n$ hat bei geodätischen Abbildungen (3. 13) die folgende Gestalt:

$$\bar{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \delta^i_j(\nabla_l \varphi_k - \nabla_k \varphi_l) + \delta^i_k(\nabla_l \varphi_j - \varphi_l \varphi_j) - \delta^i_l(\nabla_k \varphi_j - \varphi_k \varphi_j). \tag{4. 2}$$

Verjüngen wir in (4. 2) die Indizes i und l, so ergibt sich

$$\bar{R}_{jk} = R_{jk} + \nabla_j \varphi_k - n\nabla_k \varphi_j + (n+1)\varphi_j \varphi_k. \tag{4. 3}$$

Jetzt vertauschen wir die Indizes j und k, multiplizieren durch n und addieren den erhaltenen Ausdruck zu (4. 3). So ergibt sich die gesuchte Formel:

$$\nabla_j \varphi_k = -\frac{1}{n-1}(\bar{R}_{jk} - R_{jk}) + \varphi_j \varphi_k. \tag{4. 4}$$

Wenn wir zeigen, daß ein kovariantes Vektorfeld φ_j existiert, welches den Gleichungen (3. 13) und (4. 4) genügt, so wird damit bewiesen sein, daß unsere Bedingung auch hinreichend ist.

Die Gleichungen (3. 13) und (4. 4) bestimmen ein Thomas—Veblensches gemischtes System. [11]) Dieses System wird integrierbar sein, wenn die Integrabilitätsbedingung von (4. 4), welche mit Rücksicht auf (2. 19), (3. 13) und (2. 20) die Gestalt

$$\frac{1}{n-1}\left(-\bar{\nabla}_l \bar{R}_{jk} + \bar{\nabla}_j \bar{R}_{lk} + \nabla_l R_{jk} - \nabla_j R_{lk}\right) + \varphi_r W^r_{ljk} = 0 \tag{4. 5}$$

hat, sich identisch erfüllt.

Aus (3. 13) folgt durch die kovariante Ableitung (2. 19) wegen (4. 4) unmittelbar

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk}.$$

Aber diese Gleichheit erfüllt sich wegen (4. 1) identisch.

Wir zeigen endlich, daß (4. 5) eine Folge der Bedingung (4. 1) ist. Aus der Bianchischen Identität ergibt sich durch Verjüngung, wenn der Krümmungstensor des R_n die aus (3. 14) ausgedrückte Gestalt hat,

$$\frac{1}{n-1}(\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik}) = \frac{1}{n-2}\nabla_s W^s_{ijk}. \tag{4. 6}$$

---

[11]) J. M. Thomas—O. Veblen [10].

Subtrahieren wir aus der ähnlichen Identität des $\overline{R}_n$ die (4. 6), so ergibt sich tatsächlich die Behauptung.

A. Rapcsák [12]) hat Untersuchungen über die folgende Frage angestellt: Wenn läßt sich ein Raum P_n auf einen anderen Raum $\overline{P}_n$ bahntreu abbilden? Diese allgemeinste Fragestellung wurde bei uns derart spezialisiert, daß ein Riemannscher Raum R_n statt des $\overline{P}_n$ betrachtet wird.

Seien somit P_n und R_n gegebene Räume, und bezeichnen wir die Abbildung $P_n \to R_n$ mit $\tilde{\mathfrak{B}}$, wenn einem Linienelement $(x, \dot{x})$ aus P_n das Linienelement $(x, \dot{x})$ des R_n zugeordnet ist.

Satz 2. *Die Abbildung $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist dann und nur dann bahntreu, wenn eine solche positive homogene skalare Funktion $p(x, v)$ bezüglich der Veränderlichen v existiert, daß*

$$G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{ab}(x)v^a v^b + p(x, v)v^i \tag{4. 7}$$

ist.

Beweis. Setzen wir (4. 7) ins (3. 1) ein, so ergibt sich (3. 12), somit ist die Bedingung (4. 7) hinreichend.

Setzen wir jetzt umgekehrt voraus, daß die Abbildung $\tilde{\mathfrak{B}}$ bahntreu ist, d. h. die Bahnen ineinander überführt.

