Unabhängigkeitsfragen des Kuroschschen Axiomensystems für die Radikale der Ringe

Von FERENC SZÁSZ (Budapest)

Professor A. G. Kuroš zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

In der Ringtheorie spielt der Begriff des Radikales bekanntlich eine wichtige Rolle. Das Radikal ist historisch ursprünglich ein solches Ideal des Ringes, das das Maß der Singularität des Ringes in einem oder anderem Sinne angibt. Ist nämlich das Radikal klein in gewißem Sinne, so ist der Ring gut, ist aber das Radikal des Ringes groß in gewißem Sinne, so verhält sich der Ring im allgemeinen schlecht. Für Ringe mit Radikal (0) können nämlich in gewißen Fällen Struktursätze bestätigt werden. Das Radikal wurde zuerst bekanntlich für Algebren endlichen Ranges über dem Grundkörper bzw. für Ringe mit Minimalbedingung für Rechtsideale definiert, und in dieser Definition des Radikals wurde der Begriff der Nilpotenz benützt ([7], [11], [21]). Später wurden verschiedene Definitionen für das Radikal eines beliebigen (assoziativen) Ringes ohne Endlichkeitsbedingungen empfohlen, die den Begriff der lokalen Nilpotenz, der Quasiregularität, verschiedener Regularitätseigenschaften usw. benützten. (Siehe z.B. [14], [3], [8], [9], [10], [5]).

Eine große Literatur kam bezüglich der verschiedenen konkreten Radikale zustande. Zwischen den verschiedenen konkreten Radikalen zeigte sich im allgemeinen das Jacobsonsche Radikal am meistens nützlich (vgl. Jacobson [10]).

A. G. Kurosch und S. A. Amitsur haben beobachtet, was in den verschiedenen konkreten Radikalbegriffen gemeinsam ist. Unabhängig von einander haben Kurosch [12] und Amitsur [1] in Ringen ein allgemeines Radikal definiert, und dessen wichtigste Eigenschaften ausführiich untersucht. Diese Definition ist aber so allgemein, dass im wesentlichen auch die folgenden zwei überraschenden Tatsachen nach den Methoden von Kurosch [12] bestätigt werden können:

(i) jede Ringklasse läßt sich in eine Klasse von Radikalringen für eine Radikaleigenschaft einbetten;

(ii) jede Ringklasse läßt sich in eine Klasse von halbeinfachen Ringen für eine Radikaleigenschaft einbetten.

Aus (i) und (ii) folgt, daß ein allgemeiner Radikalbegriff im allgemeinen keinen Singularitätsbegriff im gewohnten Sinne bedeuten soll. Auch bezüglich der allgemeinen Theorie der Kurosch-schen—Amitsurschen Radikale kam eine große Literatur zustande. Dabei können wir hauptsächlich die Tätigkeit von Andrunakiewitsch, Rjabuchin, Sulinski, Divinsky usw. erwähnen.

Es kann bemerkt werden, daß A. G. Kurosch und seine Schüler eine allgemeine Theorie der Radikale auch für Gruppen aufgebaut haben [13], [20].

Das Ziel dieser Arbeit ist eine gewisse Unabhängigkeit des Systems der Axiome des Kuroschschen Radikalbegriffes für assoziative Ringe zu bestätigen.

Dafür benötigen wir einige Vorbereitungen.

Alle hier betrachteten Ringe werden assoziativ vorausgesetzt. Es sei S eine beliebige nichtleere Klasse von Ringen. Die Ringe aus S werden kurz S-Ringe genannt. Nehmen wir an, daß jedes isomorphe Bild eines S-Ringes ein S-Ring ist. Ein Ideal I eines Ringes A heißt ein S-Ideal, wenn I ein S-Ring ist. Ein Ring der kein von Null verschiedenes S-ideal besitzt, heißt S-halbeinfach. Offenbar bedeutet ein S-halbeinfacher Ring eine Verallgemeinerung eines Ringes ohne nichttriviale Ideale. Wenn in einem Ring A ein S-Ideal $S(A)$ existiert welches jedes andere S-Ideal des Ringes A enthält, so nennen wir $S(A)$ das S-Radikal des Ringes A. Wie im folgenden gezeigt wird, existiert das S-Radikal $S(A)$ von A nicht für jedes Paar (S, A), wobei S eine Ringklasse und A ein Ring ist.

