

Über einen Sehnenschnittpunktsatz der Parabel und einige Anwendungen desselben

Von J. MAKLÁRI (Budapest)

In dieser Arbeit wird ein, — weiter unten genau formulierter — Satz über die Schnittpunkte von Parabelsehnen mit der Parabelachse bewiesen.

Satz. Der Schnittpunkt einer beliebigen Sehne der Parabel mit der Achse ist der gemeinsame Höhenschnittpunkt von drei folgendermaßen bestimmten Dreiecken: Je ein Eckpunkt von zwei der Dreiecke ist einer der Endpunkte der Sehne, ihre zweiten Eckpunkte werden durch die vertikale Projektion je eines Endpunktes auf den durch den Halbierungspunkt der Sehne gezogenen Durchmesser bestimmt, der dritte Eckpunkt eines jeden der beiden Dreiecke ergibt sich als Schnittpunkt der durch die Projektionspunkte zur angenommenen Sehne senkrecht gezogenen Geraden mit den

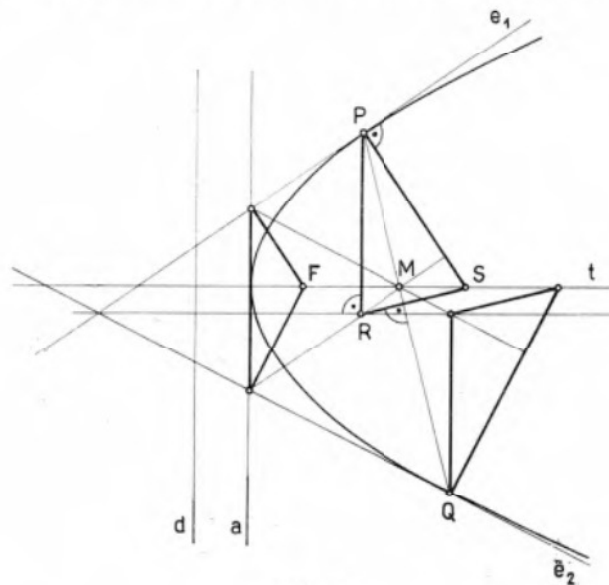


Abb. 1

Normalen in je einem der Endpunkte der beliebig gewählten Sehne. Der eine Eckpunkt des dritten Dreiecks liegt im Brennpunkt der Parabel, die beiden anderen Eckpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der durch die Endpunkte der Sehne gehenden Tangenten mit der Scheiteltangente (Abb. 1.).

Dieser Satz erlaubt eine Reihe von Aufgaben die bisher unter Benutzung von Sätzen der projektiven Geometrie gelöst wurden, mit elementar-synthetischen, nur auf die Mittelschulmathematik sich stützenden Sätzen zu lösen.

Einige derartige Aufgaben sollen hier als Anwendungen behandelt werden. Im folgenden benötigen wir nachstehende Hilfssätze.

Hilfssatz a. *Wird eine beliebige Sehne der Parabel auf die Leitlinie senkrecht projiziert, so geht die aus dem Halbierungspunkt der Projektion auf die Sehne gezogene Senkrechte durch den Brennpunkt.*¹⁾

Hilfssatz b. *Der Schnittpunkt zweier Tangenten der Parabel und der Halbierungspunkt der von den Berührungspunkten derselben bestimmten Sehne ergeben einen Durchmesser der Parabel.*²⁾

Obwohl diese Hilfssätze bekannt sind geben wir hier solche einfache Beweise, die uns auch beim Beweis des eigentlichen Satzes nützlich sein werden:

Zu Hilfssatz a. Bekanntlich geht die Potenzlinie zweier Kreise durch etwa vorhandene gemeinsame Punkte, sowie Halbierungspunkte der gemeinsamen Berührungsstrecke beider Kreise, und ist senkrecht zur Verbindungslinie der Kreismittelpunkte (Abb. 2.). Wird diese Bemerkung auf diejenigen Kreise angewandt, deren Mittelpunkte die der Parabel angehörenden Sehnenendpunkte sind und die Leitlinie in E_1 bzw. E_2 berühren — somit also auch durch den Brennpunkt gehen — so folgt unmittelbar der Beweis des Hilfssatzes a.

