Les groupes d'holonomie des espaces A_4*

Par MARIUS I. STOKA (Bucarest)

Soit A_n un espace à connexion affine rapporté à un système de congruences $ds^a = \lambda_i^a\, dx^i$. Si nous notons avec γ_{bc}^a les composantes de la connexion affine d'espace A_n par rapport au système de congruences (λ), alors les composantes de la connexion infinitésimale de l'espace sont $ds_b^a = \gamma_{bc}^a ds^c$.

En notant avec V^i les composantes d'un vecteur contravariant dans l'espace A_n, les équations du transport parallèle de ce vecteur sont

$$\frac{dv^a}{dt} = \frac{ds_b^a}{dt} v^b, \tag{1}$$

où $v^a = \lambda_i^a V^i$ sont les composantes du vecteur par rapport au système de congruences. En intégrant ce système, on obtient le groupe d'holonomie homogène de l'espace A_n.

Dans une étude antérieure [1], nous avons déterminé les groupes d'holonomie homogènes des espaces A_3. Dans cette étude nous déterminons les groupes d'holonomie homogènes des espaces A_4.

Si $n=4$, le système (1) s'écrit

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dv^1}{dt} &= \frac{ds_1^1}{dt} v^1 + \frac{ds_2^1}{dt} v^2 + \frac{ds_3^1}{dt} v^3 + \frac{ds_4^1}{dt} v^4,\\
\frac{dv^2}{dt} &= \frac{ds_1^2}{dt} v^1 + \frac{ds_2^2}{dt} v^2 + \frac{ds_3^2}{dt} v^3 + \frac{ds_4^2}{dt} v^4,\\
\frac{dv^3}{dt} &= \frac{ds_1^3}{dt} v^1 + \frac{ds_2^3}{dt} v^2 + \frac{ds_3^3}{dt} v^3 + \frac{ds_4^3}{dt} v^4,\\
\frac{dv^4}{dt} &= \frac{ds_1^4}{dt} v^1 + \frac{ds_2^4}{dt} v^2 + \frac{ds_3^4}{dt} v^3 + \frac{ds_4^4}{dt} v^4,
\end{aligned}\right. \tag{1'}$$

Considérons, en premier lieu, le cas où $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = 0$. De la première équation (1') il résulte

$$v^1 = c^1 e^{\int_0^t ds_1^1}$$

* Conférence présentée au „Troisième Congrès Interbalkanique des Mathématiciens, Bucarest 12—17. septembre 1966. Une version en langue roumaine va paraître dans „Studii şi cercetări Matematice".

Avec cette valeur, les autres équations (1′) deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv^2}{dt} = \dfrac{ds_2^2}{dt}\,v^2 + \dfrac{ds_3^2}{dt}\,v^3 + \dfrac{ds_4^2}{dt}\,v^4 + c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} \dfrac{ds_1^2}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dv^3}{dt} = \dfrac{ds_2^3}{dt}\,v^2 + \dfrac{ds_3^3}{dt}\,v^3 + \dfrac{ds_4^3}{dt}\,v^4 + c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} \dfrac{ds_1^3}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dv^4}{dt} = \dfrac{ds_2^4}{dt}\,v^2 + \dfrac{ds_3^4}{dt}\,v^3 + \dfrac{ds_4^4}{dt}\,v^4 + c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} \dfrac{ds_1^4}{dt} \end{cases}$$

Si $ds_3^2 = ds_4^2 = 0$, la première équation (2) a la solution

$$v^2 = e^{\int_0^t ds_2^2} \left[c^1 \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 + c^2 \right]$$

et les autres équations (2) deviennent

$$(2')\qquad \begin{cases} \dfrac{dv^3}{dt} = \dfrac{ds_3^3}{dt}\,v^3 + \dfrac{ds_4^3}{dt}\,v^4 + c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} \dfrac{ds_1^3}{dt} + e^{\int_0^t ds_2^2} \left[c^1 \displaystyle\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 + c^2 \right] \dfrac{ds_2^3}{dt} \\[2ex] \dfrac{dv^4}{dt} = \dfrac{ds_3^4}{dt}\,v^3 + \dfrac{ds_4^4}{dt}\,v^4 + c^1 e^{\int_0^t ds_1^1} \dfrac{ds_1^4}{dt} + e^{\int_0^t ds_2^2} \left[c^1 \displaystyle\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 + c^2 \right] \dfrac{ds_2^4}{dt}. \end{cases}$$