Unter Berücksichtigung von (3. 1) und (3. 12) gilt

$$(2G^i - \Gamma^i_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b)\dot{x}^k = (2G^k - \Gamma^k_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b)\dot{x}^i.$$

Aus diesem Ausdruck können wir durch partielle Ableitung $\dot{x}^j$ und durch Verjüngung in den Indizes i, j

$$2G^k - \Gamma^k_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = \frac{1}{n+1}(2G^m_m - 2\Gamma^m_{ma}\dot{x}^a)\dot{x}^k \tag{4. 8}$$

bekommen. Führen wir die Bezeichnung

$$p(x, v) = \frac{1}{n+1}(G^m_m - \Gamma^m_{ma}v^a) \tag{4. 9}$$

ein, so wird (4. 8) equivalent mit (4. 7).

Satz 3. *Wenn wir den Raum P_n auf den Raum R_n bahntreu abbilden können, so wird der Weylsche Tensor* (3. 6) *von der Richtung des Linienelementes unabhängig sein.*

Beweis. Weil der Weylsche Tensor bei einer bahntreu Abbildung Invariant ist, ergibt sich die Behauptung aus dieser geometrischen Tatsache unmittelbar.

Es sei bemerkt, daß der Tensor (3. 6) in diesem Falle die folgende Gestalt hat:

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{\delta^h_j}{n-1}R_{ik} + \frac{\delta^h_k}{n-1}R_{ij}. \tag{4. 10}$$

[12]) S. A. Rapcsák [9].

Zwecks einer späteren Anwendung führen wir nach K. YANO [13]) affinen Zusammenhang

$$G^{*h}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} G^h_{ij} - \frac{1}{n+1} G^s_{sij} v^h \tag{4. 11}$$

ein. Dieser Zusammenhang verändert sich bei einer bahntreuen Abbildung ebenso, wie die Christoffelklammern zweiter Art des R_n. Ferner, bezeichne K^{*h}_{ijk} den Krümmungstensor des P_n und

$$T^i_{l*j} = \frac{\partial T^i_l}{\partial x^j} - \frac{\partial T^i_l}{\partial v^r} G^{*r}_{jk} v^k + T^r_l G^{*i}_{rj} - T^i_r G^{*r}_{lj} \tag{4. 12}$$

die kovariante Ableitung, die gehören zu (4. 11). Die Identitäten (2. 4), (2. 6), (2. 7) und (2. 8) sind auch gültig, wo

$$K^*_{ij} = K^{*m}_{ijm} \tag{4. 13}$$

ist.

Zwischen den Ableitungen (4.12) und (2. 9) bestehen die folgenden Relationen:

$$T^i_{j*k} = T^i_{j|k} + \frac{1}{n+1} T^i_r v^r G^s_{sjk} - \frac{1}{n+1} T^r_j v^i G^s_{srk}. \tag{4. 14}$$

Die Krümmungstensoren K^{*h}_{ijk} und K^h_{ijk} hängen voneinander folgendermaßen ab:

$$K^{*h}_{ijk} = K^h_{ijk} - \frac{1}{n+1} (G^s_{sij|k} - G^s_{sik|j}) v^h,$$

oder, falls wir die kovariante Ableitungen mit Rücksicht auf (2. 4) berechnen, nehmen diese die Gestalt

$$K^{*h}_{ijk} = K^h_{ijk} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\partial (K_{jk} - K_{kj})}{\partial v^i} v^h \tag{4. 15}$$

an.

Die Tensoren (3. 6) und (3.10) haben in Anbetracht des Zusammenhanges (4.11) die folgenden Formen

$$W^h_{ijk} = K^{*h}_{ijk} + \frac{1}{n+1} \delta^h_i (K^*_{jk} - K^*_{kj}) + \frac{1}{n^2-1} \delta^h_j (nK^*_{ik} + K^*_{ki}) - \frac{1}{n^2-1} \delta^h_k (nK^*_{ij} + K^*_{ji}), \tag{4. 16}$$

$$D^h_{ijk} = G^{*h}_{ijk} - \frac{1}{n+1} G^m_{ijm} \delta^h_k - \frac{1}{n+1} G^m_{ikm} \delta^h_j, \tag{4. 17}$$

wo

$$G^{*h}_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^{*h}_{jk}}{\partial v^i}$$

ist.

[13]) S. K. YANO [11].

Satz 4. *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein affinzusammenhängender Bahnraum P_n auf einen Riemannschen Raum R_n bahntreu abgebildet werden kann, ist die Gültigkeit der folgenden Identitäten:*

$$(4.18) \qquad 1^\circ \quad W'^h_{ijk} = W^h_{ijk}, \qquad 2^\circ \quad D'^h_{ijk} = 0,$$

$$3^\circ \quad W'^s_{ijk|s} - \nabla_s W^s_{ijk} = \frac{n-2}{n+1} W^r_{ijk}(G^s_{sr} - \Gamma^s_{sr}) -$$

$$-\frac{1}{n+1}(W^s_{rjk} v^r G^m_{mis} + W^s_{irk} v^r G^m_{mjs} + W^s_{ijr} v^r G^m_{mks}),$$

wo W'^h_{ijk}, D'^h_{ijk} *die Weylschen bezw. Douglaschen Tensoren des* P_n *und* W^h_{ijk} *der Weylsche Tensor des* R_n *sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist aus einer einfachen Rechnung ersichtlich, weil die vorkommenden Tensoren bei bahntreuer Abbildung ungeändert bleiben.

