Über gewisse Erweiterungen von positiv geordneten Halbmoduln

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

Jeder geordnete (kommutative) Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

$$\text{JIV:}\quad \textit{Zu } a<b \quad \textit{existiert} \quad x\in\mathfrak{M} \quad \textit{mit} \quad a+x=b$$

besitzt die (geordnete) Zerlegung $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$ in einen geordneten Modul $\mathfrak{M}_1$ und einen positiv geordneten Halbmodul $\mathfrak{M}_2$ (vgl. [1]). Es entsteht die Frage, wann und wie man umgekehrt aus $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ einen solchen Halbmodul aufbauen kann. Wir reduzieren diese Fragestellung zunächst in Fortsetzung der Überlegungen in [1] mit Hilfe der CLIFFORDschen Zerlegung von $\mathfrak{M}_2$ (vgl. Satz 1), beantworten sie dann aber unabhängig davon unter Verwendung der in [2] entwickelten Theorie; das Hauptergebnis wird im Satz 3 formuliert. Zu ihm gelangen wir auf dem Wege über vier Lemmata, in denen Aussagen über geordnete Halbmoduln $\mathfrak{M}$ unter Voraussetzung von JIV (und der geordneten Zerlegung $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$) gemacht werden.

Lemma 1. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein Halbmodul mit* JIV *und der geordneten Zerlegung $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$. Gibt es dann zu einem Element $m_2\in\mathfrak{M}_2$ ein $x_2\in\mathfrak{M}_2$ mit $x_2+m_2=$ $=m_2$, so gilt $m_1+m_2=m_2$ für alle $m_1\in\mathfrak{M}_1$.*

BEWEIS. Für jedes $m_1\geqq 0$ gilt wegen $m_1<x_2$

$$m_2\leqq m_1+m_2\leqq x_2+m_2 = m_2, \quad \text{also} \quad m_1+m_2 = m_2;$$

für $m_1<0$ ist aber $(-m_1)>0$ und damit $(-m_1)+m_2=m_2$, also auch $m_1+m_2=m_2$.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{M}_1$ ein geordneter Modul und*

$$\mathfrak{M}_2=\biguplus_{\tau\in T}^{\leq}\mathfrak{N}_\tau$$

die CLIFFORD*sche Zerlegung des positiv geordneten Halbmoduls $\mathfrak{M}_2$ als geordnete Summe positiv geordneter irreduzibler Unterhalbmoduln $\mathfrak{N}_\tau$. Dann gilt:*

a) *Hat diese Zerlegung keinen ersten irreduziblen Bestandteil, so existiert $\mathfrak{M}=$ $=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$ als Halbmodul mit* JIV *genau dann, wenn $\mathfrak{M}_2$ sogar natürlich geordnet ist, so daß in diesem Fall*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \precsim \mathfrak{M}_2$$

der einzige geordnete Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV *ist, welcher die Komponenten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$ besitzt.*

b) *Gilt dagegen* $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{A} \lesssim \mathfrak{B}$ *mit einem irreduziblen positiv geordneten Unterhalbmodul* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{M}_2$ [1]), *so existiert* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ *als Halbmodul mit* JIV *genau dann, wenn* $\mathfrak{B}$ *natürlich geordnet ist und* $\mathfrak{A}$ *sich mit* $\mathfrak{M}_1$ *zu einem Halbmodul* $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{A}$ *mit* JIV *zusammensetzen läßt; dann erhält man*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* \lesssim \mathfrak{B}.$$

Dabei gilt sogar

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{A} \quad \text{und damit} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$$

genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ *(und damit* $\mathfrak{M}_2$*) sogar natürlich geordnet ist, während im anderen Falle* $\mathfrak{M}^*$ *ein irreduzibler Halbmodul mit* JIV *ist.*

Beweis. a) Auf Grund der Voraussetzung existiert in diesem Falle zu jedem $m_2 \in \mathfrak{M}_2$ ein $x_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $x_2 + m_2 = m_2$; gibt es daher einen Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV und der geordneten Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, so folgt aus Lemma 1 sofort $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$ und damit gemäß [1; Satz 9], daß $\mathfrak{M}_2$ natürlich geordnet ist. Umgekehrt entsteht aus einem geordneten Modul $\mathfrak{M}_1$ und einem natürlich geordneten Halbmodul $\mathfrak{M}_2$ gemäß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{M}_2$ stets ein Halbmodul mit JIV.

