Über die verallgemeinerten uniformen Strukturen von Morita und ihre Vervollständigung

Von W. RINOW (Greifswald)

Uniforme Strukturen können nach TUKEY [4] durch Systeme von Überdeckungen definiert werden. Auf dieser Grundlage hat MORITA [1] den Begriff der uniformen Struktur verallgemeinert. Ein beliebiges Überdeckungssystem auf einer Menge heißt nach Morita eine uniformity. Dieser Begriff wird schrittweise verschärft zur T-uniformity, regulär uniformity und completely regulär uniformity. Die letzte ist mit der Tukeyschen uniformen Struktur identisch. In den zitierten Arbeiten hat Morita den Vervollständigungsprozeß auf die verallgemeinerten uniformen Strukturen zu übertragen versucht. Andere Konstruktionen gibt SUZUKI [3] an. Diese Ansätze führen jedoch nur für den Fall der regular uniformity zum Ziel. Im allgemeineren Falle ergibt die übliche Konstruktion durch Cauchyfilter, die sogenannte einfache Erweiterung, jedoch keine Vervollständigung. Diese kann für die T-uniformities nur durch einen transfiniten Iterationsprozeß erreicht werden. Ferner ergibt sich, daß die unterliegende Topologie der allgemeinsten uniformity stets schwach regulär im Sinne von SCHANIN [2] ist.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die genannten Schwierigkeiten vermeiden kann. Wir gehen von gefilterten Überdeckungssystemen aus. Diese sind mit den T-uniformities von Morita identisch. Die einem Überdeckungssystem unterliegende Topologie wird jedoch schwächer gefaßt als bei Morita, so daß jeder topologische Raum uniformisierbar wird. Die Äquivalenzrelation zwischen Überdeckungssystemen wird dagegen gegenüber Morita verschärft. Die Äquivalenzklassen sind die verallgemeinerten uniformen Strukturen. Wir ziehen den Namen Überdeckungsstruktur vor, um beim Vergleich mit den Moritaschen und anderen Arbeiten Verwirrungen in der Nomenklatur zu vermeiden. Der Begriff der Überdeckungsstruktur wird verschärft zu dem der schwach regulären und der regulären Überdeckungsstruktur. Diese entsprechen genau den T-uniformities bzw. regulär uniformities bei Morita. Es erweist sich weiterhin als notwendig, den Begriff des Cauchyfilters von Morita abzuschwächen zum Begriff des Fundamentalfilters. Für die Zwecke der Vervollständigungstheorie wird es dann nötig, den Begriff des Fundamentalfilters schrittweise zu verschärfen. Entsprechend erhalten wir auch verschiedene Vollständigkeitsbegriffe. Die regulären Überdeckungsstrukturen sind dadurch ausgezeichnet, daß die genannten verschiedenen Begriffe des Fundamentalfilters sowie der Vollständigkeit zusammenfallen und mit den Moritaschen Formulierungen identisch werden.

Der bekannte Vervollständigungsprozeß für uniforme Strukturen kann nunmehr auf beliebige Überdeckungsstrukturen übertragen werden. Es werden drei Vervollständigungen $V_m^0(\mathscr{U})$, $V^0(\mathscr{U})$, $V^1(\mathscr{U})$ einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ konstruiert. $V_m^0(\mathscr{U})$ und $V^0(\mathscr{U})$ sind strikte T_0-Erweiterungen und können durch Maximaleigenschaften charakterisiert werden. $V^1(\mathscr{U})$ ist eine strikte T_1-Erweiterung und $\mathscr{U}$ sowohl als auch $V^1(\mathscr{U})$ sind schwach reguläre Überdeckungsstrukturen, $V^1(\mathscr{U})$ kann in eindeutiger Weise bis auf äquivalente Erweiterungen charakterisiert werden. Hieraus folgt, daß $V^1(\mathscr{U})$ in einem gewissen Sinne weiter ist als die Vervollständigung von Morita durch den eingangs erwähnten transfiniten Iterationsprozeß. Schließlich wird gezeigt, daß $\mathscr{U}$ stets so gewählt werden kann, daß jede strikte T_1-Erweiterung eines beliebigen T_1-Raumes (M, T) durch die Vervollständigung $V^1(\mathscr{U})$ einer passend gewählten, mit der Topologie T verträglichen, schwach regulären Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ erzeugt werden kann. Dies ist die Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Morita über reguläre Erweiterungen eines regulären Raumes.

1. $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ und $\mathfrak{V}=\{\mathfrak{V}_\beta|\beta\in B\}$ seien zwei Systeme von Überdeckungen derselben Menge M. $\mathfrak{U}$ heißt feiner als $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}<\mathfrak{V}$, wenn es zu jedem $\beta\in B$ ein $\alpha\in A$ gibt, so daß die Überdeckung $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner ist als die Überdeckung $\mathfrak{V}_\beta$. Dabei heißt bekanntlich $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner als $\mathfrak{V}_\beta$, $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{V}_\beta$, wenn jedes Element von $\mathfrak{U}_\alpha$ in wenigstens einem Element von $\mathfrak{V}_\beta$ liegt. Die Relation $\mathfrak{U}<\mathfrak{V}$ ist reflexiv und transitiv. Ist $\mathfrak{U}<\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}<\mathfrak{U}$, so heißen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ äquivalent $\mathfrak{U}\sim\mathfrak{V}$. Dies ist die von Morita [1, I] zu Grunde gelegte Äquivalenzrelation.