Zu Hilfssatz b. Dass die im Hilfssatz a. auftretende Strecke E_1E_2 die Normalprojektion der Parabelsehne ist, wird aufs neue benutzt (Abb. 3.). Ihre

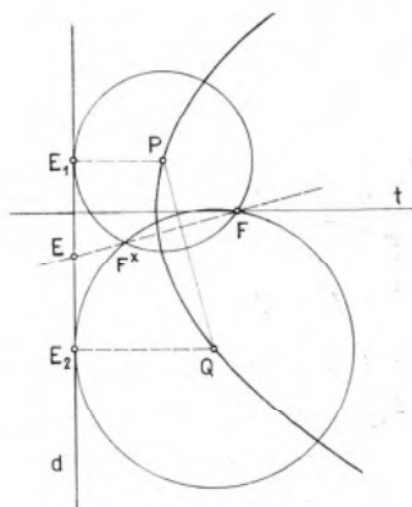


Abb. 2

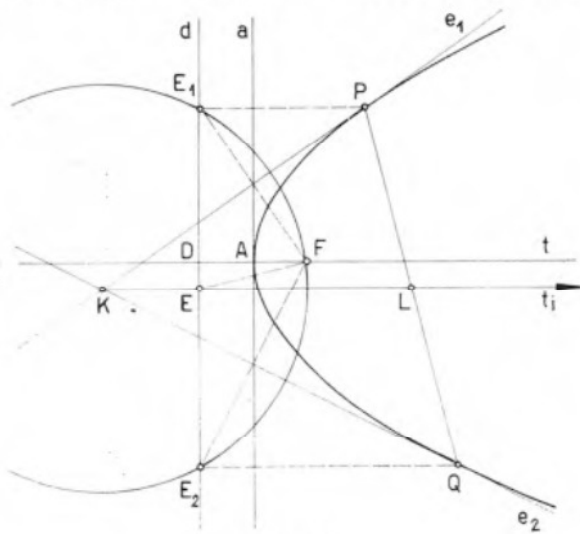


Abb. 3

¹⁾ Siehe die Sätze von der Parabel in der „Einführung in die Geometrie“ von Gy. Hajós [6], (S. 438—440). Die Zahl in Klammern bezieht sich auf das dem Aufsatz angeschlossene Literaturverzeichnis.

²⁾ Eine Anzahl ähnlicher Sätze ist im Sammelwerk von J. Steiner [2] mitgeteilt, (Bd. I, S. 131—136).

Endpunkte sind Gegenpunkte des Brennpunktes bezüglich der Tangenten in den Endpunkten P und Q der Parabelsehne. Daraus folgt, dass der Schnittpunkt dieser Tangenten Mittelpunkt desjenigen Kreises ist, der die Strecke E_1E_2 zur Sehne hat. Hieraus folgt aber die Behauptung des Hilfssatzes b.

BEWEIS des Satzes. Zunächst bezeichnen wir die im Satz erwähnten Dreiecke. Die beliebigen Parabelpunkte seien mit P und Q bezeichnet (Abb. 4.). Im ersten mit PRS bezeichneten Dreieck sei R die Normalprojektion von P auf den die Sehne PQ halbierenden Durchmesser, S der Schnittpunkt des von R auf PQ gefällten Lotes mit der Normalen im Punkte P .

Im zweiten mit QUV bezeichneten Dreieck ist die Normalprojektion von Q auf den Parabeldurchmesser mit U , und der Schnittpunkt der Parabelnormalen von Q mit dem Lote von U auf die Parabelsehne mit V bezeichnet.

Im dritten mit FG_1G_2 bezeichneten Dreieck ist F der Brennpunkt und G_1 bzw. G_2 sind die von den Parabeltangente in P bzw. Q aus der Scheiteltangente ausgeschnittenen Punkte.