b) Es existiere $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ als Halbmodul mit JIV. Dann gilt wegen $a + b = b$ für alle $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$ und Lemma 1 jedenfalls $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* \lesssim \mathfrak{B}$; hierbei ist $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{A}$ Unterhalbmodul von $\mathfrak{M}$, da auch eine Summe $m_1 + a$ nicht in $\mathfrak{B}$ liegen kann, denn sonst wäre $m_1 + a = b$ und damit $a = b + (-m_1) = b$. $\mathfrak{M}^*$ erfüllt JIV, denn sind x und y Elemente von $\mathfrak{M}^*$ mit $x < y$, so existiert ein $z \in \mathfrak{M}$ mit $x + z = y$, und es gilt $z \notin \mathfrak{B}$, also $z \in \mathfrak{M}^*$. Ebenso besitzt $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft JIV und ist damit natürlich geordnet, denn zu $b_1 < b_2$ existiert $x \in \mathfrak{M}$ mit $b_1 + x = b_2$, und es gilt $x \notin \mathfrak{M}^*$, also $x \in \mathfrak{B}$. Läßt sich umgekehrt $\mathfrak{M}_1$ mit $\mathfrak{A}$ zu einem Halbmodul $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{A}$ mit JIV zusammensetzen, so ist trivialerweise auch $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* \lesssim \mathfrak{B} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ ein Halbmodul mit JIV.

Gemäß [1; Satz 9] gilt $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1 \lesssim \mathfrak{A}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ natürlich geordnet ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{M}^*$ ein irreduzibler Halbmodul mit JIV ist, wenn $\mathfrak{A}$ nicht natürlich geordnet ist. Hierzu führen wir die Annahme, $\mathfrak{M}^*$ besitze eine Zerlegung $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{U} \lesssim \mathfrak{B}$ in Halbmoduln $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ mit JIV, zum Widerspruch. Jedenfalls würde dann $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{U}$ gelten, denn sonst existierte ein $m_1 \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{B}$, woraus $u + m_1 = m_1$ für alle $u \in \mathfrak{U}$ und damit $\mathfrak{U} = \{0\}$ folgte, was im Falle $\mathfrak{M}_1 = \{0\}$ zum Widerspruch $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{U}$ und im Falle $\mathfrak{M}_1 \neq \{0\}$ wegen $0 < m_1$ zum Widerspruch $-m_1 \in \mathfrak{U}$ führt. Darüber hinaus gilt sogar $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{U}$, denn mit $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{U}$ wäre $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{B}$ ist im Widerspruch zur Voraussetzung über $\mathfrak{A}$ offenbar natürlich geordnet. Daher ist $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$. Ferner gilt $\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{A}$, denn wegen $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{U}$ kann kein Element $v \in \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{M}_1$ liegen. Also erhalten wir $\mathfrak{U}^* \cup \mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{A}$ und sogar $\mathfrak{U}^* \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, denn aus $a \in \mathfrak{A}$ und $a \notin \mathfrak{U}^* \cup \mathfrak{B}$ folgte $a \notin \mathfrak{B}$ und damit der Widerspruch $a \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{U}^*$. Wegen $\mathfrak{U}^* \subseteqq \mathfrak{U}$ würde dies aber die geordnete Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}^* \lesssim \mathfrak{B}$ in die (positiven) Unterhalbmoduln $\mathfrak{U}^*$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ liefern im Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität von $\mathfrak{A}$.

Mit Satz 1 ist die aufgeworfene Fragestellung im Prinzip auf den Fall zurückgeführt, daß $\mathfrak{M}_2$ ein irreduzibler positiv geordneter Halbmodul ist, was für praktische

[1]) Der Fall, daß $\mathfrak{M}_2$ selbst bereits ein irreduzibler positiv geordneter Halbmodul ist, ordnet sich hier mit $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \emptyset$ sinngemäß ein.

Berechnungen natürlich von großer Bedeutung ist. In den folgenden Betrachtungen spielt aber die Irreduzibilität keine explizite Rolle, so daß wir unsere Aussagen doch allgemein formulieren.