Ist ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ auf einer Menge M gegeben, so erzeugt $\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ eine Topologie $\tau(\mathfrak{U})$ auf M, die unterliegende Topologie. $\mathfrak{U}$ heißt T-feiner als $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{U}\ll\mathfrak{v}$, wenn $\mathfrak{U}<\mathfrak{v}$ und $\tau(\mathfrak{U})\supseteqq\tau(\mathfrak{v})$ gilt. Auch diese Relation ist reflexiv und transitiv. Gilt $\mathfrak{U}\ll\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}\ll\mathfrak{U}$, so heißen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{v}$ T-äquivalent $\mathfrak{U}\approx\mathfrak{v}$; es ist alsdann $\tau(\mathfrak{U})=\tau(\mathfrak{v})$. Ein Überdeckungssystem $\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ heißt gefiltert, (T-uniformity bei Morita [1, I], Bedingung B), wenn es zu jedem $\alpha'\in A$ und $\alpha''\in A$ ein $\alpha\in A$ gibt, so daß $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{U}_{\alpha'}$ und $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{U}_{\alpha''}$ ist. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{v}$ äquivalent, so ist $\mathfrak{U}$ genau dann gefiltert, wenn auch $\mathfrak{v}$ gefiltert ist. Die Relation $\mathfrak{U}\approx\mathfrak{v}$ ist eine auf der Menge aller gefilterten Überdeckungssysteme von M definierte Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation heiße eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M und $M=|\mathscr{U}|$ die Trägermenge von $\mathscr{U}$. Je zwei Representanten derselben Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ besitzen dieselbe unterliegende Topologie. Diese wird als die $\mathscr{U}$ unterliegende Topologie $\tau(\mathscr{U})$ definiert. Ist auf M eine Topologie T und eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ gegeben, so heißt $\mathscr{U}$ mit T verträglich, wenn $T=\tau(\mathscr{U})$ ist. (Morita benutzt eine schärfere Verträglichkeitsbedingung). Die Relation $\mathfrak{U}\ll\mathfrak{U}$ induziert offensichtlich auf der Menge aller Überdeckunsstrukturen auf M eine Ordnung: $\mathscr{U}<\mathscr{V}$, $\mathscr{U}$ ist feiner als $\mathscr{V}$. Es gilt $\mathscr{U}<\mathscr{V}$ genau dann, wenn jeder Representant von $\mathscr{U}$ T-feiner ist als jeder Representant von $\mathscr{V}$ ist. Aus $\mathscr{U}<\mathscr{V}$ folgt $\tau(\mathscr{U})\supseteqq\tau(\mathscr{V})$.

Ausgehend von einem beliebigen Überdeckungssystem $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ auf M kann auf folgende Weise eine Überdeckungsstruktur erzeugt werden: Es sei $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A$. Dann ist $\mathfrak{U}_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{U}_{\alpha_n}=\{U_1\cap\ldots\cap U_n|U_1\in\mathfrak{U}_{\alpha_1},\ldots,U_n\in\mathfrak{U}_{\alpha_n}\}$ eine Überdeckung von M, und zwar ist sie gröber als jede Überdeckung von M, die feiner ist als jede der Überdeckungen $\mathfrak{U}_{\alpha_1},\ldots,\mathfrak{U}_{\alpha_n}$. $\hat{\mathfrak{U}}=\{\mathfrak{U}_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{U}_{\alpha_n}|\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in A;\ n=1,2,\ldots\}$ ist ein gefiltertes Überdeckungssystem, welches $\mathfrak{U}$ enthält und für welches $\tau(\hat{\mathfrak{U}})=\tau(\mathfrak{U})$ gilt. $\hat{\mathfrak{U}}$ definiert daher eine Überdeckungsstruktur, die durch $\mathfrak{U}$ erzeugte Überdeckungsstruktur. Ist $\mathfrak{U}$ Repräsentant einer Überdeckungsstruktur

$\mathscr{U}$, so ist $\hat{\mathfrak{U}}$ gefiltert und T-äquivalent zu $\mathfrak{U}$. Also ist auch $\hat{\mathfrak{U}}$ ein Representant von $\mathscr{U}$, und zwar offensichtlich ein Repräsentant, für welchen die sämtlichen Überdeckungselemente eine Basis für $\tau(\mathscr{U})$ bilden, die gegenüber endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.

In jeder Überdeckungsstruktur läßt sich ein Repräsentant auszeichnen: $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ sei ein beliebiger Represäntant von $\mathscr{U}$, $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{B}_\beta|\beta\in B\}$ sei das System aller Überdeckungen von M durch bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offene Teilmengen, so daß wenigstens ein $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner ist als $\mathfrak{B}_\beta$. Es ist nach Definition $\mathfrak{U}\subseteqq\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ T-äquivalent zu $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{B}$ heißt ein voller Repräsentant von $\mathscr{U}$. Wenn $\mathfrak{W}$ ein beliebiges Überdeckungssystem mit $\mathfrak{U}\ll\mathfrak{W}$, so ist wegen $\tau(\mathfrak{W})\subseteqq\tau(\mathfrak{U})=\tau(\mathscr{U})$ stets $\mathfrak{W}\subseteqq\mathfrak{B}$. Hieraus ergeben sich leicht folgende Sätze:

1. 1: *Jede Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M, besitzt genau einen vollen Repräsentanten. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß er jeden Repräsentanten von $\mathscr{U}$ als Teilmenge enthält. Es ist $\mathscr{U}'<\mathscr{U}''$ genau dann, wenn der volle Repräsentant von $\mathscr{U}''$ Teilmenge des vollen Repräsentanten von $\mathscr{U}'$ ist.*

1. 2: *Das System aller Überdeckungen einer Menge M ist voller Repräsentant der feinsten Überdeckungsstruktur auf M. Die unterliegende Topologie ist die diskrete.*

1. 3: *T sei eine Topologie auf M. Das System aller bezüglich T offenen Überdeckungen von M ist voller Repräsentant der feinsten mit T verträglichen Überdeckungsstruktur.*

Ist auf M ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U}_\alpha=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ gegeben, so heißt bekanntlich die Vereinigungsmenge aller Elemente einer Überdeckung $\mathfrak{U}_\alpha$, welche einen nicht leeren Durchschnitt mit einer gegebenen Teilmenge X von M haben der Stern von X; er sei mit $St_\alpha(X)$ bezeichnet. Für $St_\alpha(\{x\})$ schreibt man kurz $St_\alpha(x)$. $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ heißt ein schwach reguläres Überdeckungssystem, wenn es zu je endlich vielen $U_1,\ldots,U_n\in\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ und jedem $x\in U_1\cap\ldots\cap U_n$ ein $\alpha\in A$ gibt, so daß $St_\alpha(x)\subset\subset U_1\cap\ldots\cap U_n$. Äquivalent mit dieser Definition ist die folgende: $\{St_\alpha(x)|\alpha\in A\}$ ist für jedes $x\in M$ eine Basis des Umgebungsfilters von x bezüglich der Topologie $\tau(\mathfrak{U})$. Dies ist gerade die Bedingung A bei Morita. Unter einer schwach regulären Überdeckungsstruktur U versteht man eine Überdeckungsstruktur, die einen schwach regulären Repräsentanten besitzt. Aus der Bemerkung über die unterliegende Topologie folgt sofort, daß jeder Repräsentant einer schwach regulären Überdeckungsstruktur schwach regulär ist.