Jetzt können wir das System der Axiome für das Kuroschsche Radikal $S(A)$ eines Ringes A betrachten. Die Klasse S ist eine Klasse von Radikalringen, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

I. Jedes homomorphe Bild $A' = A\varphi$ eines S-Ringes A ist ebenfalls ein S-Ring.

II. Das S-Radikal $S(A)$ existiert in jedem Ring A.

III. Es gilt $S(A/S(A)) = 0$; der Faktorring $A/S(A)$ ist also S-halbeinfach.

Offenbar sind die Ringe A mit $S(A) = A$ die S-Radikalringe, und $S(A)$ ist für jeden Ring A und für jede Radikalklasse S ein S-Radikalring. Nach Axiom II. ist (0) ein S-Ring für jede Radikaleigenschaft S, denn auch der Ring 0 enthält nach II. ein S-Radikal, das mit dem Ring (0) übereinstimmen soll. Es gibt eine Folge von Behauptungen über Radikalringe und über halbeinfache Ringe, die aus dem System der Axiome I., II. und III. abgeleitet werden können. Wir streben nicht nach Vollständigkeit bei der Aufstellung dieser Behauptungen, wir erwähnen nur z.B.

I′. Sind sowohl das Ideal I als auch der Faktorring A/I des Ringes A S-Radikalringe, so ist auch A ein S-Radikalring.

II′. Sind I_α solche Ideale des Ringes A, daß $\bigcap_\alpha I_\alpha = 0$ gilt, und jeder Faktorring A/I_α ein S-halbeinfacher Ring ist, so ist A ebenfalls S-halbeinfach. (Mit anderen Worten ist jede subdirekte Summe von S-halbeinfachen Ringen ebenfalls S-halbeinfach.)

Jetzt übergehen wir zur Untersuchung von gewißen Unabhängigkeitsfragen des aus I., II. und III. bestehenden Axiomensystems.

Bezeichne x für ein Axiom x die Gültigkeit des entgegengesetzten Axioms; x gilt also dann und nur dann, wenn x nicht gilt. Die Abfassung des Axioms III. drückt auch die Gültigkeit des Axioms II. aus, und deshalb kann das Axiomensystem I., II. und III. nicht ganz unabhängig, nur höchstens im Sinne *relativ unabhängig* sein, daß aus der Gültigkeit von Axiom III. auch die Gültigkeit von Axiom II. folgt. Aus $\overline{\text{II}}$. ergibt sich also stets $\overline{\text{III}}$. Im weiteren zeigen wir diese relative Unabhängigkeit des Systems I., II. und III. Bezeichne $(x, y, z) = \dagger$ für die Axiome x, y und z die Widerspruchfreiheit des aus x, y und z bestehenden Axiomensystems. Dann ergibt sich der folgende

Satz. *Das die Kurosch'sche Radikaleigenschaft definierende Axiomensystem* I., II. *und* III. *ist relativ unabhängig und zwar bestehen*

a) $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$

b) $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$

c) $(\mathrm{I}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$

d) $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) = \dagger$

e) $(\bar{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$

Beweis. Um den Fall a) zu betrachten wiederholen wir die Definition eines erreichbaren Unterringes T (oder eines Metaideales von endlichem Index. Vgl. Baer [4]) eines Ringes A. Der Unterring T des Ringes A wird erreichbar in A genannt, wenn in A eine endliche Kette

$$(*) \qquad T = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = A$$

von Unterringen existiert, derart, daß jeder A_i ein Ideal im Unterring A_{i+1} ist. Insbesondere ist jedes Ideal I von A erreichbar im Ring A. Weiterhin ist der Unterring T nach der Arbeit [4] von R. Baer dann und nur dann erreichbar in A, wenn es ein Ideal T^* von A mit $(T^*)^n \subseteqq T \subseteqq T^*$ für einen Exponenten n gibt. Es gilt für nilpotente erreichbare Unterringe das Resultat von Baer [4], das wir hier benützen und wegen seiner Wichtigkeit auch seinen Beweis wiederholen werden.