Gemäß [2; Satz 2] ist jeder Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit JIV, der die geordnete Zerlegung $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$ besitzt, o-isomorph zu einer „geordneten Schreierschen Erweiterung" $M=[\overline{\mathfrak{M}},\mathfrak{M}_1]$ von $\mathfrak{M}_1$ mit dem Faktorhalbmodul $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$. M wird durch eine Relation $R(\bar{a},\alpha,\beta)$ in $\overline{\mathfrak{M}}\times\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_1$ und ein Summandensystem $s(\bar{a},\bar{b})\in\mathfrak{M}_1$ bestimmt, welche gewisse Bedingungen (1)-(6) und (I)-(III) erfüllen [2]). Dabei gilt $\mathfrak{M}_1 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} M_1=[\bar{o},\mathfrak{M}_1]$ und $\mathfrak{M}_2 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} M_2=[\overline{\mathfrak{N}},\mathfrak{M}_1]$ mit $\overline{\mathfrak{N}}=\overline{\mathfrak{M}}\setminus\{\bar{o}\}$. Zur Konstruktion von $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ werden wir daher $\overline{\mathfrak{N}}$ unabhängig von $\mathfrak{M}_1$ zu beschreiben und dann $R(\bar{a},\alpha,\beta)$ und $s(\bar{a},\bar{b})$ so einzuführen versuchen, daß gerade ein solches $M=[\overline{\mathfrak{M}},\mathfrak{M}_1]$ mit $\mathfrak{M}_2 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} M_2=[\overline{\mathfrak{N}},\mathfrak{M}_1]$ entsteht.

Hierzu bezeichnen wir ein Paar von Elementen a und a' aus $\mathfrak{M}_2$, zu denen kein Element $x_2\in\mathfrak{M}_2$ mit $a+x_2=a'$ existiert, mit

$$\overline{a,a'}.$$

Dann erhalten wir:

Lemma 2. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *ein Halbmodul mit* JIV *und der geordneten Zerlegung* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$. *Dann gilt für Elemente* a *und* a' *aus* $\mathfrak{M}_2$

$$a\equiv a' \bmod \mathfrak{M}_1$$

genau dann, wenn

$$(*)\qquad a=a' \quad \text{oder} \quad a\neq a',\ \ \overline{a,a'},\ \ \overline{a',a}$$

erfüllt ist.

Beweis. Es sei $a\equiv a' \bmod \mathfrak{M}_1$, also $a+x_1=a'$ mit $x_1\in\mathfrak{M}_1$. Dann folgt aus $a+x_2=a'$ mit $x_2\in\mathfrak{M}_2$

$$a+x_2+(-x_1)=a,$$

also $a=a'$ wegen $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}_2$ und Lemma 1; ebenso führt $a'+x_2=a$ mit $x_2\in\mathfrak{M}_2$ wegen

$$a=a+x_1+x_2$$

zu $a=a'$. Umgekehrt folgt aus $(*)$ und der Voraussetzung über $\mathfrak{M}$ die Existenz eines $x_1\in\mathfrak{M}_1$ mit $a+x_1=a'$.

Gemäß $(*)$ lassen sich daher die Elemente von $\overline{\mathfrak{N}}$ nur durch Beziehungen zwischen Elementen von $\mathfrak{M}_2$ beschreiben. Geht man aber umgekehrt von $\mathfrak{M}_2$ aus, so kommt man auf diese Weise nicht immer zu einem natürlich geordneten Halbmodul $\overline{\mathfrak{N}}$; vielmehr sind hierzu gewisse notwendige Bedingungen zu erfüllen:

[2]) In [3] zeigen wir. daß jede Relation R mit den Eigenschaften (1)-(6) und (III) wie folgt charakterisiert werden kann:

$$R(\bar{a},\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha\equiv\beta\,(\mathfrak{M}_{\bar{a}}).$$

Dabei ist $\bar{a}\to\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ eine ähnliche Abbildung von $\overline{\mathfrak{M}}$ in die Kette der konvexen Untermoduln von $\mathfrak{M}_1$ mit $\mathfrak{M}_{\bar{o}}=(o)$ und $\mathfrak{M}_{\bar{c}}=\mathfrak{M}_1$, falls für $\bar{c}$ ein $\bar{b}\neq\bar{o}$ aus $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\bar{b}+\bar{c}=\bar{c}$ existiert. Wir werden diese Beschreibung von R hier mit verwenden.