1. 4: *Für schwach reguläre Überdeckungssysteme fällt der Begriff der T-Verfeinerung und damit der T-Äquivalenz mit dem der Verfeinerung bzw. Äquivalenz zusammen.*

Beweis: Sind $\mathfrak{U}=(\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A)$ und $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}_\beta|\beta\in B)$ schwach regulär und ist $\mathfrak{U}$ feiner als $\mathfrak{B}$, so gibt es zu jedem $G\in\tau(\mathfrak{B})$ und $x\in G$ ein $\beta\in B$ mit $St_\beta(x)\subset G$. Wegen $\mathfrak{U}<\mathfrak{B}$ existiert ein $\alpha\in A$ mit $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{B}_\beta$. Hieraus folgt $St_\alpha(x)\subseteqq St_\beta(x)\subset G$. Also ist $G\in\tau(\mathfrak{U})$. Es ist somit $\tau(\mathfrak{B})\subseteqq\tau(\mathfrak{U})$. Entsprechend folgt $\tau(\mathfrak{U})\subseteqq\tau(\mathfrak{B})$.

Damit ist der Zusammenhang mit der Arbeit von Morita hergestellt: Eine mit einer Topologie T verträgliche T-Uniformität nach Morita ist identisch mit dem Begriff des Repräsentanten einer mit T verträglichen schwach regulären Überdeckungsstruktur. Zwei mit T verträgliche T-Uniformitäten sind genau dann im Sinne von Morita äquivalent, wenn sie Representanten derselben schwach regulären Überdeckungsstruktur sind.

In Übereinstimmung mit Morita nennen wir ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A)$ regulär, wenn $\mathfrak{U}$ schwach regulär ist und wenn es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ gibt, derart, daß zu jedem $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'}$ ein (von U' und α abhängiges) $\alpha'' \in A$ mit $St_{\alpha''}(U') \subset U$ für wenigstens ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ existiert (Bedingung C bei Morita). $\mathfrak{U}$ heißt vollständig regulär, wenn $\mathfrak{U}$ schwach regulär ist und wenn es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ gibt, sodaß $(St_{\alpha'}(U) | U \in \mathfrak{U}_{\alpha''})$ eine Überdeckung von M ist, die feiner ist, als $\mathfrak{U}_\alpha$ (Sternverfeinerung von $\mathfrak{U}_\alpha$). (Bedingung D bei Morita).

1. 5: *Sind $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A)$ und $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_\beta | \beta \in A)$ äquivalent, und ist $\mathfrak{U}$ regulär bzw. vollständig regulär, so ist auch $\mathfrak{B}$ regulär bzw. vollständig regulär.*

Beweis: Es sei $\beta \in B$, dann existiert ein $\alpha \in A$ mit $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{B}_\beta$. Zu α existiert ein $\alpha' \in A$ sodaß für jedes $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'} St_{\alpha''}(U') \subseteqq U$ für ein $\alpha'' \in A$ und ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ gilt. Es sei $\beta' \in B$ so gewählt, daß $\mathfrak{v}_{\beta'} < \mathfrak{U}_{\alpha'}$ gilt. Jedes $V' \in \mathfrak{B}_{\beta'}$ liegt in einem $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'}$. α'' sei das zu U' und gehörige Element von A. Dann existiert ein $\beta'' \in B$ mit $\mathfrak{B}_{\beta''} < \mathfrak{U}_{\alpha''}$. Es ist $St_{\beta''}(V') \subseteqq St_{\alpha''}(V') \subseteqq St_{\alpha''}(U')$. Also liegt $St_{\beta''}(V')$ in einem $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ und wegen $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{B}_\beta$ auch in einem $V \in \mathfrak{B}_\beta$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{B}$ regulär ist. Im vollständig regulären Falle schließt man so: Zu jedem $\mathfrak{B}_\beta$ existiert ein $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{B}_\beta$. $\{St_{\alpha'}(U) | U \in \mathfrak{U}_{\alpha'}\}$ sei eine Sternverfeinerung von $\mathfrak{U}_\alpha$. Man wähle $\beta' \in B$ so, daß $\mathfrak{B}_{\beta'} < \mathfrak{U}_{\alpha'}$ gilt. Jedes $V' \in \mathfrak{B}_{\beta'}$ liegt in einem $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'}$ und es ist $St_{\beta'}(V') \subseteqq St_{\alpha'}(V') \subseteqq St_{\alpha'}(U')$. Folglich ist $\{St_{\beta'}(V') | V' \in \mathfrak{B}_{\beta'}\} < \{St_{\alpha'}(U') \in \mathfrak{U}_{\alpha'}\} < \mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{B}_\beta$.

Eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ heißt regulär bzw. vollständig regulär, wenn $\mathscr{U}$ einen regulären bzw. vollständig regulären Repräsentanten besitzt. Es ist alsdann jeder Repräsentant von $\mathscr{U}$ regulär bzw. vollständig regulär. Vollständig reguläre Überdeckungstrukturen sind mit den uniformen Strukturen im üblichen Sinne identisch und sind stets auch regulär. Nach Morita [1, I] gelten folgende Sätze:

1. 6: *Ist $\mathscr{U}$ eine schwach reguläre, bzw. reguläre bzw. vollständig reguläre Überdeckungsstruktur, so ist die unterliegende Topologie $\tau(\mathscr{U})$ schwach regulär bzw. genügt dem Trennungsaxiom T_3, bzw. dem Trennungsaxiom von Tychonoff.*

1. 7: *T sei eine schwach reguläre bzw. eine T_3-Topologie auf M. Dann ist das Überdeckungssystem, welches aus allen bezüglich T offenen Überdeckungen besteht, voller Repräsentant einer schwach regulären bzw. regulären Überdeckungsstruktur.*

Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit muß gegenüber Morita etwas abgeändert werden: $\mathscr{U}$ bzw. $\mathscr{U}'$ seien Überdeckungsstrukturen auf M bzw. M' und $\mathfrak{U}_\alpha = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ bzw. $\mathfrak{U}' = \{\mathfrak{U}'_{\alpha'} | \alpha' \in A'\}$ seien Repräsentanten von $\mathscr{U}$ bzw. $\mathscr{U}'$. Eine Abbildung f von M in M' heißt bezüglich U, U' gleichmäßig stetig, wenn sie bezüglich $\tau(\mathfrak{U})$, $\tau(\mathfrak{U}')$ stetig ist und wenn es zu jedem $\alpha' \in A'$ ein $\alpha \in A$ gibt, so daß $\mathfrak{U}_\alpha$ feiner ist als die Überdeckung $\{f^{-1}(U') | U' \in \mathfrak{U}'_{\alpha'}\}$. Diese Definition ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten, denn es gilt:

1. 8: *Ist $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}' \ll' \mathfrak{B}'$ ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ Überdeckungssysteme auf M, $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{B}'$ Überdeckungssysteme auf M') und ist f bezüglich $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ gleichmäßig stetig, so ist f bezüglich $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig stetig.*