Nach Einführung dieser Bezeichnungen gestaltet sich die Beweisführung folgendermaßen. Die Dreiecke E_1EF und PRS sind kongruent, da entsprechende Seiten parallel, und die Strecken E_1E und PR kongruent sind. Hieraus folgt, dass E_1FSP ein Parallelogramm ist und somit der Punkt S auf der Parabelachse liegt. Entsprechend schliesst man, dass der Punkt V des Dreieckes QUV der Parabelachse angehört. Somit bildet die Parabelachse und die Sehne PQ je zwei gemeinsame Höhenlinien in den Dreiecken PRS und QUV . Der Schnittpunkt M der Parabelachse und der Sehne ist somit gemeinsamer Höhenpunkt dieser Dreiecke. Das Dreieck FG_1G_2 besitzt die Parabelachse als Höhenlinie. Außerdem sind die von G_1 und G_2 auf FG_2 bzw. FG_1 gefällten Höhenlote parallel zu den Höhenlinien die den Strecken QV bzw. PS der Dreiecke QUV bzw. PRS zugeordnet sind. Es muß demnach gezeigt werden, dass diese Geraden nicht nur parallel sind, sondern zusammenfallen.

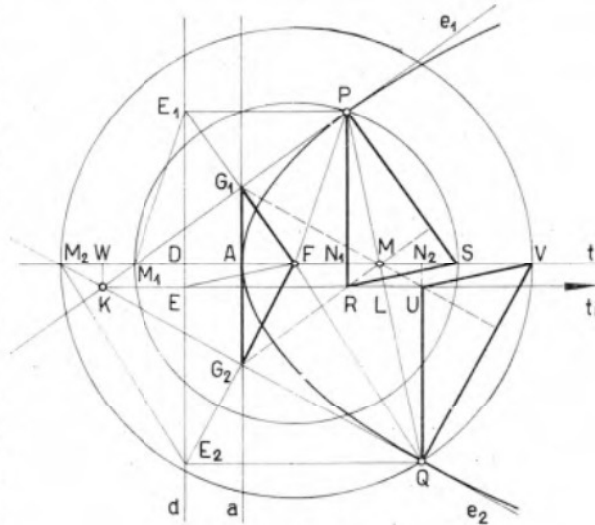


Abb. 4

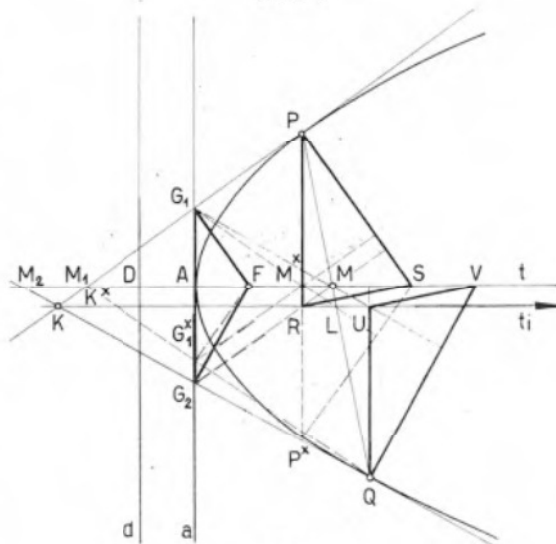


Abb. 5

Dazu betrachten wir den Spezialfall für welchen der Sehnenendpunkt $P^x \equiv Q$ spiegelbildlich zu P bezüglich der Parabelachse liegt (Abb. 5.). Der Höhenpunkt M^x liegt dann auf der Achse und es wird $M^x \equiv R \equiv U$, $S \equiv V$.

Den zu G_1 bezüglich der Parabelachse spiegelbildlichen Punkt — der jetzt an Stelle von G_2 tritt — bezeichnen wir mit G_1^x . Benützen wir nun folgende Tatsache: Bestimmt man in irgendeinem Punkt P die Parabeltangente so schneidet sie die Scheiteltangente in einem Punkt G_1 , und es wird der Abstand G_1 von der Achse gleich der Hälfte des Abstandes des Punktes P von derselben sein.