Lemma 3. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein Halbmodul mit* JIV *und der geordneten Zerlegung* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. *Dann gilt für Elemente aus* $\mathfrak{M}_2$:

(a) *Im Falle $a < b < c$ ist das gleichzeitige Bestehen von $\overline{a, b}$ und $\overline{b, c}$ gleichwertig mit $\overline{a, c}$.*

(b) *Es sei $a = a'$ oder $\overline{a, a'}$. Dann folgt aus $\overline{b, b'}$ und $a + b \neq a' + b'$ stets $\overline{a + b, a' + b'}$.*

(c) *Es sei $a < b$, und es existiere ein $x_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $a + x_2 = b$. Dann folgt aus $a = a'$ und $\overline{b, b'}$, $\overline{b', b}$ oder $b = b'$ und $\overline{a, a'}$, $\overline{a', a}$ oder $\overline{a, a'}$, $\overline{a', a}$ und $\overline{b, b'}$, $\overline{b', b}$, daß auch $a' < b'$ gilt und ein $x_2' \in \mathfrak{M}_2$ mit $a' + x_2' = b'$ existiert.*

Beweis. (a) Es gelte $\overline{a, b}$ und $\overline{b, c}$, so daß wegen $a < b$ und $b < c$ Elemente x_1 und y_1 aus $\mathfrak{M}_1$ mit $a + x_1 = b$ und $b + y_1 = c$ existieren. Gäbe es dann ein $x_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $a + x_2 = c$, so folgte

$$a = a + x_2 + (-x_1) + (-y_1),$$

also wegen Lemma 1 der Widerspruch $a = b$. Umgekehrt sei $\overline{a, c}$ vorausgesetz. Würde dann ein $x_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $a + x_2 = b$ existieren, so folgte über $b + y = c$ mit $y \in \mathfrak{M}$ der Widerspruch $a + x_2 + y = c$ mit $x_2 + y \in \mathfrak{M}_2$, und ebenso beweist man $\overline{b, c}$.

(b) Nach Voraussetzung gilt $a + x_1 = a'$ und $b + y_1 = b'$ mit $x_1 \in \mathfrak{M}_1$, $y_1 \in \mathfrak{M}_1$. Gäbe es ein $x_2 \in \mathfrak{M}_2$ mit $a + b + x_2 = a' + b'$, so folgte wegen Lemma 1 über

$$a + b + x_2 + (-x_1) + (-y) = a + b$$

der Widerspruch $a' + b' = a + b + x_1 + y_1 = a + b$.

(c) Nach Voraussetzung existieren x_1 und y_1 aus $\mathfrak{M}_1$ mit $a + x_1 = a'$ und $b + y_1 = b'$. Daraus folgt jedenfalls

$$a' \leqq a' + x_2' = b' \quad \text{mit} \quad x_2' = x_2 + y_1 + (-x_1) \in \mathfrak{M}_2.$$

Wäre aber $a' = b'$, so erhielte man über $a' + x_2' = a'$ und $b' + x_2' = b'$ wegen Lemma 1 sowohl $a = a'$ als auch $b = b'$ im Widerspruch zu $a < b$.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{M}_2$ ein positiv geordneter Halbmodul, für dessen Elemente die Bedingungen* (a), (b) *und* (c) *von Lemma* 3 *erfüllt sind. Dann stellt*

$$a \sim b \Leftrightarrow a = b \quad \text{oder} \quad a \neq b, \quad \overline{a, b}, \quad \overline{b, a}$$

eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{M}_2$ dar, und die zugehörigen Äquivalenzklassen $[a]$ bilden vermöge der Definitionen

$$[a] + [b] = [a + b],$$

$$[a] < [b] \Leftrightarrow [a] \neq [b], \ a < b$$

einen natürlich geordneten Halbmodul $\overline{\mathfrak{N}}$.

Korollar. *Ist $\mathfrak{M}_2$ Komponente in der geordneten Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ eines Halbmoduls $\mathfrak{M}$ mit* JIV, *so gilt $\overline{\mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$ mit $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$.*

Beweis. Offenbar ist die angegebene Relation reflexiv und symmetrisch. Zum Beweis der Transitivität sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Nichttrivial ist nur der Fall, daß alle drei Elemente voneinander verschieden sind; berücksichtigt man dann, daß für $x < y$ die Beziehungen $x \sim y$ und $\overline{x, y}$ gleichwertig sind, so ergibt sich $a \sim c$ unter Verwendung von (*a*) einfach durch Betrachtung der sechs möglichen Anordnungen von a, b, c nach ihrer Größe.