Der Zusammenhang mit den Moriatschen Formulierungen ergibt sich aus

1.9: *f sei eine Abbildung von M in M'. $\mathfrak{U}=(\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A)$ bzw. $\mathfrak{U}'=\{\mathfrak{U}'_\alpha|\alpha'\in A\}$ seien Überdeckungssysteme auf M bzw. M'. $\mathfrak{U}'$ sei schwach regulär und es gebe zu jedem $\alpha'\in A'$ ein $\alpha\in A$, so daß $\mathfrak{U}_\alpha<\{f^{-1}(U')|U'\in\mathfrak{U}'_{\alpha'}\}$. Dann ist f bezüglich $\tau(\mathfrak{U})$ und $\tau(\mathfrak{U}')$ stetig.*

Beweis: Es sei $x\in M$, G' offen bzgl. $\tau(\mathfrak{U}'_{\alpha'})$ und $f(x)\in G'$. Für ein gewisse $\alpha'\in A'$ gilt $St_{\alpha'}(f(x))\subseteq G'$. Zu diesem α' existiert ein $\alpha\in A$ mit $\mathfrak{U}_\alpha<\{f^{-1}(U')|U'\in\mathfrak{U}'_{\alpha'}\}$. Es sei $x\in U$, $U\in\mathfrak{U}_\alpha$. Dann gilt $U\subseteq f^{-1}(U')$ für ein $U'\in\mathfrak{U}'_{\alpha'}$, woraus $f(x)\in U'\subseteq \subseteq St_{\alpha'}(f(x))\subseteq G'$ folgt. Mithin ist f in jedem Punkte $x\in M$ stetig.

Eine Abbildung f heißt ein bezüglich $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}'$ uniformer Isomorphismus, wenn f eine eineindeutige Abbildung von $|\mathscr{U}|$ auf $|\mathscr{U}'|$ ist und wenn f sowohl als auch f^{-1} bezüglich $\mathscr{U}$ und $\mathscr{U}'$ gleichmäßig stetig sind. Existiert ein uniformer Isomorphismus von $\mathscr{U}$ auf $\mathscr{U}'$, so heißen $\mathscr{U}$ und $\mathscr{U}'$ uniform äquivalent.

2. $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ sei Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M. Ein Filter Φ auf M heißt ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$, wenn es zu jedem $\alpha\in A$ ein $X\in\Phi$ und ein $U\in\mathfrak{U}_\alpha$ mit $X\in U$ gibt. Zur Rechtfertigung dieser Definition sei $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{B}_\beta|\beta\in B\}$ ein beliebiges Überdeckungssystem auf M, und es sei $\mathfrak{U}<\mathfrak{B}$. Dann gibt es zu jedem $\beta\in B$ ein $\alpha\in A$ mit $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{B}_\beta$. Wenn dann $X\in\Phi$, $X\subseteq U$ und $U\in\mathfrak{U}_\alpha$ ist, so existiert auch ein $V\in\mathfrak{B}_\beta$ mit $U\subseteq V$, also $X\subseteq V$. Die Definition des Fundamentalfilters ist folglich unabhängig vom gewählten Representanten. Außerdem folgt:

2.1: *Ist $\mathscr{U}'<\mathscr{U}''$, so ist jeder Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}'$ auch ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}''$.*

2.2: *Jeder Filter, der feiner ist als ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$, ist ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$.*

Für die Zwecke der Erweiterungstheorie sind Verschärfungen des Begriffs des Fundamentalfilters erforderlich. Zunächst seien einige vorbereitende Definitionen gegeben. T sei eine Topologie auf M und Φ ein Filter auf M. Φ heißt ein offener Filter bezüglich T, wenn es zu jedem $X\in\Phi$ eine bezüglich T offene Menge G mit $G\in\Phi$ und $G\subseteq X$ gibt, wenn also die in Φ enthaltenen, bezüglich T offenen Mengen eine Filterbasis für Φ bilden. Ist $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M, so heißt ein Fundamentalfilter Φ bezüglich $\mathscr{U}$ ein $\mathfrak{U}=$Filter, wenn es zu jedem $X\in\Phi$ endlich viele Mengen $U_1,\ldots,U_n\in\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ mit $U_1\cap\ldots\cap U_n\in\Phi$ und $U_1\cap\ldots\cap U_n\subseteq X$ gibt. Ein $\mathfrak{U}$-Filter ist also ein offener Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$, der durch Elemente von $\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ erzeugt wird. Für den vollen Repräsentanten $\mathfrak{B}$ einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ fällt der Begriff des $\mathfrak{B}$-Filters mit dem des offenen Fundamentalfilters bezüglich $\mathscr{U}$ zusammen. Ist Φ ein beliebiger Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$, so erzeugen die Elemente von $\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ die in Φ enthalten sind, einen Filter $\Phi_{\mathfrak{U}}$. $\Phi_{\mathfrak{U}}$ ist offenbar ein $\mathfrak{U}$-Filter und Φ ist feiner als $\Phi_{\mathfrak{U}}$. Ein Filter, der für jeden Repäsentanten $\mathfrak{U}$ von $\mathscr{U}$ ein $\mathfrak{U}$-Filter ist, heiße ein $\mathscr{U}$-Filter. Solche Filter existieren, denn man sieht leicht ein, daß für jedes $x\in M$ der Filter T_x aller Umgebungen von x bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ ein $\mathscr{U}$-Filter ist. Während nun jeder Fundamentalfilter Φ feiner als ein $\mathfrak{U}$-Filter ist, nämlich $\Phi_{\mathfrak{U}}$, ist im allgemeinen nicht jeder Fundamentalfilter feiner als ein $\mathscr{U}$-Filter. Ein Filter, der feiner ist als ein $\mathscr{U}$-Filter, heiße ein strikter Fundamentalfilter. Nach 2. 2 ist jeder strikte Fundamentalfilter auch ein Fundamentalfilter.

2. 3: *Jeder bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ konvergente Filter ist ein strikter Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$.*

Beweis: Ist Φ konvergent gegen x, so ist Φ feiner als der Umgebungsfilter T_x von x und dieser ist ein $\mathscr{U}$-Filter.

$\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ sei Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$. Ein Fundamentalfilter Φ auf M heißt ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$, wenn es zu jedem $X\in\Phi$ ein $\alpha\in A$ gibt, so daß aus $U\in\mathfrak{U}_\alpha$ und $U\in\Phi$ stets $U\subseteqq X$ folgt. Der Begriff des schwachen Sternfilters ist unabhängig vom Repräsentanten $\mathfrak{U}$. Dies folgt aus Satz 2. 4.