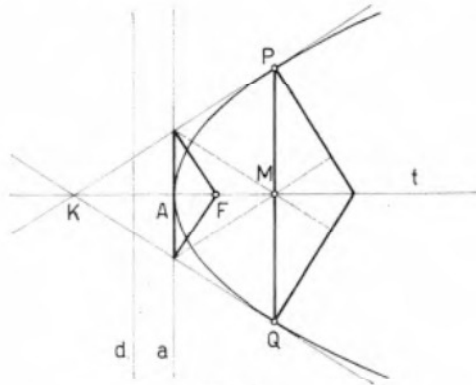


Abb. 6

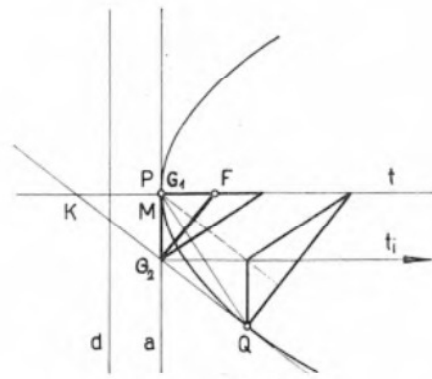


Abb. 7

Demnach ist die Strecke PM^x gleich der Strecke $G_1G_1^x$. Daraus folgt, daß $G_1^xM^x$ parallel zur Tangente in P ist und somit gemeinsame Höhenlinie der Dreiecke FG_1G_2 und PM^xS ist. Somit gilt unser Satz im Spezialfall.

Die Gültigkeit des allgemeinen Satzes wird bewiesen sein, sobald wir die Gleichheit der Strecken $G_1^xG_2$ und M^xR nachgewiesen haben. Aus Symmetriegründen wird G_1^x auch von der Tangente des Punktes P^x aus der Scheiteltangente geschnitten. Aus der oben erwähnten Tatsache folgt, daß die Strecke $G_1^xG_2$ gleich

der Hälfte der Differenz der Abstände von Q und P^x von der Parabelachse ist. Beachtet man nun, daß bei der Spiegelung durch die P^x nach P kommt eine Vorzeichenänderung eintritt, durch die die halbe Differenz in das arithmetische Mittel übergeht, so folgt die Gleichheit der erwähnten Strecken. Somit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.³⁾

Die Abbildungen 6. und 7. zeigen Spezialfälle. Abbildung 8. den bisher nicht veranschaulichten Fall in dem die Parabelsehne auf einer Seite der Achse liegt.

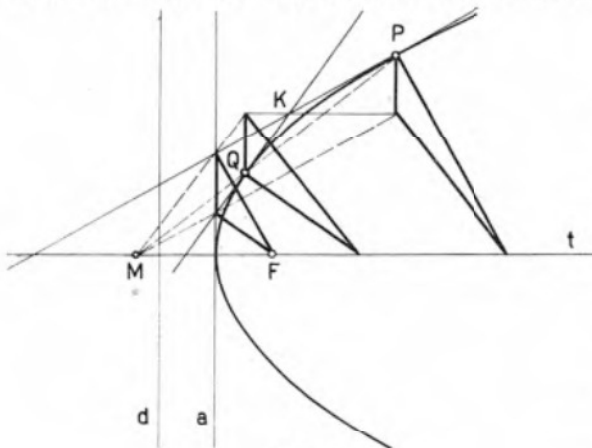


Abb. 8

³⁾ Punkte und Tangenten der Parabel werden von J. Steiner [1] ausführlicher dargelegt, (S. 102—139).

Der Fall, daß die Sehnenendpunkte symmetrisch bezüglich der Parabelachse liegen, wurde schon beim Beweis des Satzes behandelt (Abb. 6.).

Liegt einer der Punkte im Scheitelpunkt der Parabel, so ist eines der Dreiecke von allgemeiner Lage, das zweite und das dritte Dreieck ist rechteckig (Abb. 7.).

Liegen die beiden Punkte auf derselben Seite der Parabelachse, so sind alle drei Dreiecke von allgemeiner Lage und der gemeinsame Höhenpunkt liegt außerhalb des Parabelbereiches (Abb. 8.).

Einige aufgaben

Im Weiteren führen wir einige aufgaben vor, bei denen der dargelegte Satz sehr einfach graphisch zur Lösung führt.

Aufgabe 1. Gegeben sind zwei Punkte (P_1, P_2) und die Achse (t) der Parabel. Man konstruiere die Tangenten in den gegebenen Punkten und bestimme den Brennpunkt der Parabel.

Lösung. Wir verbinden die beiden gegebenen Punkte, und bestimmen den durch den Halbierungspunkt (L) der Sehne gehenden Durchmesser t_i (Abb. 9.). Die senkrechte Projektion von P_1 auf diesen Durchmesser sei R . Von R werde das Lot auf die Sehne gefällt. Dieses Lot schneidet die Achse im Punkte S . Die Verbindungslinie P_1S gibt die Parabelnormale, und deren Senkrechte ist die gesuchte Tangente e_1 . Der Schnittpunkt derselben mit dem Durchmesser ergibt den Punkt K , der mit P_2 verbunden die Tangente e_2 liefert.