Aus dem Satz 2. ergibt sich wegen (4.11) der folgende

Satz 5. *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein affinzusammenhängender Bahnraum P_n auf einen Riemannschen Raum R_n bahntreu abgebildet werden kann, ist die Existenz einen solchen positiven homogenen skalaren Funktion $p(x, v)$ ersten Grades in den Veränderlichen v^i, deren partielle Ableitungen nach v^i dem Gleichungssystem*

$$(4.19) \qquad G^{*h}_{ij} = \Gamma^h_{ij} + p_i \delta^h_j + p_j \delta^h_i$$

genügen.

Zuerst bestimmen wir die kovariante Ableitung des p_i nach (2.19). Zu diesem Zweck gehen wir aus dem Zusammenhang zwischen K^{*h}_{ijk} und R^h_{ijk} bei bahntreuer Abbildung aus. Es ist

$$(4.20) \quad K^{*h}_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_i(\nabla_k p_j - \nabla_j p_k) + \delta^h_j \nabla_k p_i - \delta^h_k \nabla_j p_i - \left[\frac{\partial p p_i}{\partial v^k}\delta^h_j - \frac{\partial p p_i}{\partial v^j}\delta^h_k\right].$$

Verjüngt man über h, k, so erhalten wir wegen (4.13) und (2.14), daß

$$(4.21) \qquad K^*_{ij} = R_{ij} + \nabla_i p_j - n\nabla_j p_i + (n-1)\frac{\partial p p_i}{\partial v^j}$$

ist. Jetzt vertauschen wir die Indizes i und j, multiplizieren durch n und addieren den soeben erheltenen Ausdruck zu (4.21). Es ergibt sich die gesuchte Formel:

$$(4.22) \qquad \nabla_i p_j = -\frac{1}{n^2-1}(nK^*_{ji} + K^*_{ij}) + \frac{1}{n-1}R_{ij} + \frac{\partial p p_j}{\partial v^i}.$$

Ferner ergibt sich aus (4.9) mittels partieller Ableitung v^i und v^j, daß

$$(4.23) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial v^j} = \frac{1}{n+1} G^m_{mij}.$$

Die Gleichungen (4.19), (4. 22) und (4. 23) bilden ein Thomas—Veblensches gemischtes System. [14]) Zur Existenz des Vektorfeldes p_i ist es notwendig und hinreichend, daß die Integrabilitätsbedingungen für dieses System sich identisch erfüllen. Aber in diesem Falle ist der Raum P_n auf dem Raum R_n bahntreu abbildbar. Somit wird der Satz 4. gelten, wenn wir zeigen, daß die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen mit dem Bedingungen (4.18) equivalent sind.

Bildet man die Interabilitätsbedingungen der (4. 22) und (4. 23) und wendet man die Vertauschungsformeln (2. 20), (2. 21) an, so ergibt sich

$$\nabla_l \nabla_i p_j - \nabla_i \nabla_l p_j = \frac{\partial p_j}{\partial v^r} R^r_{ail} v^a - p_r R^r_{jil}, \tag{4. 24}$$

$$\nabla_l \frac{\partial p_i}{\partial v^j} - \frac{\partial \nabla_l p_i}{\partial v^j} = 0. \tag{4. 25}$$

Aus (4. 24) ergibt sich weiter wegen (4. 20), (4. 22) und (4. 29)

$$M^*_{ij*l} - M^*_{lj*i} + \frac{1}{n-1} \nabla_l R_{ij} - \frac{1}{n-1} \nabla_i R_{lj} + \frac{1}{n+1} G^m_{mjr} K^{*r}_{ail} v^a + p_r W^r_{jil} = 0, \tag{4. 26}$$

wo

$$M^*_{ij} \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n^2-1} (nK^*_{ji} + K^*_{ij}) \tag{4. 27}$$

ist.

Setzt man (4. 22) in (4. 20) ein, dann wird

$$W'^h_{ijk} = W^h_{ijk}.$$

Diese Gleichheit erfüllt sich wegen der Bedingung (4.18) 1°.