Die Repräsentantenunabhängigkeit der Addition- bzw. Ordnungsdefinition, d.h. die Aussagen

$$a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a + b \sim a' + b',$$

$$a \not\sim b, a < b, a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a' \not\sim b', a' < b'$$

erhält man aus (b) und (c) durch leichte Fallunterscheidung. Da sich damit auf Grund dieser Definitionen die Menge $\overline{\mathfrak{N}}$ der Äquivalenzklassen $[a]$ vermöge $a \to [a]$ als o-homomorphes Bild von $\mathfrak{M}_2$ herausstellt, ist jedenfalls klar, daß $\overline{\mathfrak{N}}$ ein positiv geordneter Halbmodul ist. $\overline{\mathfrak{N}}$ ist sogar natürlich geordnet, denn aus $[a] < [b]$ folgt $a < b$ und $a + x_2 = b$ mit $x_2 \in \mathfrak{M}_2$, also $[a] + [x_2] = [b]$. Das Korollar ergibt sich sofort aus Lemma 2.

Nicht jede geordnete Schreiersche Erweiterung $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ von $\mathfrak{M}_1$ mit dem durch Adjunktion eines Nullelementes $\bar{o}$ zu $\overline{\mathfrak{N}}$ entstehenden natürlich geordneten Halbmodul $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \cup \overline{\mathfrak{N}}$ besitzt jedoch eine Zerlegung $M = M_1 \cup M_2$ mit ($M_1 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} \mathfrak{M}_1$ und) $M_2 \underset{<}{\overset{\sim}{\longleftrightarrow}} \mathfrak{M}_2$; vielmehr müssen hierzu $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ und $s(\bar{a}, \bar{b})$ geeignet gewählt werden. Dies erkennt man aus der folgenden Aussage:

Lemma 4. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein Halbmodul mit* JIV *und der geordneten Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$; ferner sei $f(\bar{a})$ eine Auswahlfunktion für $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ (mit $f(\bar{o}) = 0$) und $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ sowie $s(\bar{a}, \bar{b})$ festgelegt gemäß*

$$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow f(\bar{a}) + \alpha = f(\bar{a}) + \beta,$$

$$f(\bar{a}) + f(\bar{b}) = f(\bar{a} + \bar{b}) + s(\bar{a}, \bar{b}) \quad (\textit{mit } s(\bar{o}, \bar{o}) = o)$$

(*vgl.* [2]). *Dann liefert die Vorschrift*

$$\alpha \to \sigma_{\bar{a}}(\alpha) = f(\bar{a}) + \alpha$$

für jedes $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$ [3]) *eine eindeutige ähnliche Abbildung $\sigma_{\bar{a}}$ von $\mathfrak{M}_1$ auf $\bar{a} = [f(\bar{a})]$, und hierbei gilt* [4]):

(i) $$\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = \sigma_{\bar{a}}(\beta) \Leftrightarrow R(\bar{a}, \alpha, \beta),$$

(ii) $$\sigma_{\bar{a}}(\alpha) + \sigma_{\bar{b}}(\beta) = \sigma_{\bar{a}+\bar{b}}\big(s(\bar{a}, \bar{b}) + \alpha + \beta\big).$$

---

[3]) Für $\bar{a} = \bar{o}$ ergäbe sich die identische Abbildung von $\mathfrak{M}_1$, was aber für das Folgende uninteressant ist.

[4]) Wegen $R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta(\mathfrak{M}_{\bar{a}})$ kann man die Bedingung (*i*) auch wie folgt formulieren: Die Abbildung $[\alpha] \to [\sigma_{\bar{a}}(\alpha)]$ ist eine eineindeutige ähnliche Abbildung des Faktormoduls $\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ auf $\bar{a} = [f(\bar{a})]$, wobei letzterer geordnet sei mit dem Positivitätsbereich

$$P' = \{[\alpha]: \ [\alpha] = [\alpha'] \ \text{ mit } \ \alpha' \in P\}$$

(P Positivitätsbereich von $\mathfrak{M}_1$). Insbesondere besagt dann (*ii*), daß diese Abbildung für ein idempotentes Element $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{N}}$ sogar ein o-Isomorphismus ist.