Behauptung (Baer [4]). *Jeder nilpotente erreichbare Unterring T des Ringes A läßt sich in ein nilpotentes Ideal einbetten.*

Beweis. Betrachten wir diejenigen Glieder X der endlichen Kette $(*)$, für die $T \subseteqq X$ und XTX ein nilpotentes Ideal von X ist. Die Menge K dieser X ist wegen $T \in K$ nicht leer, denn T^3 ist mit T ebenfalls nilpotent, und K ist auch eine Kette. Wir zeigen, daß K eine induktive Untermenge ist. Es sei nämlich V die Vereinigung einer aufsteigenden Unterkette von K. Jedes Element von VTV besitzt die Gestalt

$$v = \sum_i v_i t_i w_i$$

mit $t_i \in T$ und $v_i, w_i \in V$. Es gibt ein Glied $X_0 \in K$ mit $v_i, w_i \in X_0$ für jedes i. Hiernach ergibt sich

$$v \in X_0 T X_0 \subseteqq X_0$$

folglich $VTV \subseteqq V$, und somit $V \in K$, denn $(*)$ ist eine endliche Kette. Da K induktiv ist, läßt sich das Lemma von Zorn anwenden. Es gibt also ein maximales Glied W in K. Ist $W \neq A$, so existiert ein erreichbarer Unterring U von A derart, daß W ein echtes Ideal von U ist. Dann ergibt sich $T \subseteqq W \subset U$, weiterhin

$$(UTU)^3 = (UTU^2)T(U^2TU) \subseteqq WTW \subseteqq W.$$

Wegen $W \in K$ ist $(UTU)^3$ nilpotent, und somit ist auch UTU nilpotent, was der Maximalität von W widerspricht. Hiernach ist $W \neq A$ unmöglich, und deshalb erhält man $W = A$. Folglich ist ATA ein nilpotentes Ideal von A. Bezeichne T^* das durch T in A erzeugte Ideal. Dann ist $T \subseteqq T^*$ und

$$T^* = T + AT + TA + ATA$$

und hiernach ergibt sich $(T^*)^3 \subseteqq ATA$. Dann ist aber wegen der Nilpotenz von ATA auch $(T^*)^3$ und somit T^* nilpotent, w.z.b.w.

Nach dieser Vorbereitung können wir die Betrachtung des Falles a) fortsetzen. Es sei S die Klasse derjenigen Ringe, die die Summen ihrer nilpotenten erreichbaren Unterringe sind. Dann ist jedes homomorphe Bild $A'=A\varphi$ eines S-Ringes A (also eines Ringes A aus S) ebenfalls ein S-Ring, und somit gilt Axiom I. für diese Klasse S. Weiterhin ist die Summe $S(A)$ aller S-Ideale I des Ringes A ebenfalls ein S-Ideal von A, denn ein erreichbarer Unterring von I ist ebenfalls ein erreichbarer Unterring von A, und somit auch von $S(A)$. Deshalb ist $S(A)$ wirklich ein S-Ideal von A, das offenbar jedes S-Ideal von A enthält. $S(A)$ ist also das S-Radikal von A, das nach der obigen Behauptung mit der Summe aller nilpotenten Ideale von A übereinstimmt. Für diese S gilt also auch Axiom II. Wir beweisen, daß für diese S Axiom $\overline{\mathrm{III}}$ gilt. Es sei nämlich der Ring A, in dem $S(A/S(A)) \neq 0$ für diese Klasse S gilt, durch die Elemente

$$a_0,\, a_{ijk} \qquad (1 \leqq i, j \leqq 2;\ k=1, 2, 3, 4, \dots)$$

und mit den folgenden definierenden Relationen erzeugt:

$$a_0^2 = a_{i'i''k}^2 = a_{iik}^{2k} = a_0 a_{ijk} + \delta_{1i} a_{2jk} = a_{ijk} a_0 + \delta_{2j} a_{i1k} =$$

$$= a_{i_1} a_{j_1 k_1} a_{i_2 j_2 k_2} + \delta_{j_1 i_2} \delta_{k_1 k_2} a_{i_1 j_2 k_1}^2 = 2a_0 = 2a_{ijk} = 0,$$

wobei $i' \neq i''$ und δ_{ij} das Kroneckersche Delta ist. (Es gilt also $\delta_{ij}=1$ für $i=j$ und $\delta_{ij}=0$ für $i \neq j$). Wie man durch eine unmittelbare Rechnung einsehen kann, ist A ein assoziativer Ring, und zwar ein Nilring (d.h. jedes Element von A ist nilpotent). Weiterhin gilt in A die Minimalbedingung für die Hauptrechtsideale, d.h. A ist ein MHR-Ring im Sinne des Verfassers [18], denn jedes unendliche Produkt