Der Brennpunkt kann als Schnittpunkt der durch den Halbierungspunkt der Parabelnormalen P_1S und zu derselben senkrechten Geraden mit der Parabelachse bestimmt werden.

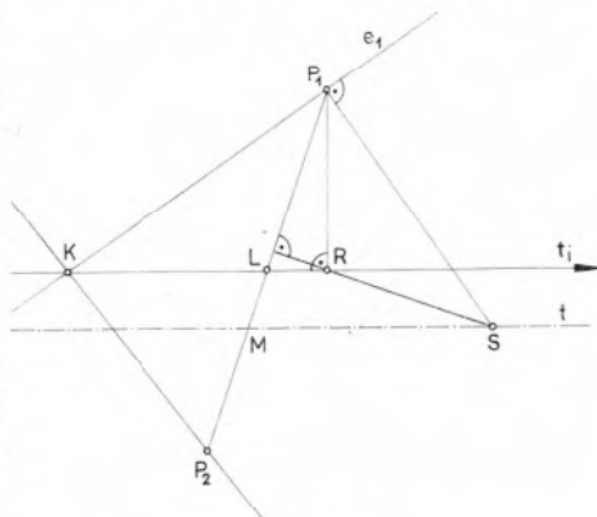


Abb. 9

Aufgabe 2. Gegeben sind zwei Punkte (P_1, P_2) und in einem derselben die Tangente (e_1), ferner die Richtung (t_i) der Achse. Man konstruiere die Tangente im Punkt P_2 , und die Achse der Parabel.

Lösung. Wir bestimmen den durch den Halbierungspunkt L der Sehne gehenden und zu t_i parallelen Durchmesser (Abb. 10.). Die Verbindungslinie seines Schnitt-

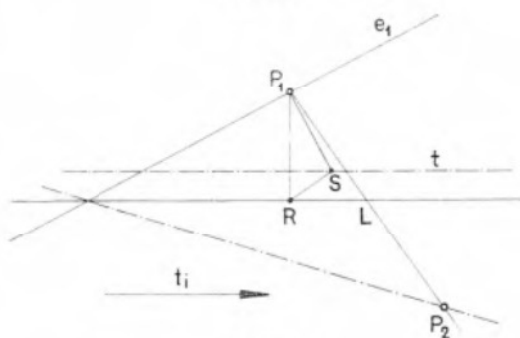


Abb. 10

punktes mit der Tangente e_1 und des Punktes P_2 gibt die Tangente im letzteren Punkte.

Die Konstruktion der Achse kann mit Hilfe des zum Punkt P_1 oder P_2 gehörigen Dreiecks durchgeführt werden (auf der Abbildung wurde P_1 verwendet). Die in dem Punkte P_1 gezogene Normale und der Schnittpunkt (S) jener senkrechten Geraden, die aus $|R|$, der auf dem durch L gehenden Durchmesser liegenden vertikalen Projektion des Punktes P_1 , auf die Sehne P_1P_2 gezogen wurden, ergeben den einen Punkt der Achse; durch den ermittelten Punkt zeichnen wir die Achse (t) zur Achsenrichtung (t_i) parallel.

Aufgabe 3. Gegeben sind zwei Tangenten (e_1, e_2) der Parabel, der Berührungspunkt (P_1) der einen und die Richtung (t_i) der Achse. Bestimmen wir den Berührungspunkt (P_2) auf der Tangenten e_2 .

Lösung. Wir zeichnen denjenigen Durchmesser der Parabel der durch (Abb. 11) den Schnittpunkt (K) der beiden Tangenten geht und der Achsenrichtung (t_i) parallel ist. Er geht auch durch den Halbierungspunkt (L) der von den Berührungspunkten