Wir werden zeigen, daß (4. 26) die Folge der Bedingung (4.18) 3° ist. Deshalb setzen wir in die Identität (2. 8) die kovarianten Ableitungen des aus (4.16) ausgedrückten Krümmungstensors K^{*h}_{ijk} ein, und erhalten

$$\begin{aligned} & W^h_{ijk*l} + W^h_{ikl*j} + W^h_{ilj*k} + \delta^h_l W^*_{ijk} + \delta^h_j W^*_{ikl} + \delta^h_k W^*_{ilj} + \\ & + \delta^h_i (W^*_{ljk} + W^*_{jkl} + W^*_{klj}) + W^m_{rjk} v^r D^h_{mil} + W^m_{rlj} v^r D^h_{mik} + W^m_{rkl} v^r D^h_{mij} = 0, \end{aligned} \tag{4. 28}$$

wo

$$W^*_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n^2-1} (nK^*_{ik} + K^*_{ki})_{*j} - \frac{1}{n^2-1} (nK^*_{ij} - K^*_{ji})_{*k} + \frac{1}{n+1} G^s_{mis} K^{*m}_{rjk} v^r \tag{4. 29}$$

ist.

Verjüngt man in (4. 28) h und l, so ist wegen (3. 9) und (3.11)

$$W^*_{ljk} + W^*_{jkl} + W^*_{klj} = 0. \tag{4. 30}$$

Anderseits kontrahieren wir nochmals in (4. 28) für die Indizes h, l und erhalten so mit rücksicht auf (4. 30)

$$W^{*s}_{ijk*s} + (n-2) W^*_{ijk} + W^m_{rsj} v^r D^s_{mik} + W^m_{rks} v^r D^s_{mij} = 0. \tag{4. 31}$$

[14]) S. J. M. Thomas—O. Veblen [10].

Jetzt können wir durch Subtraktion der Gleichheit (4. 6) aus (4. 31) einsehen, daß sich wegen der Bedingung (4.18) 2° (4. 26) ergibt. Endlich wendet man (4.14) an, womit die Behauptung bewiesen ist.

Auf Grund des vorgehenden Satzes erhalten wir den folgenden

Satz 6. *Der Weylsche Tensor* (4.10) *und seine kovarianten Ableitungen bei einer bahntreuen Abbildung* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *bilden ein volständiges Invariantensystem.*

5. Über die Invarianzeigenschaft der Krümmungstensoren

Nehmen wir als Grundlage die Räume P_n und R_n an, und betrachten wir die bahntreue Abbildung $\tilde{\mathfrak{B}}: P_n \to R_n$. Jetzt untersuchen wir diejenigen Bedingungen welche notwendig und hinreichend sind dafür, daß die Krümmungstensoren des affinzusammenhängenden Bahnraumes P_n bei der vorliegenden Abbildung $\tilde{\mathfrak{B}}$ unverändert bleiben. [15])

Satz 7. *Der Krümmungstensor* (2. 2) *ist dann und nur dann bei der bahntreuen Abbildung* (4. 7) *Invariant, wenn*

(5. 1) $$\nabla_i p - p p_i = 0$$

ist.

Beweis. Unter (4. 7) ändert sich der Krümmungastensor K^i_{jk} folgenderweise:

(5. 2) $$K^i_{jk} = R^i_{bjk} v^b + v^i(\nabla_k p_j - \nabla_j p_k) + \delta^i_j(\nabla_k p - p p_k) - \delta^i_k(\nabla_j p - p p_j).$$

Nehmen wir an, daß der Tensor K^i_{jk} Invariant ist. Unter dieser Annahme erhalten wir aus (5. 2)

(5. 3) $$\nabla_k p - p p_k = 0,$$

und

(5. 4) $$\nabla_k p_j - \nabla_j p_k = 0.$$

Durch partielle Ableitung (5. 3) nach v^j und Benützung der Vertauschungsformel (2. 21), ergibt sich weiter

(5. 5) $$\frac{\partial \nabla_k p}{\partial v^j} - \frac{\partial (p p_k)}{\partial v^j} = \nabla_k p_j - p p_k - p p_{jk} = 0.$$

Vertauschen wir in (5. 5) die Indizes k und j, und subtrahieren wir aus (5. 5) den soeben erhaltenen Ausdruck, so ergibt sich (5. 4). Somit ist die Bedingung (5. 1) notwendig.

Anderseits ist die Bedingung (5. 1) auch hinreichend, weil nach vorliegender Rechnung die Formel (5. 4) erhalten werden kann.