2. 4: *Ist $\mathfrak{U}\sim\mathfrak{V}$ und Φ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathfrak{V}$, so ist Φ auch ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathfrak{U}$.*

Beweis: Es sei $X\in\Phi$ und $\beta\in B$, so daß aus $V\in\mathfrak{V}_\beta$ und $V\in\Phi$ stets $V\subseteqq X$ folgt˙ Man wähle $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{V}_\beta$. Ist dann $U\in\mathfrak{U}_\alpha$ und $U\in\Phi$, so existiert ein $V\in\mathfrak{V}_\beta$ mit $U\subseteqq V$. Hieraus folgt $V\in\Phi$, also $U\subseteqq V\subseteqq X$.

2. 5: *Jeder schwache Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$ ist ein minimaler Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$, d.h. ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$, der keinen Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$ als echte Teilmenge enthält. Jeder minimale Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$ ist ein $\mathscr{U}$-Filter.*

Beweis. Φ sei ein schwacher Sternfilter und Ψ ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$ mit $\Psi\subseteqq\Phi$. Es sei $X\in\Phi$. Dann existiert ein $\alpha\in A$ ($\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ Repräsentant von $\mathscr{U}$), so daß aus $U\in\mathfrak{U}_\alpha$, $U\in\Phi$ folgt $U\subseteqq X$. Da Ψ Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$ ist, existiert ein $U\in\mathfrak{U}_\alpha$ mit $U\in\Psi$. Für dieses U gilt $U\subseteqq X$. Folglich ist $X\in\Psi$, also $\Psi=\Phi$. Sei nunmehr Φ ein minimaler Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$. $\Phi_{\mathfrak{U}}$ sei der durch die in $\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ gelegenen Elemente von Φ erzeugte Filter. $\Phi_{\mathfrak{U}}$ ist ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$ und es gilt $\Phi_{\mathfrak{U}}\subseteqq\Phi$, also sogar $\Phi_{\mathfrak{U}}=\Phi$. Dies gilt für jede Wahl des Repräsentanten $\mathfrak{U}$ von $\mathscr{U}$. Folglich ist Φ ein $\mathscr{U}$-Filter.

2. 6: *$\mathscr{U}$ sei eine schwach reguläre Überdeckungsstruktur auf M. Dann ist für jedes $x\in M$ der Umgebungsfilter T_x von x bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$.*

Beweis: Es sei V eine beliebige Umgebung von x und $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}$. Da $\mathscr{U}$ schwach regulär ist, existiert ein $\alpha\in A$ mit $St_\alpha(x)\subseteqq V$, also aus $U\in\mathfrak{U}_\alpha$, $U\in T_x$ folgt $U\subseteqq V$. T_x ist daher ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$.

2. 7: *Φ sei ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$, der gegen einen Punkt $x\in|\mathscr{U}|$ konvergiert. Dann ist Φ mit dem Umgebungsfilter von x bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ identisch.* (Folge von 2. 5).

Ein Filter Φ auf M heißt nach Morita [1, I] ein Cauchyfilter bezüglich eines Überdeckungssystems $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$, wenn es zu jedem $\alpha\in A$ ein $\alpha'\in A$ und ein $X\in\Phi$

gibt, so daß $St_{\alpha'}(X) \subseteq U$ für wenigstens ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ gilt. Jeder Cauchyfilter bezüglich $\mathfrak{U}$ ist offenbar ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathfrak{U}$. Der Begriff Cauchyfilter ist auch bezüglich einer Überdeckungsstruktur unabhängig vom Repräsentanten definiert. Dies folgt aus der leicht zu beweisenden Tatsache: Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ äquivalente Überdeckungssysteme von M, so ist jeder Cauchyfilter bezüglich $\mathfrak{U}$ auch ein Cauchyfilter bezüglich $\mathfrak{V}$.

Für die Zwecke der T_1-Erweiterungen ist es notwendig, den Begriff des Cauchyfilters abzuschwächen: Ein Filter Φ heißt ein schwacher Cauchyfilter bezüglich $\mathscr{U}$, wenn er feiner als ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$ ist.

2. 8: *Jeder Chauchyfilter bezüglich $\mathscr{U}$ ist ein schwacher Cauchyfilter bezüglich $\mathscr{U}$ und jeder schwache Cauchyfilter bezüglich $\mathscr{U}$ ist ein strikter Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}$.*

Beweis: Φ sei ein Cauchyfilter und $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}$. $\{St_\alpha(X) | X \in \Phi, \alpha \in A\}$ erzeugt einen offenen Filter $St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$, den Sternfilter von Φ bezüglich $\mathfrak{U}$. Es gilt $St_{\mathfrak{U}}(\Phi) \subseteq \Phi$. $\{St_\alpha(X) | X \in \Phi, \alpha \in A\}$ ist eine Filterbasis für $St_{\mathfrak{u}}(\Phi)$. Denn sei $\alpha', \alpha'' \in A$ und $X', X'' \in \Phi$, so existiert ein $\alpha \in A$ mit $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{U}_{\alpha'}$, $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{U}_{\alpha''}$; dann aber folgt $St_\alpha(X' \cap X'') \subseteq St_\alpha(X') \cap St_\alpha(X'') \subseteq St_{\alpha'}(X') \cap St_{\alpha''}(X'')$. Da Φ ein Cauchyfilter ist, ist $St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$ ein Fundamentalfilter. Es sei nun $X \in St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$ beliebig. Dann existiert ein $\alpha \in A$ und ein $Y \in \Phi$ mit $St_\alpha(Y) \subseteq X$. Ist $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ und $U \in St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$ so ist $U \in \Phi$ und daher $U \cap Y \neq \emptyset$, also $U \subseteq St_\alpha(Y) \subseteq X$. Folglich ist $St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$. Der zweite Teil der Behauptung ist eine Folge aus 2. 5.

2. 9: *$\mathscr{U}$ sei eine schwach reguläre Überdeckungsstruktur auf M. Dann ist jeder bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ konvergente Filter ein schwacher Cauchyfilter.* (Folge von 2. 6).