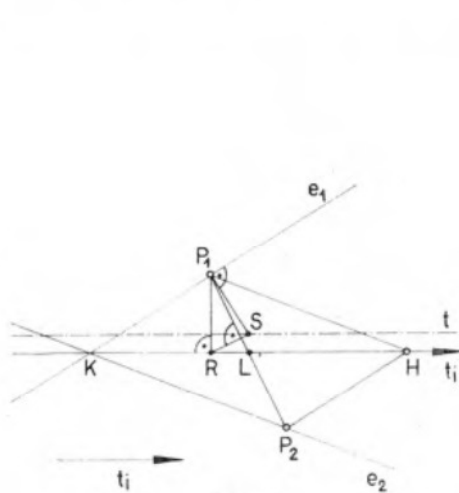


Abb. 11

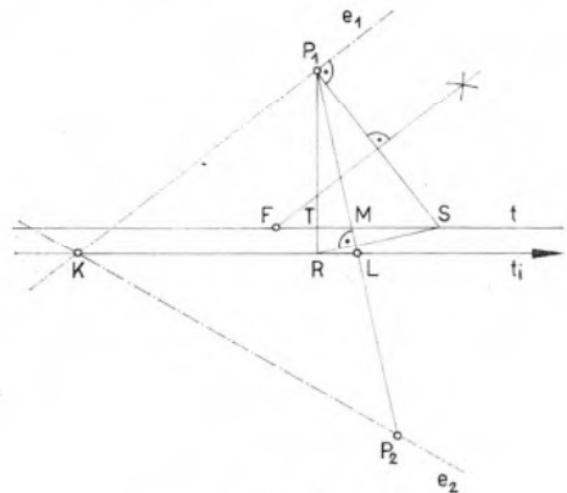


Abb. 12

gebildeten Sehne. Der Berührungspunkt P_2 wird also von L genau so weit liegen, wie P_1 . Man kann ihn mit Hilfe des Parallelogrammes P_1KP_2H konstruieren. Der Punkt H ist in diesem Falle ein *Brianchon*-scher Punkt. Die Konstruktion der Achse kann auf Grund der vorangegangenen Aufgabe durchgeführt werden.

Aufgabe 4. Gegeben sind zwei Tangenten (e_1, e_2) der Parabel mit den Berührungspunkten (P_1, P_2). Man konstruiere die Achse der Parabel.

Lösung. Der Halbierungspunkt L der Sehne P_1P_2 und der Schnittpunkt der Tangenten bestimmen einen Durchmesser (Abb. 12.). Von der Projektion des Punktes P_1 auf den Durchmesser fällt das Lot zur Sehne und bringen es mit der Parabelnormalen von P_1 im Punkte S zum Schnitt. Die Parabelachse geht durch S und ist somit eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Die Lösung letzterer Aufgabe kann auf elementarem Wege auch anders durchgeführt werden. In Kenntniss unseres Satzes ist die Lösung graphisch kürzer durchführbar.

Aufgabe 5. Gegeben sind drei Punkte (PQR) der Parabel und die Richtung (t_i) der Achse. Man konstruiere die Achse der Parabel.

Lösung. Bevor die Konstruktion durchgeführt wird, betrachten wir die Abbildung 13. aus welcher wir folgenden Zusammenhang ablesen können.

Wir bestimmen die Sehnen PR und QR der Parabelpunkte P, Q, R und in ihren Halbierungspunkten L_1 und L_2 ihre Durchmesser $t_{i,1}, t_{i,2}$.

