Über die Lokalisationseigenschaften und die starke (C,1)-Summation Lagrangescher Interpolationsfolgen

Von GÉZA FREUD (Budapest)

1. Einleitung

Es sei $\alpha(x)$ eine nichtabnehmende Funktion in $x \in [-1, +1]$, $p_n(d\alpha; x) = \gamma_n(d\alpha)x^n + \dots$ die normierten Orthogonalpolynome bezüglich $d\alpha(x)$ in $[-1, +1]$ und

$$(1) \qquad 1 > x_{1n} > x_{2n} > \dots > x_{nn} > -1$$

seien die Nullstellen von $p_n(d\alpha; x)$. Es seien $\{l_{kn}(x)\}$ die Lagrangeschen interpolatorischen Grundpolynome bezüglich des Punktsystems (1).

Es gilt die Formel

$$(2) \qquad l_{kn}(d\alpha; x) = \frac{\gamma_{n-1}(d\alpha)}{\gamma_n(d\alpha)} \lambda_{kn}(d\alpha) \frac{p_{n-1}(d\alpha; x_{kn})}{x - x_{kn}} p_n(d\alpha; x)$$

und die Abschätzung

$$(3) \qquad 0 < \frac{\gamma_{n-1}(d\alpha)}{\gamma_n(d\alpha)} < 2$$

(vgl. z.B. G. FREUD [6]). Dabei sind die $\lambda_{kn}(d\alpha) = \lambda_{kn}$ die Koeffizienten (Christoffelsche Zahlen) der Gauss—Jacobischen Quadraturformel

$$(4) \qquad \int_{-1}^{+1} \Pi_{2n-1}(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}(d\alpha) \Pi_{2n-1}(x_{kn}),$$

welche für jedes Polynom $\Pi_{2n-1}(x)$ höchstens $2n-1$-ten Grades gültig ist.

Der am besten untersuchte Fall ist $\alpha(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, dann ist $p_n(d\alpha; x)$ proportional dem Tschebischeffschen Polynom $T_n(x)$, also ist dann $x_{kn} = \arccos \frac{2k\pi}{2n+1}$. In diesem Falle sind die Lebesgueschen Funktionen

$$(5) \qquad \Lambda_n(d\alpha; x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(d\alpha; x)|$$

genau von der Grössenordnung $O(\log n)$, während die Lebesgueschen Konstanten der $(C,1)$-Summen der Lagrangeschen Interpolationsfolge für fast alle x die Größenordnung $O(\log\log n)$ haben (P. ERDŐS [3]). Man sieht aus diesem Fall, dass die $(C, 1)$-Summen der Lagrangeschen Interpolationsfolgen günstigere Approximationseigenschaften haben, als die Interpolationspolynome selbst, obwohl sie nicht so günstige Approximationseigenschaften haben, wie die $(C, 1)$-Summen der Orthogonalentwickelung. In vorliegender Arbeit untersuchen wir die starken $(C, 1)$-Summen

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|L_\nu(d\alpha; f; x)-f(x)| \tag{6}$$

der Lagrangeschen Interpolationspolynome

$$L_n(d\alpha; f; x) = \sum_{k=1}^{n} l_{kn}(d\alpha; x)f(x_{kn}) \tag{7}$$

u.zw. beweisen wir einen Lokalisationssatz und geben eine Abschätzung der Lebesgueschen Funktionen der starken $(C, 1)$-Summen (6). Wir behandeln auch die damit eng verbundene Frage der Lokalisationseigenschaft der Folge (7) selbst.

2. Lokalisationssatz für die Interpolationsfolge

Der nachfolgende Satz I dieses Paragraphen ist nicht neu. Es wurde — ungeachtet der Gleichmäßigkeit der Konvergenz — von JA. L. GERONIMUS [11] bewiesen. Wir geben hier einen anderen Beweis dieses Satzes. Der Gedanke dieses Beweises ist in einer älteren Arbeit des Verfassers (G. FREUD [6]) enthalten. Die einzelnen Schritte dieser Beweisführung werden uns später von Nutzen sein.