Beweis. Zunächst ist $\sigma_{\bar{a}}$ jedenfalls eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}_1$ in die Klasse $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$, denn mit $\bar{a}$ ist $f(\bar{a})$ eindeutig als Element von $\bar{a}$ festgelegt, und für jedes $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ ist $f(\bar{a})+\alpha$ ein eindeutig bestimmtes Element von $\bar{a}$. Hierbei handelt es sich sogar um eine Abbildung von $\mathfrak{M}_1$ auf $\bar{a}$, denn nach Definition von $\bar{a}$ als Element von $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ kann jedes Element $a \in \bar{a}$ in der Form $a = f(\bar{a}) + \alpha$ mit $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ geschrieben werden. Die Ähnlichkeit von $\sigma_{\bar{a}}$ ergibt sich gemäß

$$\alpha \leqq \beta \Rightarrow f(\bar{a})+\alpha \leqq f(\bar{a})+\beta \Rightarrow \sigma_{\bar{a}}(\alpha) \leqq \sigma_{\bar{a}}(\beta).$$

Schließlich erhält man (i) und (ii) gemäß

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = \sigma_{\bar{a}}(\beta) &\Leftrightarrow f(\bar{a})+\alpha = f(\bar{a})+\beta \Leftrightarrow R(\bar{a}, \alpha, \beta),\\
\sigma_{\bar{a}}(\alpha)+\sigma_{\bar{b}}(\beta) &= f(\bar{a})+f(\bar{b})+\alpha+\beta\\
&= f(\bar{a}+\bar{b})+s(\bar{a}, \bar{b})+\alpha+\beta\\
&= \sigma_{\bar{a}+\bar{b}}\big(s(\bar{a}, \bar{b})+\alpha+\beta\big).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Bedingungen gelangen wir nunmehr zur Lösung der gestellten Aufgabe:

Satz 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß sich ein positiv geordneter Halbmodul $\mathfrak{M}_2$ mit einem geordneten Modul $\mathfrak{M}_1$ zu einem Halbmodul $\mathfrak{M}$ mit* JIV *und der geordneten Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ erweitern läßt, sind folgende Bedingungen:*

A) *$\mathfrak{M}_2$ besitzt die Eigenschaften* (a), (b) *und* (c) *aus Lemma* 3, *so daß $\overline{\mathfrak{N}}$ wie in Satz* 2 *gebildet werden kann.*

B) *Es existieren eine Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ in $\overline{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$ (mit $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \cup \overline{\mathfrak{N}}$) und ein Summandensystem $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$ so, daß $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ eine geordnete Schreiersche Erweiterung von $\mathfrak{M}_1$ mit $\overline{\mathfrak{M}}$ ist.*

C) *Für jede Restklasse $\bar{a} = [a] \in \overline{\mathfrak{N}}$ existiert eine (eindeutige) Abbildung $\sigma_{\bar{a}}$ von $\mathfrak{M}_1$ auf $\bar{a}$, welche die Eigenschaften* (i) *und* (ii) *aus Lemma* 4 *besitzt.*

In diesem Falle gilt $M = M_1 \cup M_2$ mit ($\mathfrak{M}_1 \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_1$ und)

$$\mathfrak{M}_2 \overset{\sim}{\underset{<}{\leftrightarrow}} M_2 = \big[\overline{\mathfrak{N}}, \mathfrak{M}_1\big] \quad \textit{vermöge} \quad a \to [\bar{a}, \alpha],$$

wobei sich $\bar{a}$ und α gemäß $\bar{a} = [a] \in \overline{\mathfrak{N}}$ und $\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = a$ bestimmen.