2. 10: *$\mathscr{U}$ sei eine reguläre Überdeckungsstruktur auf M. Dann sind die Begriffe Fundamentalfilter, strikter Fundamentalfilter, schwacher Cauchyfilter und Cauchyfilter sowie die Begriffe minimaler Fundamentalfilter, schwacher Sternfilter identisch.*

Beweis: $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ sei ein Repräsentant von $\mathscr{U}$ und Φ ein Fundamentalfilter. Zu jedem $\alpha \in A$ existiert ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ mit $U \in \Phi$. Da $\mathfrak{U}$ regulär ist, gibt es ein $\alpha' \in A$, so daß für jedes $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'}$ ein $\alpha'' \in A$ existiert, so daß $St_{\alpha''}(U')$ in einem Element von $\mathfrak{U}_\alpha$ liegt. Man wähle ein solches $U' \in \mathfrak{U}_{\alpha'}$, welches in Φ liegt. Dann ist $St_{\alpha''}(U')$ in einem Element von $\mathfrak{U}_\alpha$ gelegen. Folglich ist Φ ein Cauchyfilter. Hieraus und aus 2. 8 folgt der erste Teil der Behauptung. Wegen 2. 5 genügt es zu zeigen, daß jeder minimale Fundamentalfilter Φ ein schwacher Sternfilter ist. Wie im Beweis von 2. 8 betrachte man den Sternfilter $St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$. Da schon gezeigt ist, daß Φ ein Cauchyfilter ist, ergibt sich aus dem Beweis von 2. 8, daß $St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$ ein schwacher Sternfilter ist. Wegen der Minimalität von Φ gilt $\Phi = St_{\mathfrak{U}}(\Phi)$.

Den verschiedenen Begriffen des Fundamentalfilters bzw. Cauchyfilters entsprechen auch verschiedene Vollständigkeitsbegriffe. Eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M heißt fundamental vollständig bzw. schwach fundamental vollständig bzw. stark vollständig bzw. vollständig, wenn jeder Fundamentalfilter bzw. strikte Fundamentalfilter bzw. schwache Cauchyfilter bzw. Cauchyfilter bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ konvergiert. Jede fundamentalvollständige Überdeckungsstruktur ist schwach fundamental vollständig, jede schwach fundamental vollständige ist stark vollständig und jede stark vollständige ist vollständig. Für reguläre Überdeckungsstrutruren fallen diese Begriffe nach Satz 2. 10 zusammen. Der Begriff der Vollständigkeit fällt mit dem der Vollständigkeit nach Morita zusammen.

2. 11: *T sei eine Topologie auf M und $\mathcal{U}_T$ die feinste mit T verträgliche Überdeckungsstruktur. Dann ist $\mathcal{U}_T$ fundamental vollständig.*

Beweis: Φ sei ein nicht konvergenter Fundamentalfilter bezüglich $\mathcal{U}$. Dann existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U_x, derart daß U_x nicht in Φ enthalten ist. $\{U_x | x \in M\}$ ist eine Überdeckung, die zum vollen Repräsentanten von $\mathcal{U}$ gehört. Da Φ Fundamentalfilter ist, müßte $U_x \in \Phi$ für wenigstens ein $x \in M$ gelten.

3. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha | A\}$ sei ein Überdeckungssystem auf M und N eine Teilmenge von M. Für jedes $\mathfrak{U}_\alpha$ bilde man die Spur auf N: $\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha = \{U \cap N | U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$. $\tilde{\mathfrak{U}} = \{\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha | \alpha \in A\}$ ist dann ein Überdeckungssystem auf N, die Spur von $\mathfrak{U}$ auf N. Offenbar gelten folgende Sachverhalte: Die $\tilde{\mathfrak{U}}$ unterliegende Topologie $\tau(\tilde{\mathfrak{U}})$ ist gleich der Spur von $\tau(\mathfrak{U})$ auf N. Ist $\mathfrak{U}$ feiner bzw. T-feiner als $\mathfrak{V}$, so gilt das Entsprechende für ihre Spuren. Äquivalente bzw. T-äquivalente Überdeckungssysteme haben äquivalente bzw. T-äquivalente Spuren, und gefilterte Überdeckungen haben auch gefilterte Spuren. Es ist daher auch die Spur $\tilde{\mathcal{U}}$ auf N einer Überdeckungstruktur $\mathcal{U}$ definiert. Es ist leicht einzusehen, daß die Spur einer schwach regulären bzw. regulären Überdeckungsstruktur wieder eine schwach reguläre bzw. reguläre Überdeckungsstruktur ist.

Ist $M \subseteqq M'$, $\mathfrak{U}' = \{\mathfrak{U}'_\alpha | \alpha \in A\}$ ein Überdeckungssystem auf M', $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ die Spur von $\mathfrak{U}'$ auf M und M eine bezüglich $\tau(\mathfrak{U}')$ dichte Teilmenge von M', so heißt $\mathfrak{U}'$ eine Erweiterung von $\mathfrak{U}$. Es ist dann der topologische Raum $(M', \tau(\mathfrak{U}'))$ eine Erweiterung des topologischen Raumes $(M, \tau(\mathfrak{U}))$, d.h. $(M, \tau(\mathfrak{U}))$ ist ein in $(M', \tau(\mathfrak{U}'))$ dichter Teilraum. Eine Überdeckungsstruktur $\mathcal{U}'$ auf M' heißt eine Erweiterung der Überdeckungsstruktur $\mathcal{U}$ auf M, wenn M eine bezüglich $\tau(\mathcal{U}')$ dichte Teilmenge von M' und $\mathcal{U}$ die Spur von $\mathcal{U}'$ auf M ist, wenn also jeder Repräsentant von $\mathcal{U}'$ Erweiterung eines Repräsentanten von $\mathcal{U}$ ist.

Wir werden im folgenden nur strikte Erweiterungen betrachten. Diese sind so definiert: Der topologische Raum (M', T') sei eine Erweiterung des topologischen Raumes (M, T). Für jede bezüglich T offene Menge G sei $O_{M'}(G)$ die Vereinigung aller bezüglich T offenen Teilmengen G' von M', für die $M \cap G' = G$ ist. $O_{M'}(G)$ ist bezüglich T' offen. Ist $\{O_{M'}(G) | G \in T\}$ eine Basis von T', so heißt (M', G') eine strikte Erweiterung von (M, G). Wir bemerken noch, daß der Operator $O_{M'}$ folgende Eigenschaften besitzt: $M \cap O_{M'}(G) = G$; $G \subseteqq H$ genau dann, wenn $O_{M'}(G) \subseteqq O_{M'}(H)$; $O_{M'}(G \cap H) = O_{M'}(G) \cap O_{M'}(H)$.

Ein Überdeckungssystem $\mathfrak{U}'$ bzw. eine Überdeckungsstruktur $\mathcal{U}'$ auf M' heißt eine topologisch strikte Erweiterung des Überdeckungssystems $\mathfrak{U}$ bzw. der Überdeckungsstruktur $\mathcal{U}$ auf M, wenn $\mathfrak{U}'$ bzw. $\mathcal{U}'$ eine Erweiterung von $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathcal{U}$ ist und wenn die Erweiterung $(M', \tau(\mathfrak{U}'))$ bzw. $(M', \tau(\mathcal{U}'))$ von $(M, \tau(\mathfrak{U}))$ bzw. $(M, \tau(\mathcal{U}))$ strikt ist.