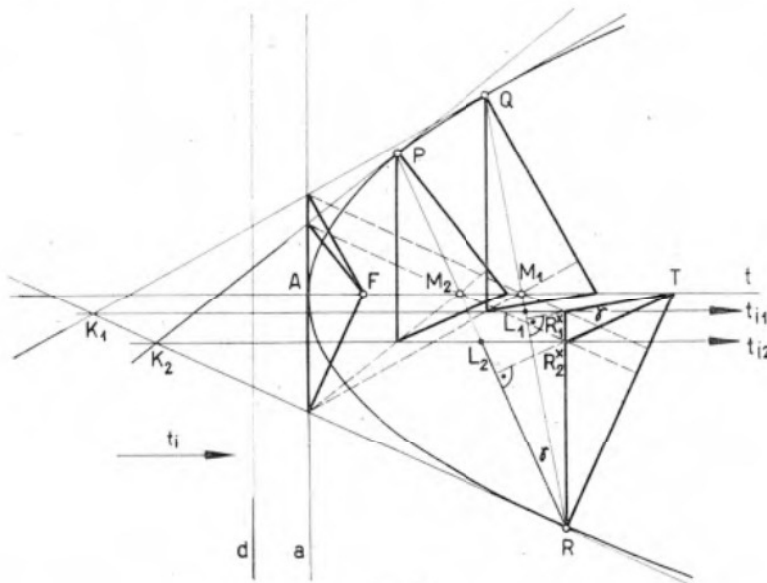


Abb. 13

Wir bestimmen ferner die Projektionen R_1^x und R_2^x von R auf $t_{i,1}$ bzw. $t_{i,2}$, dann werden die von diesen Punkten auf QR bzw. RP gefällten Lote sich in einem Punkte T der Parabelachse schneiden. Die Behauptung geht unmittelbar aus unserem Satz hervor. Der Punkt R ist nämlich ein gemeinsamer Punkt der beiden Sehnen, demnach befinden sich die auf den Durchmessern liegenden Projektionen R_1^x, R_2^x derselben auf einer Geraden. Nach den im Satze nachgewiesenen Tatsachen wird die durch diese Projektionspunkte gezogene und auf die entsprechende Sehne senkrechte Gerade von der Parabelnormalen des Punktes R auf der Achse geschnitten. Im betrachteten Falle ist die Parabelnormale im Punkt R die Seitengerade (RT) beider Grunddreiecke, folglich werden sich die durch die Punkte R_1^x und R_2^x gehenden und zu den entsprechenden Sehnen (RP und RQ) gezogenen Normalen, als die anderen Seitengeraden der Grunddreiecke und RT auf der Achse der Parabel im Punkte T schneiden, was unsere Behauptung bestätigt.

Demnach kann die Konstruktion folgendermaßen ausgeführt werden.

Wir zeichnen die Sehnen RP und RQ (Abb. 14.), und bestimmen in den Halbierungspunkten (L_1, L_2) derselben die zur Achsenrichtung parallelen Durch-

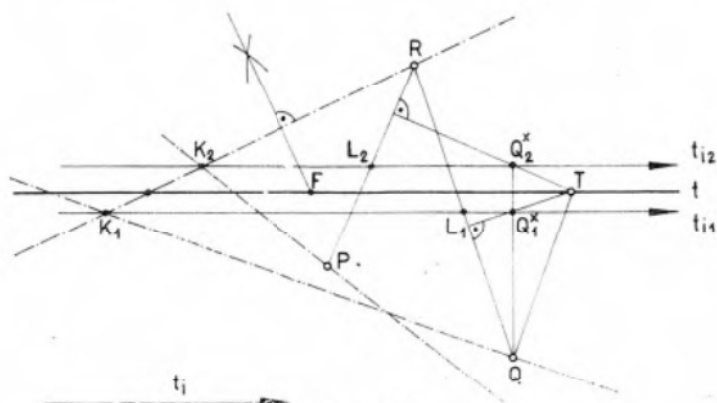


Abb. 14

messer $t_{i,1}$, $t_{i,2}$. Dann bestimmen wir die Projektionen Q_1^x , Q_2^x von Q auf die Durchmesser und ziehen Senkrechte durch dieselben zu den entsprechenden Sehnen. Der Schnittpunkt (T) dieser beiden Senkrechten ergibt dann einen Punkt durch den die Achse derselben bestimmt ist.

Die Konstruktion des Brennpunktes und der Tangenten kann nach den vorangehenden Aufgaben leicht durchgeführt werden.

Literatur

- [1] Jacob Steiner's Vorlesungen über Synthetische Geometrie. Erster Theil: Die Theorie der Kegelschnitte in Elementarer Darstellung (von C. F. Geiser). Leipzig, 1867.
- [2] Jacob Steiner's Gesammelte Werke (von K. Weierstrass), Berlin, 1881.
- [3] G. LORIA, Spezielle algebraische und transzendente Ebene Kurven (von F. Schütte), Leipzig, 1902.
- [4] ROHN—PAPPERITZ, Lehrbuch der darstellende Geometrie (Dritter Band). Berlin—Leipzig, 1923.
- [5] Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, (Band III., 2. Theil, 1. Hälfte). Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme (von F. Dingeldey), Leipzig, 1903—1915.
- [6] GY. HAJÓS, Einführung in die Geometrie (Bevezetés a geometriába), Budapest, 1960.

(Eingegangen am 31. Juni 1967.)