Beweis. Auf Grund der vorangegangenen Überlegungen bleibt nur zu zeigen, daß unter den genannten Voraussetzungen tatsächlich $a \to [\bar{a}, \alpha]$ einen 0-Isomorphismus τ von $\mathfrak{M}_2$ auf M_2 liefert. Jedenfalls handelt es sich bei τ um eine Abbildung von $\mathfrak{M}_2$, denn jedes $a \in \mathfrak{M}_2$ liegt in einer Klasse $\bar{a} = [a] \in \overline{\mathfrak{N}}$, und $\sigma_{\bar{a}}$ ist eine Abbildung von $\mathfrak{M}_1$ auf $\bar{a}$, so daß zu jedem $a \in \bar{a}$ (wenigstens) ein Original $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ mit $\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = a$ existiert. Ferner ist τ eine Abbildung auf M_2, denn gibt man $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{N}}$ und $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ vor, so liefert $\sigma_{\bar{a}}$ ein Element $a \in \bar{a}$ mit $\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = a$, was also überdies $[a] = \bar{a}$ erfüllt. Weiterhin ist die Abbildung τ eineindeutig; denn gilt $a \to [\bar{a}, \alpha]$ und $b \to [\bar{b}, \beta]$, also $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$ und $\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = a$ und $\sigma_{\bar{b}}(\beta) = b$, so ergibt sich unter Verwendung von

$$\sigma_{\bar{a}}(\alpha) = \sigma_{\bar{a}}(\beta) \Leftrightarrow R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow [\bar{a}, \alpha] = [\bar{a}, \beta]$$

sofort: Aus $a=b$, also $\bar{a}=\bar{b}$, folgt $[\bar{a}, \alpha]=[\bar{b}, \beta]$, und umgekehrt. Wir arbeiten mit den gleichen Bezeichnungen weiter und zeigen zunächst die Ähnlichkeit von τ. Es sei also $a<b$. Gilt dann $a\sim b$, also $\bar{a}=\bar{b}$ und damit $\sigma_{\bar{a}}(\alpha)<\sigma_{\bar{b}}(\beta)$, so folgt auf Grund der Ähnlichkeit von $\sigma_{\bar{a}}$ auch $\alpha<\beta$ und außerdem $\neg R(\bar{a}, \alpha, \beta)$, also $[\bar{a}, \alpha]<[\bar{b}, \beta]$. Das gleiche Ergebnis erhalten wir aber auch im Falle $a\not\sim b$, also $\bar{a}\neq\bar{b}$, denn aus $[a]\neq[b]$ und $a<b$ folgt $\bar{a}=[a]<[b]=\bar{b}$ und damit ebenfalls $[\bar{a}, \alpha]<[\bar{b}, \beta]$. Schließlich ist τ auch relationstreu hinsichtlich der Addition. Gilt nämlich $a+b\to[\bar{c}, \gamma]$, so folgt

$$\bar{c}=[a+b] = [a]+[b] = \bar{a}+\bar{b}$$

und

$$\sigma_{\bar{c}}(\gamma) = a+b = \sigma_{\bar{a}}(\alpha)+\sigma_{\bar{b}}(\beta) = \sigma_{\bar{a}+\bar{b}}\big(s(\bar{a}, \bar{b})+\alpha+\beta\big),$$

also $R\big(\bar{c}, \gamma, s(\bar{a}, \bar{b})+\alpha+\beta\big)$ und damit

$$[\bar{c}, \gamma] = [\bar{a}+\bar{b}, s(\bar{a}, \bar{b})+\alpha+\beta] = [\bar{a}, \alpha]+[\bar{b}, \beta].$$

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt:*

a) $R(\bar{a}, \alpha, \beta)\Leftrightarrow\alpha=\beta$ *gilt genau dann, wenn* $\sigma_{\bar{a}}$ *eine eineindeutige Abbildung ist.*

b) $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ *besteht für alle* α *und* β *aus* $\mathfrak{M}_1$ *genau dann, wenn die Restklasse* $\bar{a}=[a]$ *nur ein Element* a *enthält bzw. wenn* $\sigma_{\bar{a}}(\alpha)=a$ *für alle* $\alpha\in\mathfrak{M}_1$ *gilt.*

Beweis. Die Feststellung a) folgt aus (i). Um b) zu zeigen, schließen wir wie folgt: Gilt $\sigma_{\bar{a}}(\alpha)=a$ für alle $\alpha\in\mathfrak{M}_1$, so folgt $\bar{a}=[a]=\{a\}$, denn $\sigma_{\bar{a}}$ ist eine Abbildung auf $[a]$. Im Falle $[a]=\{a\}$ besteht $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ für alle α und β aus $\mathfrak{M}_1$, denn wäre $\neg R(\bar{a}, \xi, \eta)$, also $[\bar{a}, \xi]\neq[\bar{a}, \eta]$, so müßten $[\bar{a}, \xi]$ und $[\bar{a}, \eta]$ wegen der Eindeutigkeit der Abbildung $a\to[\bar{a}, \alpha]$ auch verschiedene Originale $a\in\bar{a}$ und $b\in\bar{a}$ besitzen. Schließlich folgt aus $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta\in\mathfrak{M}_1$ wegen (i) auch $\sigma_{\bar{a}}(\alpha)=\sigma_{\bar{a}}(\beta)$ für alle $\alpha, \beta\in\mathfrak{M}_1$.