Satz I. *Die Folge der normierten Orthogonalpolynome $p_n(d\alpha; x)$ sei auf einer Punktmenge $\mathfrak{M}\subset[-1, +1]$ gleichmäßig beschränkt; es sei ferner $f(x)$ eine in $[-1, +1]$ bezüglich $d\alpha(x)$ samt ihres Quadrates eigentlich Stieltjes integrierbare Funktion, welche in $[a, b]$ verschwindet; dann konvergiert $L_n(d\alpha; f; x)$ für jedes $0<\delta<\frac{b-a}{2}$ gleichmäßig auf der Menge $[a+\delta, b-\delta]\cap\mathfrak{M}$ gegen Null.*

BEWEIS. Aus einer Ungleichung von G. ALEXITS [1] folgt, daß gleichmäßig für $x\in\mathfrak{M}$

$$\Lambda_n(d\alpha; x) = O(n^{\frac{1}{2}}) \tag{8}$$

gültig ist. Es sei $s_\nu(d\alpha; f; x)$ die ν-te Teilsumme der Orthogonalentwickelung

$$f(x)\sim \Sigma\, a_r(d\alpha : f)p_r(d\alpha; x).$$

Dann ist

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-1}^{+1}[f(x)-s_\nu(d\alpha; f; x)]^2\, d\alpha(x) = 0 \tag{9}$$

ferner gilt bezüglich $x \in [a+\delta, b-\delta] \cap \mathfrak{M}$ gleichmäßig

(10) $$s_\nu(d\alpha; f; x) = o(1)$$

(Vgl. D. JACKSON [8]).

Es sei $\varphi_\delta(x) = 0$ für $x \in (a+\delta/2, b-\delta/2)$, $\varphi_\delta(x) = 1$ für $x \notin (a, b)$

und $\varphi_\delta(x)$ sei linear in den Intervallen $[a, a+\delta/2]$ bzw. $[b-\delta/2, b]$. Dann ist $\varphi_\delta(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, es gibt also infolge des Jacksonschen Approximationssatzes eine Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\psi_m(\delta, x)$, so daß

(11) $$|\varphi_\delta(x) - \psi_m(\delta, x)| \leqq K_1(\delta) m^{-1}$$

gültig ist. Wir legen jetzt ein $\varepsilon > 0$ fest und wählen gemäß (9) ein festes $\nu = \nu(\varepsilon)$ mit

(12) $$\int_{-1}^{+1} [f(x) - s_\nu(d\alpha; f; x)]^2 \, d\alpha(x) < \varepsilon.$$

Ferner setzen wir

(13) $$\Psi_n(x) = \psi_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\delta, x) s_\nu(d\alpha; f; x),$$

so daß für $n > n_0(\varepsilon)$ der Grad von $\Psi_n(x)$ niedriger als n ist. Nach einem bekannten Satze (V. A. STEKLOFF [10], L. FEJÉR [5], J. SHOHAT [9]) gilt

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} [f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})]^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - s_\nu(d\alpha; f; x)]^2 \, d\alpha(x) < \varepsilon$$

so daß für $n > n_1(\varepsilon)$ auch

(14) $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} [f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})]^2 < \varepsilon$$

gültig ist. Es sei im weiteren $n > n_1(\varepsilon)$ und $n > n_0(\varepsilon)$.

Wir erhalten

(15) $$|L_n(d\alpha; f; x) - f(x)| \leqq |L_n(d\alpha; f - \Psi_n; x)| + |\Psi_n(x) - f(x)| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \, |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})| + |\Psi_n(x) - f(x)|.$$

Für $t \in [a+\delta/2, b-\delta/2]$ gilt $f(t) = \varphi_\delta(t) = 0$, so daß aus (13), (10) und (11)

(16) $$|\Psi_n(x) - f(x)| < K_2(\delta; \varepsilon) n^{-1} \qquad (x \in [a+\delta/2, b-\delta/2])$$

folgt.