Si $ds_4^3 = 0$, la solution de ce système est

$$\begin{aligned} v^3 = e^{\int_0^t ds_3^3} \Bigg(& c^1 \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 \right) ds_2^3 + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)} ds_1^3 \right] + \\ & + c^2 \int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} ds_2^3 + c^3 \Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^4 = e^{\int_0^t ds_4^4} \Bigg\{ & c^1 \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 \right) ds_2^3 + \right.\right. \\ & \left. + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)} ds_1^3 \right) ds_3^4 + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 \right) ds_2^4 + \\ & \left. + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} ds_1^4 \right] + c^2 \left[\int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} \left(\int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} ds_2^3 \right) ds_3^4 + \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{\int_0^t (ds_2^2 - ds_4^4)} ds_2^4 \right] + c^3 \int_0^t e^{\int_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} ds_3^4 + c^4 \Bigg\}. \end{aligned}$$

Il en résulte que, dans ce cas, le groupe d'holonomie homogène de l'espace A_4 est

$$
(3)\qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \beta_1 \beta_2 v^1 + \beta_1 v^2, \\ v'^3 = \gamma_1 \gamma_2 v^1 + \gamma_1 \gamma_3 v^2 + \gamma_1 v^3, \\ v'^4 = \delta_1 \delta_2 v^1 + \delta_1 \delta_3 v^2 + \delta_1 \delta_4 v^3 + \delta_1 v^4, \end{cases}
$$

où nous avons noté

$$
\alpha = e^{\int\limits_c ds_1^1}, \quad \beta_1 = e^{\int\limits_c ds_2^2}; \quad \beta_2 = \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2, \quad \gamma_1 = e^{\int\limits_c ds_3^3},
$$

$$
\gamma_2 = \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \left[\int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 \right] ds_2^3 + \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)} ds_1^3,
$$

$$
\gamma_3 = \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} ds_2^3; \quad \delta_1 = e^{\int\limits_c ds_4^4},
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2 = & \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} \left[\int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} \left(\int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 \right) ds_2^3 + \right. \\
& \left. + \int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_3^3)} ds_1^3 \right] ds_3^4 + \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_2^2 - ds_4^4)} \left[\int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_2^2)} ds_1^2 \right] ds_2^4 + \\
& + \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_1^1 - ds_4^4)} ds_1^4,
\end{aligned}
$$

$$
\delta_3 = \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} \left[\int\limits_0^t e^{\int\limits_0^t (ds_2^2 - ds_3^3)} ds_2^3 \right] ds_3^4 + \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_2^2 - ds_4^4)} ds_2^4,
$$

$$
\delta_4 = \int\limits_c e^{\int\limits_0^t (ds_3^3 - ds_4^4)} ds_3^4,
$$

C étant une courbe fermée quelconque.

Par conséquent, si $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_3^2 = ds_4^2 = ds_4^3 = 0$ l'espace A_4 a comme groupe d'holonomie homogène le groupe (3) ou un sousgroupe de ce groupe.

Un résultat analogue est obtenu si $ds_4^3 \neq 0$, $ds_3^4 = 0$.

Le groupe (3) laisse invariantes les variétés linéaires $v^1 = 0$, $v^1 = v^2 = 0$ et $v^1 = v^2 = v^3 = 0$.

Compte tenu que $ds_b^a = \Gamma_{bc}^a ds^c$, Γ_{bc}^a étant les composantes de la connexion, dans un système de variables, des relations $ds_2^1 = ds_3^1 = ds_4^1 = ds_3^2 = ds_4^2 = ds_4^3 = 0$, il résulte

$$
\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{4i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = \Gamma_{4i}^2 = \Gamma_{4i}^3 = 0, \qquad (i = 1, \ldots, 4).
$$

Donc,

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i}=\Gamma^1_{3i}=\Gamma^1_{4i}=\Gamma^2_{3i}=\Gamma^2_{4i}=\Gamma^3_{4i}=0$, $(i=1, \ldots, 4)$ *admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe* (3) *ou un sousgroupe de ce groupe.*

D'une manière analogue on démontre les propriétés suivantes:

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i}=\Gamma^1_{3i}=\Gamma^1_{4i}=\Gamma^2_{3i}=\Gamma^2_{4i}=0$, $(i=1, \ldots, 4)$, $\sum_{i=1}^{4}(\Gamma^3_{4i})^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{4}(\Gamma^4_{3i})^2 \neq 0$, *admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe*

$$\begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \beta_1\beta_2 v^1 + \beta_2 v^2, \\ v'^3 = \gamma_1 v^1 + \beta_1\gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \beta_1\delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4, \end{cases}$$

ou un sousgroupe de ce groupe.