$\mathcal{U}'$ sei eine Erweiterung von $\mathcal{U}$ und $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ ein Repräsentant von $\mathcal{U}$. Die Trägermengen von $\mathcal{U}'$ bzw. $\mathcal{U}$ seien M' bzw. M. Man setzte $O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha) = \{O_{M'}(U) | U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$ und $O_{M'}(\mathfrak{U}) = \{O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha) | \alpha \in A\}$. $O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha)$ ist für jedes α ein System von bezüglich $\tau(\mathcal{U}')$ offenen Teilmengen von M'. $\mathfrak{U}$ sei nun gleich der Spur eines Repräsentanten $\mathfrak{U}' = \{\mathfrak{U}'_\alpha | \alpha \in A\}$ von $\mathscr{U}'$. Dann gilt $U' \subseteqq O_{M'}(U' \cap M)$ für $U' \in \mathfrak{U}'_\alpha$, $\alpha \in A$. Hieraus folgt, daß $O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ eine bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offene Überdeckung von M' ist und $\mathfrak{U}'_\alpha < O_{M'}(\mathfrak{U}_\alpha)$ gilt. $O_{M'}(\mathfrak{U})$ ist daher ein Überdeckungssystem auf M' mit $\mathfrak{U}' \ll O_{M'}(\mathfrak{U})$ und man zeigt leicht, daß $O_{M'}(\mathfrak{U})$ auch gefiltert ist. Im allgemeinen ist $O_{M'}(\mathfrak{U})$ jedoch kein Repräsentant von $\mathscr{U}'$.

Man definiere: Eine Erweiterung $\mathscr{U}'$ von $\mathscr{U}$ heißt uniform strikt, wenn für jeden Repräsentanten $\mathfrak{U}$ von $\mathscr{U}$ $O_{M'}(\mathfrak{U})$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}'$ ist.

3. 1: *Jede uniforme strikte Erweiterung $\mathscr{U}'$ von $\mathscr{U}$ ist auch topologisch strikt.*

Beweis: $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ sei ein Repräsentant von $\mathscr{U}$. Dann ist $O_{M'}(\mathfrak{U})$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}'$. Die Topologie $\tau(\mathscr{U}')$ wird daher erzeugt durch $\{O_{M'}(V) | V \in \mathfrak{U}_\alpha, \alpha \in A\}$. Ist $G' \in \tau(\mathscr{U}')$, $x' \in G'$, so existieren $U_i \in \mathfrak{U}_{\alpha_i}$ $(\alpha_i \in A;\ i = 1, \ldots, n)$ mit $x' \in O_{M'}(U_1) \cap \ldots \cap O_{M'}(U_n) = O_{M'}(U_1 \cap \ldots \cap U_n) \subseteqq G'$ und $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \tau(\mathscr{U})$. Folglich bilden die Mengen $O_{M'}(G)$ mit $G \in \tau(\mathscr{U})$ eine Basis für $\tau(\mathscr{U}')$.

Eine Erweiterung $\mathscr{U}'$ von $\mathscr{U}$ heißt ein T_0-, bzw. T_1-Erweiterung, wenn $\tau(\mathscr{U}')$ eine T_0- bzw. T_1-Topologie ist. Es ist alsdann auch $\tau(\mathscr{U})$ eine T_0- bzw. T_1-Topologie.

Wir konstruieren nunmehr eine topologisch strikte T_0-Erweiterung, die gewisse Vollständigkeitseigenschaften besitzt. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ sei Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M und $\tau(\mathscr{U})$ sei eine T_0-Topologie. Die Menge aller $\mathfrak{U}$-Filter, die von den Umgebungsfiltern der Punkte $x \in M$ bzgl. $\tau(\mathscr{U})$ verschieden sind, sei mit $F_\mathfrak{U}$ bezeichnet. Man definiere $E_\mathfrak{U}(X) = X \cup \{\Phi | \Phi \in F_\mathfrak{U},\ X \in \Phi\}$, wobei X eine beliebige Teilmenge von M ist. $E_\mathfrak{U}$ ist eine Abbildung der Potenzmenge von M in die Potenzmenge von $M' = M \cup F_\mathfrak{U}$. Es gelten, wie man leicht zeigt, folgende Beziehungen: $M \cap E_\mathfrak{U}(X) = X$, $X \subseteqq Y$ genau dann, wenn $E_\mathfrak{U}(X) \subseteqq E_\mathfrak{U}(Y)$ und $E_\mathfrak{U}(X \cap Y) = E_\mathfrak{U}(X) \cap E_\mathfrak{U}(Y)$. $\{E_\mathfrak{U}(U) | U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$ ist für jedes $\alpha \in A$ eine Überdeckung von M', deren Spur auf M gleich $\mathfrak{U}_\alpha$ ist. Das letzte ist klar. Für $x \in M$ gilt offenbar $x \in U \subseteqq E_\mathfrak{U}(U)$ für wenigstens ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$. Es sei $\Phi \in F_\mathfrak{U}$. Da Φ ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathfrak{U}$ ist, existiert ein $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ mit $U \in \Phi$, also ist $\Phi \in E_\mathfrak{U}(U)$. Wir setzen $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_\alpha) = \{E_\mathfrak{U}(U) | U \in \mathfrak{U}_\alpha\}$ und $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}) = \{E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_\alpha) | \alpha \in A\}$. $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U})$ ist ein Überdeckungssystem auf M', und die Spur von $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U})$ ist gleich $\mathfrak{U}$. Aus der Monotonieeigenschaft des Operators $E_\mathfrak{U}$ folgt: $\mathfrak{U}_\alpha < \mathfrak{U}_{\alpha'}$ genau dann, wenn $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_\alpha) < E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_{\alpha'})(\alpha, \alpha' \in A)$. Hieraus ergibt sich leicht, daß $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U})$ gefiltert, also Repräsentant einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}' = E_\mathfrak{U}(\mathscr{U})$ auf M' ist. Ferner ist $\tau(\mathscr{U})$ gleich der Spur von $\tau(\mathscr{U}')$, denn jedes $U \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$ ist Spur von $E_\mathfrak{U}(\mathscr{U})$. Es sei nun $\Phi \in F_\mathfrak{U}$. Jede Umgebung von Φ bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ enthält eine Umgebung von Φ der Form $E_\mathfrak{U}(U_1) \cap \ldots \cap E_\mathfrak{U}(U_n)$ mit $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$. Der Operator $E_\mathfrak{U}$ ist endlich durchschnittstreu; es gilt daher $E_\mathfrak{U}(U_1) \cap \ldots \cap E_\mathfrak{U}(U_n) = E_\mathfrak{U}(U_1 \cap \ldots \cap U_n)$. Die Spur von $E_\mathfrak{U}(U_1 \cap \ldots \cap U_n)$ ist gleich $U_1 \cap \ldots \cap U_n$, also nicht leer; d.h. M ist in M' bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ dicht.