Unter Beachtung von (8) folgt aus (16)

(17) $$\sum_{x_{kn} \in [a+\delta/2, b-\delta/2]} |l_{kn}(x)| \, |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})| =$$
$$= O(n^{1/2}) K_2(\delta, \varepsilon) n^{-1} = K_2(\delta, \varepsilon) O(n^{-1/2}) < \varepsilon$$

für $n > n_2(\delta, \varepsilon)$. Den übriggebliebenen Teil der rechten Seite schätzen wir mit Hilfe von (2) und (3) ab:

$$\sum_{x_{kn} \notin [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} |l_{kn}(x)|\, |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})| \leqq \tag{18}$$

$$\leqq \operatorname{Max} \frac{1}{|x - x_{kn}|} \cdot |p_n(d\alpha; x)| \sum_{x_{kn} \notin [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} \lambda_{kn} |p_{n-1}(d\alpha; x_{kn})| \cdot |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})| \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{\delta} |p_n(d\alpha; x)| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} p_{n-1}^2(d\alpha; x_{kn})} \cdot \sqrt{\sum_{x_{kn} \notin [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})|^2}\,.$$

Aus der Qadraturformel (4) folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} p_{n-1}^2(d\alpha; x_{kn}) = \int_{-1}^{+1} p_{n-1}^2(d\alpha; x)\, d\alpha(x) = 1. \tag{19}$$

Die zweite Summe unter dem Wurzelreichen zerlegen wir in die Teile

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{x_{kn} \in [a,\, a+\delta/2]}, \quad \sum\nolimits_1' = \sum_{x_{kn} \in [b-\delta/2,\, b]},$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{x_{kn} < a}, \quad \sum\nolimits_2' = \sum_{x_{kn} > b}.$$

Für $x \in [a, a+\delta/2]$ ist $f(x_{kn}) = 0$ und für hinreichend große Werte von n ist infolge (11)

$$|\psi_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\delta, x)| \leqq 2, \quad \text{also} \quad |\Psi_n(x)| \leqq 2 |s_\nu(d\alpha; f; x)|;$$

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{x_{kn} \in [a,\, a+\delta/2]} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})|^2 \leqq 4 \sum_{x_{kn} \in [a,\, a+\delta/2]} \lambda_{kn} |s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2 =$$

$$= 4 \sum_{x_{kn} \in [a,\, a+\delta/2]} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2$$

und genau so

$$\sum\nolimits_1' \leqq 4 \sum_{x_{kn} \in [b-\delta/2,\, b]} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2.$$

Es folgt unter Beachtung von (14)

$$\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_1' \leqq 4 \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2 < 4\varepsilon. \tag{20}$$

Es ist weiter wegen (13) und (11)

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{x_{kn} < a} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})|^2 \leqq 4 \sum_{x_{kn} < a} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2 +$$

$$+ 4 \sum_{x_{kn} < a} \lambda_{kn} |s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2\, |\psi_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\delta; x_{kn}) - 1|^2 <$$

$$< 4 \sum_{x_{kn} < a} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2 + K_3(\delta) n^{-1} \sum_{x_{kn} < a} \lambda_{kn} s_\nu^2(d\alpha; f; x_{kn}).$$

Eine analoge Abschätzung gilt für Σ_2', so dass unter Beachtung von (14), (4) und der Besselschen Ungleichung

$$(21)\qquad \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_2' \leqq 4 \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - s_\nu(d\alpha; f; x_{kn})|^2 +$$

$$+ K_3(\delta) n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} s_\nu^2(d\alpha; f; x_{kn}) \leqq 4\varepsilon + K_3(\delta) n^{-1} \int_{-1}^{+1} s_\nu^2(d\alpha; f; x)\, d\alpha(x) \leqq$$

$$\leqq 4\varepsilon + K_3(\delta) n^{-1} \int_{-1}^{+1} f^2(x)\, d\alpha(x) < 5\varepsilon$$

falls nur n hinreichend groß ist.