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \dots$$

von Ringelementen bricht nach endlich vielen Schritten mit 0 ab. Wegen $a_{22K}^{2K-1} \neq 0$ und $a_{2jK} \in (a_0)_r$ ist das durch a_0 erzeugte Hauptrechtsideal $(a_0)_r$ nicht nilpotent, und somit kann in A nicht die Minimalbedingung für alle Rechtsideale erfüllt sein. Die Summe $S^*(A)$ aller nilpotenten Ideale von A stimmt nach dem vorigen mit der Summe $S(A)$ aller S-Ideale von A überein. Dann ergibt sich $a_0 \notin S^*(A) = S(A)$, denn im Falle $a_0 \in S^*(A)$ liegt a_0 schon in der Summe von endlich vielen nilpotenten Idealen, und somit ist $(a_0)_r$ nilpotent, was ein Widerspruch ist. Tatsächlich erhält man also $(a_0)_r \not\subseteqq S(A)$ Weiterhin kann auch $S(A/S(A)) \neq 0$ bestätigt werden, denn $(a_0)_r + S(A)$ erzeugt in $A/S(A)$ ein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal (vgl. Verfasser [19]). Somit gilt $\overline{\mathrm{III}}$. für diese Klasse S, und das Axiomensystem I., II., $\overline{\mathrm{III}}$. ist wiederspruchfrei, man erhält also $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$.

Wir diskutieren jetzt den Fall b), also das Axiomensystem $(\overline{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}})$. Die Klasse S bestehe aus denjenigen Ringen A, die die Summen ihrer nilpotenten erreichbaren Unterringe T_α sind, derart, daß $p^2 T_\alpha = 0$ für jedes α und $pT_\beta \neq 0$ für wenigstens einen Index β gilt, wobei — wie üblich ist — $kT = \{kt;\, t \in T\}$ ein Ideal von T, k eine ganze Zahl, und p eine Primzahl ist. Dann gilt offenbar $\overline{\mathrm{I}}$ für diese Klasse S, denn das homomorphe Bild A/pA eines S-Ringes A ist kein S-Ring. Weiterhin ist die Summe $S(A)$ aller S-Ideale von A ein S-Ideal, das jedes andere

S-Ideal von A enthält, und somit gilt II. für diese Klasse S. Der Zeroring A mit der additiven zyklischen Gruppe von der Ordnung p^4 zeigt aber $S(A/S(A)) \neq 0$, denn es gilt $S(A) = p^2 A$ und $S(A/S(A)) = A/S(A)$. Also ergibt sich $\overline{\mathrm{III}}$ für diese Klasse S, und somit ist $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \uparrow$ bewiesen.

Um die Möglichkeit c) zu betrachten, sei S die Klasse aller nilpotenten Ringe. Dann ist jedes homomorphe Bild eines S-Ringes ebenfalls ein S-Ring, und somit gilt I. für diese Klasse. Es sei ferner der Ring A die ringtheoretische direkte Summe seiner nilpotenten Unterringe B_n mit $B_n^{n+1} = 0$ und $B_n^n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist A ein Nilring, und wegen $0 \neq B_n^n \subseteqq A^n$ ist A kein nilpotenter Ring. Es gibt in A kein solches S-Ideal, das jedes andere S-Ideal enthält. Liegt nämlich jedes S-Ideal von A in einem Ideal I von A, so gilt $I = A$, und A ist kein S-Ring. Somit ergibt sich $\overline{\mathrm{II}}$, und folglich auch $\overline{\mathrm{III}}$., für diese Klasse S. Hiernach ist $(\mathrm{I}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \uparrow$ bewiesen.