Als ein einfaches Beispiel zu unseren Ergebnissen betrachten wir den Halbmodul $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{S}\cup\{\infty\}$, wobei $\mathfrak{S}$ eine geordnete Menge sei und für jedes $s, s'\in\mathfrak{S}$ $s<\infty$ sowie $s+s'=s'+s=s+\infty=\infty+s=\infty+\infty=\infty$ festgesetzt werde. Die Gültigkeit von (a), (b) und (c) prüft man leicht nach; damit führt die gemäß Satz 2 erklärte Äquivalenzrelation $a\sim b$ in $\mathfrak{M}_2$ zu dem natürlich geordneten (irreduziblen) Halbmodul $\bar{\mathfrak{N}}=\{\bar{1}, \bar{2}\}$ mit

$$\bar{1} = \{a\colon a\in\mathfrak{S}\};\quad \bar{2} = \{\infty\}.$$

Für die Wahl von $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ steht also $\mathfrak{M}_{\bar{o}}=(0)$ und $\mathfrak{M}_{\bar{2}}=\mathfrak{M}_1$ fest; dabei ist $s(\bar{a}, \bar{b})=0$ für alle $\bar{a}, \bar{b}\in\bar{\mathfrak{M}}=\{\bar{o}\}\cup\bar{\mathfrak{N}}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Außerdem ist (gemäß obiger Folgerung) $\sigma_{\bar{2}}(\alpha)=\infty$ für alle $\alpha\in\mathfrak{M}_1$ zu setzen, womit (ii) für jede Wahl von σ_1 erfüllt ist. Somit hängt alles Weitere nur noch von der Wahl von $\mathfrak{M}_{\bar{1}}$ ab.

Will man $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=(0)$ festlegen, so existiert $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$ genau dann, wenn eine eineindeutige Abbildung σ_1 von $\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{S}$ existiert, also $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ den gleichen Ordnungstypus besitzen. In diesem Falle handelt es sich bei der Schreierschen Erweiterung $M=[\bar{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ gerade um bereits am Emde von [2] behandelte Beispiel

$$M = M_1\cup\big([\bar{1}, \mathfrak{M}_1]\cup\{\infty\}\big).$$

Wählt man $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=\mathfrak{M}_1$, so ist notwendig $\mathfrak{S}=\{a\}$, während $\mathfrak{M}_1$ beliebig wählbar ist; hier erhält man den Fall

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \precsim \mathfrak{M}_2.$$

Enthält schließlich $\mathfrak{M}_1$ einen nichttrivialen konvexen Untermodul $\mathfrak{U}$ und setzt man $\mathfrak{M}_{\bar{I}}=\mathfrak{U}$, so erhält man (gemäß (i)) als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$, daß es eine eineindeutige ähnliche Abbildung von $\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_{\bar{I}}$ auf $\bar{I}=\mathfrak{S}$ gibt. Dies ist z.B. der Fall, wenn man $\mathfrak{S}$ als die Menge dereellen Zahlen, $\mathfrak{M}_1$ als den (lexikographisch nach Real- und Imaginärteil) geordner ten Modul der komplexen Zahlen und $\mathfrak{M}_{\bar{I}}$ als den Untermodul der reinimaginären Zahlen wählt; hierd wird

$$M=M_1\cup([1,\ \mathfrak{S}]\cup\{\infty\}).$$

Literatur

[1] H. Lugowski, Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 23—31.

[2] H. Lugowski, Die Charakterisierung gewisser geordneter Halbmoduln mit Hilfe der Erweiterungstheorie, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 237—248.

[3] H. Lugowski, Zur Konstruktion gewisser geordneter Halbmoduln, *in Vorb.*

(Eingegangen am 1. Dezember 1966.)