Aus (20) und (21) folgt

$$(22)\qquad \sum_{x_{kn} \in [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} \lambda_{kn} |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})|^2 = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_1' + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_2' \leqq 9\varepsilon$$

und endlich ergibt sich aus (17), (18), (19) und (22) für $n > N(\varepsilon, \delta)$

$$(23)\qquad \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)|\, |f(x_{kn}) - \Psi_n(x_{kn})| \leqq K_4(\delta, \varepsilon) n^{-1/4} + \frac{2}{\delta} \sqrt{9\varepsilon} < K_5(\delta) \sqrt{\varepsilon}$$

für hinreichend große Werte von n. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt aus (15) und (23) die Behauptung des Satzes I, w.z.b.w.

3. Lokalisationssatz für die starken (C,1) Summen

Die Anwendbarkeit des Satzes I ist durch die Voraussetzung eingeschränkt, daß die Folge $p_n(d\alpha; x)$ auf $\mathfrak{M}$ beschränkt sei. Wir zeigen jetzt, daß ein Lokalisationssatz bezüglich der starken $(C, 1)$ Summen schon aus der schwächeren Bedingung

$$(24)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^2(d\alpha; x) = O(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

folgt. Bekanntlich ist (24) für jedes δ in $[a+\delta, b-\delta]$ gleichmäßig befriedigt, falls $\alpha'(x) \geqq m > 0$ für $x \in [a, b]$ gültig ist. Ferner, (24) gilt für fast alle Punkte in $[-1, +1]$, falls $\alpha(x)$ in $[-1, +1]$ absolut stetig ist, und die Funktion

$$w(x) = \begin{cases} \alpha'(x), & \text{für} \quad x \in [-1, +1], \\ 0, & \text{für} \quad x \notin [-1, +1] \end{cases}$$

die Ungleichung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{|w(x+h) - w(x)|}{w(x)}\, dx = O\left(\log^{-\gamma} \frac{1}{|h|}\right)$$

für ein $\gamma > 1$ befriedigt (G. Freud [7]).

Satz II. *Auf einer Punktmenge $\mathfrak{M}_1 \subset [-1, +1]$ sei (24) gleichmäßig erfüllt, und $f(x)$ befriedige die gleichen Voraussetzungen, wie in Satz I, dann gilt für jedes $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ gleichmäßig bezüglich $x \in [a+\delta, b-\delta] \cap \mathfrak{M}_1$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} |L_r(d\alpha; f; x) - f(x)| = 0.$$

Beweis. Wir können in unserem Beweise einen großen Teil des Beweises von Satz I anwenden, und zwar die Einschiebung der Funktionen $\Psi_n(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$ die Formeln (15), (17) und (18) und (19). Es muß nur überlegt werden, daß nach G. Alexits [1] die Gültigkeit der Ungleichung (8) schon aus der schwächeren Voraussetzung (24) folgt. Es ergibt sich aus diesen Formeln

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} |L_r(d\alpha; f; x) - f(x)| \leqq \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{r} |l_{kr}(x)|\, |f(x_{kr}) - \Psi_r(x_{kr})| + o(1) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{x_{kr} \in [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} |l_{kr}(x)|\, |f(x_{kr}) - \Psi_r(x_{kr})| +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{x_{kr} \notin [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} |l_{kr}(x)|\, |f(x_{kr}) - \Psi_r(x_{kr})| + o(1).$$

Aus (17) folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{x_k \in [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} |l_{kr}(x)|\, |f(x_{kr}) - \Psi_r(x_{kr})| = O(n^{-1/2})$$

und weiter aus (18) und (19)