Folgerung. (5. 1) *ist auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß der Krümmungstensor* K^i_{hjk} *bei bahntreuer Abbildung* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *Invariant bleibt.*

[15]) R. B. Misra hat in seiner Arbeit diese Problemstellung im allgemeinsten Falle gelöst. (S. [7]).

BEWEIS. Aus der Definition von K^i_{hjk} folgt dieses Ergebnis wegen (5. 3) und (5. 4) unmittelbar. Es sei bemerkt, daß (5. 1) keine notwendige Bedingung ist.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 8. *Notwendig und hinreichend dafür, daß bei bahntreuer Abbildung des affinzusammenhängenden Bahnraumes P_n auf den Riemannschen Raum R_n die Krümmungstensoren K^i_{hjk} und R^i_{hjk} der Räume gleich sind, ist*

$$\tilde{\nabla}_j p_h = 0, \tag{5. 6}$$

wo $\tilde{\nabla}_h$ den kovarianten Ableitungsoperator bezeichnet, welcher mit Hilfe des Zusammenhanges

$$\tilde{\Gamma}^i_{jl} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^i_{jl} + \frac{1}{2}\,\delta^i_j p_l + \frac{1}{2}\,\delta^i_l p_j + \frac{1}{2}\,p_{jl} v^i \tag{5. 7}$$

definiert ist.

BEWEIS. Die Bedingung (5. 6) ist notwendig. Aus (5. 2) bekommen wir durch partielle Ableitung v^h

$$\begin{aligned} K^i_{hjk} = {} & R^i_{hjk} + v^i(\nabla_k p_{hj} - \nabla_j p_{hk}) + \delta^i_h(\nabla_k p_j - \nabla_j p_k) + \\ & + \delta^i_j(\nabla_k p_h - p_h p_k - p p_{hk}) - \delta^i_k(\nabla_j p_h - p_h p_j - p p_{hj}). \end{aligned} \tag{5. 8}$$

Unter der Annahme $K^i_{hjk} = R^i_{hjk}$, sind (5. 4) und (5. 5) wegen (5. 8) gültig. Vertauschen wir in (5. 5) die Indizes k und j, und subtrahieren dann den soeben erhaltenen Ausdruck aus (5. 5), so ergibt sich (5. 4). Somit ist (5. 5) eine notwendige Bedingung.

Jetzt zeigen wir, daß (5. 5) mit (5. 6) equivalent ist. Berücksichtigt man die Homogenitätseigenschaft der Funktion $p(x, v)$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\,p_{jb} v^b p_{hr} v^r = 0, \quad \frac{1}{2}\,p_j p_{hb} v^b = 0.$$

Addieren wir diese Ausdrücke zu (5. 5), so erhalten wir

$$\tilde{\nabla}_j p_h = \frac{\partial p_h}{\partial x^j} - \frac{\partial p_h}{\partial v^r}\,\tilde{\Gamma}^r_{jb} v^b - p_r \tilde{\Gamma}^r_{jh} = 0.$$

Umgekehrt nehmen wir an, daß die Bedingung (5. 6) erfüllt ist. Dann erhalten wir auf einfache Weise (5. 5) und (5. 4), so daß (5. 6) auch eine hinreichende Bedingung ist.

Literatur

[1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 753—781.
[2] U. DINI, Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle reprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra, *Ann. Mat. Pura Appl.* (2) **3** (1869), 269—293.
[3] J. DOUGLAS, The general geometry of paths, *Ann. of Math.* **29** (1928), 143—168.
[4] L. P. EISENHART, Riemannian geometry, *Princeton*, 1960.
[5] M. S. KNEBELMAN, Collineations and motions in generalised spaces, *Amer. J. Math.* **51** (1929), 527—564.
[6] T. LEVI—CIVITA, Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche, *Ann. Mat. Pura Appl.* **24** (1896), 255—300.
[7] R. B. MISRA, The projective Transformation in a Finsler Space, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér I.* **80** III. (1966), 227—239.
[8] A. RAPCSÁK, Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie, *Publ. Math. (Debrecen)* **7** (1960), 382—393.
[9] A. RAPCSÁK, Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume, *Publ. Math. (Debrecen)* **8** (1961), 225—230.
[10] J. M. THOMAS—O. VEBLEN, Projective invariants of affine geometry of paths, *Ann. of Math.* **27** (1926), 279—296.
[11] K. YANO, The theory of Lie derivatives and its applications, *Amsterdam*, 1955.

(Eingegangen am 20. Juni 1967.)