Wir diskutieren jetzt den Fall d), wo nämlich unser Axiomensystem aus $\bar{\mathrm{I}}$, II und III besteht. Die Klasse S sei jetzt folgendermaßen definiert. Es sei A ein beliebiger festgewählter einfacher Ring, d.h. ein Ring A mit $A^2 = A$ und ohne nichttriviale Ideale. Nun bestehe S aus denjenigen Ringen, die nicht isomorph zum Ring A sind. Dann liegt die direkte Summe $B = A \oplus A$ in der Klasse S, obwohl S nicht den Ring A, das homomorphe Bild von B, enthält. Es gilt also $\bar{\mathrm{I}}$. für diese S. Weiterhin bestehen beide Axiome II. und III. für jeden Ring A und für diese S, und somit ist $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) = \uparrow$ bewiesen.

Zum Schluß zeigen wir auch $(\bar{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \uparrow$, also die Möglichkeit e). Die Klasse S bestehe aus denjenigen Ringen, die nullteilerfrei sind. Dann ist der Ring I der ganzen rationalen Zahlen ein S-Ring, aber sein homomorphes Bild $I/4I$ besitzt wegen $(2I) \cdot (2I) \subseteqq 4I$ und $2I \subsetneqq 4I$ Nullteiler, und somit gilt I. für diese Klasse S. Weiterhin zeigt die direkte Summe $A = B_1 \oplus B_2$ von zwei nullteilerfreien, von Null verschiedenen Ringen B_1 und B_2 das Bestehen von II und III, denn B_1 und B_2 sind S-Ideale von A und A ist kein S-ring. Es gibt also in A kein solches S-Ideal, das jedes S-Ideal von A umfaßt, und folglich ist $(\bar{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \uparrow$ für diese Klasse S erwiesen.

Somit haben wir den Satz bewiesen.

Literatur

[1] S. A. AMITSUR, A general theory of radicals, I., *Amer, J. Math.*, **74** (1952) 774—786; II. *Amer. J. Math.*, **76** (1954) 100—125; III. *Amer J. Math.*, **76** (1954) 126—136.

[2] W. A. ANDRUNAKIEWITSCH, Radikale in assoziativen Ringen, I. *Mat. Sb.* **44** (1958) 179—212, (Russisch). II. *Math. Sb.* **55.** (1961) 329—346. (Russisch)

[3] R. BAER, Radical ideals, *Amer. J. Math.* **65** (1943) 537—568.

[4] R. BAER, Metaideals, Report of a conference on linear algebras, Nat. Acad. Sci. *Washington,* 1957

[5] B. BROWN—N. H. McCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 46—58.

[6] N. DIVINSKY, Rings and Radicals, *London,* 1965.

[7] C. HOPKINS, Rings with minimal condition, *Ann. of Math.* **40** (1939) 712—730.

[8] N. JACOBSON, The Theory of Rings, *Amer. Math. Soc. Math. Surveys,* 1943.

[9] N. JACOBSON, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945) 300—320.

[10] N. JACOBSON, Structure of Rings, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, 2. ed. 1964.

[11] G. Köthe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, *Math. Z.*, **32** (1930) 161—186.
[12] A. G. Kurosch, Radikale der Ringe und der Algebren, *Mat. Sb.*, **33** (1953) 12—26. (Russisch)
[13] A. G. Kurosch, Radikale in der Gruppentheorie, *Sibirsk Mat. Žur.*, **3** (1962) 912—931. (Russisch)
[14] J. Levitzki, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943) 462—466.
[15] N. H. McCoy, Prime ideals in general rings, *Amer. J. Math.*, **71** (1949) 823—833.
[16] Ju. M. Rjabuchin, Übernilpotente und speziale Radikale, Untersuchungen über Algebra und Math. Analysis, *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven.*, (1965) 65—72 (Russisch).
[17] A. Sulinski, Gewisse Fragen in der allgemeinen Theorie der Radikale, *Mat. Sb.*, **44** (1958) 273—286. (Russisch)
[18] F. Szász, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, I., *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960) 54—64; II., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12** (1961) 417—439; III., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963) 447—461.
[19] F. Szász, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatsh. Math.*, **67** (1963) 359—362.
[20] K. K. Tschukin, Zur Theorie der Radikale in Gruppen, *Sibirsk. Mat. Žur.*, **3** (1962) 932—942. (Russisch)
[21] B. L. van der Waerden, Algebra II, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1955.

(Eingegangen am 15. Dezember 1967.)