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} |L_r(d\alpha; f; x) - f(x)| = O(1) \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} |p_r(d\alpha; x)|\, B_r + o(1) \tag{25}$$

mit

$$B_r = \sqrt{\sum_{x_{kr} \notin [a+\delta/2,\, b-\delta/2]} \lambda_{kr} [f(x_{kr}) - \Psi_r(x_{kr})]^2} \tag{26}$$

und infolge (22) ist

$$\lim_{r\to\infty} B_r = 0. \tag{27}$$

Aus (24) und (27) erhalten wir für $x \in \mathfrak{M}_1$

$$\sum_{r=1}^{n} |p_r(d\alpha; x)|\, B_r \leqq \sqrt{\sum_{r=1}^{n} p_r^2(d\alpha; x)} \sqrt{\sum_{r=1}^{n} B_r^2} = \tag{28}$$

$$= O(n^{1/2})\, o(n^{1/2}) = o(n) \qquad (x \in \mathfrak{M}_1).$$

Aus (25) und (28) folgt die Behauptung unseres Satzes, w.z.b.w.

4. Abschätzung der starken Lebesgueschen Funktionen

Es ist aus den Untersuchungen von G. ALEXITS [2] bekannt, daß für die starke Summation und die starke Approximation einer Funktion $f(x)$ mit Hilfe der Folge $L_n(d\alpha; f; x)$ die Größenordnung des Ausdrucks

$$A_n(d\alpha; x) = \max_{|f(x)|\leq 1} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} |L_r(d\alpha; f; x)|$$

ebenso maßgebend ist, wie die der Lebesgueschen Funktionen für die Konvergenz und die Konvergenzgeschwindigkeit. Wir nennen $A_n(d\alpha; x)$ die starke Lebesguesche Funktion der Interpolationsfolge.

Satz III. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes II. befriedigt, es sei ferner* $\mathfrak{M}_1 \subset [a, b] \subset [-1, +1]$ *und für* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *sei*

$$\frac{\alpha(x_2)-\alpha(x_1)}{x_2-x_1} < M, \tag{29}$$

dann gilt für $x \in [a+\delta, b-\delta]$ *gleichmäßig*

$$A_n(d\alpha; x) = O(n^{1/3}). \tag{30}$$

BEWEIS: Wir zeigen, daß sogar die stärkere Abschätzung

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \Lambda_r(d\alpha; x) = O(x^{1/3}) \tag{31}$$

gültig ist. Es sei $\delta_n = n^{-1/3}$, und n so groß, daß $\delta_n < \delta$ ist. Es ist

$$\Lambda_r(d\alpha; x) = \sum_{k=1}^{r} |l_{kr}(d\alpha; x)| = \Lambda_r^{(1)}(d\alpha; x) + \Lambda_r^{(2)}(d\alpha; x) \tag{32}$$

mit

$$\Lambda_r^{(1)}(d\alpha; x) = \sum_{|x-x_{kr}|<\delta_n} |l_{kr}(d\alpha; x)| \tag{33}$$

und

$$\Lambda_r^{(2)}(d\alpha; x) = \sum_{|x-x_{kr}|\geq\delta_n} |l_{kr}(d\alpha; x)|. \tag{34}$$

Bei der Abschätzung von $\Lambda_r^{(1)}$ beachten wir die Identität

$$\sum_{k=1} \frac{l_{kr}^2(d\alpha; x)}{\lambda_{kr}} = \sum_{v=0}^{r-1} p_v^2(d\alpha; x) = O(r) \qquad (x \in \mathfrak{M}_1), \tag{35}$$

welche aus der Minimaleigenschaft dieser Summen folgt (Vgl. P. ERDŐS—P. TURÁN [4] S. 524). Aus (29) folgt

$$\lambda_{kr} < K_6(\delta) r^{-1} \ (x_{kr} \in [a+\delta, b-\delta])$$

(Vgl. P. ERDŐS—P. TURÁN [4], Lemma V, S. 530.) * also um so mehr für $|x-x_{kr}|<\delta_n$. Mit Hilfe der Markoff-Stieltjeschen Ungleichung schließen wir weiter