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{4i} = \Gamma^3_{4i} = 0$, $(i = 1, \ldots, 4)$,

$$\sum_{i=1}^{4}(\Gamma^2_{3i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4}(\Gamma^3_{2i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4}[(\Gamma^4_{2i})^2 + (\Gamma^4_{3i})^2] \neq 0,$$

admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe

$$(4) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \alpha\beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3, \\ v'^3 = \alpha\gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3, \\ v'^4 = \delta_1\delta_4 v^1 + \delta_2\delta_4 v^2 + \delta_3\delta_4 v^3 + \delta_4 v^4, \end{cases}$$

ou un sousgroupe de ce groupe.

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = \Gamma^2_{4i} = 0$, $(i = 1, \ldots, 4)$,

$$\sum_{i=1}^{4}(\Gamma^3_{4i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4}[(\Gamma^4_{2i})^2 + (\Gamma^4_{3i})^2] \neq 0,$$

admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe

$$(5) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \alpha\beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \beta_4 v^4, \\ v'^3 = \alpha\gamma_1 v^1 + \gamma_2 v^2 + \gamma_3 v^3 + \gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \alpha\delta_1 v^1 + \delta_2 v^2 + \delta_3 v^3 + \delta_4 v^4, \end{cases}$$

ou un sousgroupe de ce groupe.

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^1_{4i} = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$,

$$\sum_{i=1}^{4}(\Gamma^h_{ki})^2 \neq 0, \qquad (h \neq k = 2, 3, 4),$$

admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe (4) *ou* (5) *ou un sousgroupe de ces groupes.*

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^3_{2i} = \Gamma^4_{2i} = \Gamma^4_{3i} = 0$, $(i = 1, \dots, 4)$,

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma^1_{4i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} (\Gamma^4_{1i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^2_{1i})^2 + (\Gamma^2_{4i})^2] \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{4i})^2] \neq 0,$$

admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe

$$\begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_4 v^4 \\ v'^2 = \beta_1 \beta_2 v^1 + \beta_2 v^2 + \beta_2 \beta_4 v^4, \\ v'^3 = \gamma_1 \gamma_3 v^1 + \gamma_3 v^3 + \gamma_3 \gamma_4 v^4, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_4 v^4, \end{cases}$$

ou un sousgroupe de ce groupe.

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^4_{2i} = \Gamma^4_{3i} = 0$, $(i = 1, \dots, 4)$,

$$\sum_{i=1}^{4} (\Gamma^1_{4i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} (\Gamma^2_{3i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} (\Gamma^4_{1i})^2 \neq 0, \quad \sum [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{2i})^2 + (\Gamma^3_{4i})^2] \neq 0,$$

admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe

$$\begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_4 v^4, \\ v'^2 = \beta_i v^i, \qquad (i = 1, \dots, 4), \\ v'^3 = \gamma_i v^i, \\ v'^4 = \delta_1 v^1 + \delta_4 v^4, \end{cases}$$

ou un sousgroupe de ce groupe.

Les espaces A_4 *pour lesquels* $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = 0$, $(i = 1, \dots, 4)$,

$$\sum_{i=1}^{4}{}' (\Gamma^1_{4i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} (\Gamma^4_{2i})^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^2_{1i})^2 + (\Gamma^2_{3i})^2 + (\Gamma^2_{4i})^2] \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} [(\Gamma^3_{1i})^2 + (\Gamma^3_{2i})^2 + (\Gamma^3_{4i})^2] \neq 0,$$

admettent comme groupe d'holonomie homogène le groupe

$$\begin{cases} v'^1 = \alpha_h v^h, \qquad (h = 1, 2, 3), \\ v'^2 = \beta_h v^h, \\ v'^3 = \gamma_h v^h, \\ v'^4 = \delta_4(\delta_h v^h + v^4), \end{cases}$$

ou le groupe

$$v'^i = \alpha^i_j v^j, \qquad (i, j = 1, \dots, 4),$$

ou un sousgroupe de ces groupes.

Bibliographie

[1] M. Stoka, Les groupes d'holonomie des espaces A_3, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine*, **1-2**, (1966).

(Reçu le 18. février 1967.)