$$\sum_{|x-x_{kr}|<\delta_n} \lambda_{kr} < 2K_6(\delta)r^{-1} + \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} d\alpha(x) < 2K_6(\delta)r^{-1} + 2M\delta_n, \tag{36}$$

so daß infolge (33), (35) und (36)

$$\Lambda_r^{(1)}(d\alpha; x) \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} \frac{l_{kr}^2(d\alpha; x)}{\lambda_{kr}}} \sqrt{\sum_{|x-x_{kr}|<\delta_n} \lambda_{kr}} = \tag{37}$$

$$= O(r^{1/2})(r^{-1/2}+\delta_n^{1/2}) = O(r^{1/2})\delta_n^{1/2} + O(1)$$

gleichmäßig bezüglich $x \in \mathfrak{M}_1 \cap [a+\delta, b-\delta]$ gültig ist.

Bei der Abschätzung von $\Lambda_r^{(2)}(d\alpha; x)$ bedienen wir uns neben (34) der Formeln (2) und (3):

$$\Lambda_r^{(2)}(d\alpha; x) \leqq 2\frac{|p_r(d\alpha; x)|}{\delta_n} \sum_{k=1}^{r} \lambda_{kr} |p_{r-1}(d\alpha; x_{kr})|$$

und aus der Quadraturformel (4) ergibt sich weiter

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{kr} |p_{r-1}(d\alpha; x_{kr})| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} \lambda_{kr} p_{r-1}^2(d\alpha; x_{kr})}\,.$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{r} \lambda_{kr}} = \sqrt{\alpha(1)-\alpha(-1)};$$

wir erhalten also

$$\Lambda_r^{(2)}(d\alpha; x) \leqq \frac{K_7}{\delta_n} |p_r(d\alpha; x)|. \tag{38}$$

Aus (32), (37) und (38) folgt endlich

$$\sum_{r=1}^{n} \Lambda_r(d\alpha; x) = O(1)\delta_n^{1/2} \sum_{r=1}^{n} r^{1/2} + O(n) + O(1)\delta_n^{-1} \sum_{r=1}^{n} |p_r(d\alpha; x)| =$$

$$= O(n^{4/3}) + O(1)n^{1/3} n^{1/2} \sqrt{\sum_{r=0}^{n} p_r^2(d\alpha; x)} = O(n^{4/3})$$

gleichmäßig für $x \in \mathfrak{M}_1 \cap [a+\delta, b-\delta]$, w.z.b.w.

* Einen ausführlichen Beweis von (35) und der Ungleichung $\lambda_{kr} < K_6(\delta)r^{-1}$ findet man indem Buche des Verfassers: G. FREUD: Orthogonale Polynome, Birkläuser Verl. Basel, 1969. (Hilfsatz 3.1 in Kapitel III.).

Literatur

[1] G. Alexits, Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953) 232—236.
[2] G. Alexits, Einige Beiträge zur Approximationstheorie, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **26** (1965) 211—224.
[3] P. Erdős, Some theorems and remarks on interpolation, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **12** (1950) 11—17.
[4] P. Erdős—P. Turán, On interpolation III., *Ann. of Math.* **41** (1940), 510—553.
[5] L. Fejér, Mechanische Quadraturen mit positiven Coteschen Zahlen, *Math. Z.* **37** (1933), 287—309.
[6] G. Freud, Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953), 137—142.
[7] G. Freud, Über Orthogonale Polynome, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5** (1954) 291—298.
[8] D. Jackson, Fourier series and orthogonal polinomials, *The Carus Math. Monographs, VI. The Math. Assoc. of America,* 1941.
[9] J. Shokat, On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937) 461—496.
[10] V. A. Stekloff, On approximate evaluation of definite integrals by means of formulas of mechanical quadratures I., *Bulletin de l'Academie Imp. de Sci. Petrograd,* **10** (1916) 169—186.
[11] Я. Л. Геронимус, О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в корнях ортогональных многочленов, *Изв. Акад. Наук. СССР* сер. мат. **27** (1963) 529—560.

(Eingegangen am 29. Mai 1967.)