Damit ist bereits gezeigt, daß $E_\mathfrak{U}(\mathfrak{U})$ eine Erweiterung von $\mathfrak{U}$ mit der Trägermenge M' ist. Es ist damit auch $\mathscr{U}'$ eine Erweiterung von $\mathscr{U}$. Wir zeigen nunmehr: $E_\mathfrak{U}(G) = O_{M'}(G)$ für jedes $G \in \tau(\mathscr{U})$. Offenbar gilt $M \cap E_\mathfrak{U}(G) = M \cap O_{M'}(G) = G$. Φ sei ein Element von $F_\mathfrak{U}$ mit $\Phi \in E_\mathfrak{U}(G)$. Dann ist $G \in \Phi$. Da Φ ein $\mathfrak{U}$-Filter ist, existieren $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$ mit $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \Phi$ und $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteqq G$, woraus $\Phi \in E_\mathfrak{U}(U_1 \cap \ldots \cap U_n) = E_\mathfrak{U}(U_1) \cap \ldots \cap E_\mathfrak{U}(U_n) \subseteqq E_\mathfrak{U}(G)$ folgt. $E_\mathfrak{U}(U_1) \cap \ldots \cap E_\mathfrak{U}(U_n)$ ist eine bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offene Menge mit der Spur $U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Nach Definition des Operators $O_{M'}$ gilt $E_\mathfrak{U}(U_1 \cap \ldots \cap U_n) \subseteqq O_{M'}(U_1 \cap \ldots \cap U_n) \subseteqq O_{M'}(G)$, also

$\Phi \in O_{M'}(G)$. Damit ist $E_{\mathfrak{U}}(G) \subseteqq O_{M'}(G)$ gezeigt. Es sei jetzt $\Phi \in O_{M'}(G)$, $\Phi \in F_{\mathfrak{U}}$. Da $O_{M'}(G)$ bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offen ist, existieren $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha$ mit $\Phi \in E_{\mathfrak{U}}(U_1) \cap \ldots \cap E_{\mathfrak{U}}(U_n) \subseteqq O_{M'}(G)$. Es folgt $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \Phi$ und $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteqq G$, also $G \in \Phi$ und $\Phi \in E_{\mathfrak{U}}(G)$. Folglich gilt auch $O_{M'}(G) \subseteqq E_{\mathfrak{U}}(G)$. Aus der eben bewiesenen Gleichung $E_{\mathfrak{U}}(G) = O_{M'}(G)$ für $G \in \tau(\mathscr{U})$ ergibt sich, daß $\mathscr{U}'$ eine topologisch strikte Erweiterung von $\mathscr{U}$ ist, denn nach Definition von $\tau(\mathscr{U}')$ ist $\{E_{\mathfrak{U}}(U) | U \in \mathfrak{U}_\alpha, \alpha \in A\}$ ein Erzeugendensystem von $\tau(\mathscr{U}')$ und wegen der endlichen Durchschnittstreue von $E_{\mathfrak{U}}$ ist $\{E_{\mathfrak{U}}(G) | G \in \tau(\mathscr{U})\}$ eine Basis für $\tau(\mathscr{U}')$.

Für $\tau(\mathscr{U}')$ gilt das T_0-Trennungsaxiom. Sind $x, y \in M$ mit $x \neq y$, so existiert eine bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offene Menge G, die einen der beiden Punkte x, y enthält, den anderen dagegen nicht; dann ist $E_{\mathfrak{U}}(G)$ eine ebensolche Menge, die bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offen ist. Im Falle $\Phi \in F_{\mathfrak{U}}$ und $x \in M$ existiert nach Definition von $F_{\mathfrak{U}}$ eine bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offene Menge G, die in einem der beiden Filter Φ, T_x (Umgebungsfilter von x) enthalten ist, im anderen dagegen nicht. $E_{\mathfrak{U}}(G)$ ist dann eine bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offene Menge, die genau einen der beiden Punkte Φ, x enthält. Schließlich seien $\Phi_1, \Phi_2 \in F_{\mathfrak{U}}$ mit $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Da Φ_1, Φ_2 verschiedene bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offene Filter sind, existiert eine bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offene Menge G, die in genau einem der beiden Filter Φ_1, Φ_2 enthalten ist. $E_{\mathfrak{U}}(G)$ ist dann eine bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offene Menge, die genau einen der beiden Filter enthält.

Schließlich zeigen wir, daß $\mathscr{U}'$ fundamental vollständig ist. Φ' sei ein Fundamentalfilter bezüglich $\mathscr{U}'$. Φ' enthält also zu jedem $\alpha \in A$ ein Element U'_α von $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}_\alpha)$. Die Elemente $U'_\alpha (\alpha \in A)$ erzeugen einen Filter Ψ'. Ψ' ist ein $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})$-Filter. Man zeigt leicht, daß die Spur Ψ von Ψ' ein $\mathfrak{U}$-Filter ist. Es ist also $\Psi \in F_{\mathfrak{U}}$ oder Ψ gleich dem Umgebungsfilter eines Punktes $x \in M$. In beiden Fällen ist $\{E_{\mathfrak{U}}(X) | X \in \Psi\}$. Basis des Umgebungsfilters bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ von Ψ bzw. x. Dieser Umgebungsfilter ist größer als Ψ'. Ist nämlich $E_{\mathfrak{U}}(X) (X \in \Psi)$ ein Element des Umgebungsfilters von Ψ bzw. x, so existiert ein $X' \in \Psi'$ mit $M \cap X' \subseteqq X$, $M \cap X' \in \Psi$, denn Ψ ist die Spur von Ψ'. Da Ψ' ein $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})$-Filter ist, darf X' dabei als Durchschnitt $E_{\mathfrak{U}}(U_1) \cap \ldots \cap E_{\mathfrak{U}}(U_n)$ $(U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{U}_\alpha)$ angenommen werden. Dann wird $M \cap X' = U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteqq X$ und $E_{\mathfrak{U}}(M \cap X') = E_{\mathfrak{U}}(U_1) \cap \ldots \cap E_{\mathfrak{U}}(U_n) \subseteqq E_{\mathfrak{U}}(X)$. Folglich ist $E_{\mathfrak{U}}(X)$ Element von Ψ'. Nun ist Φ' feiner als ψ' und daher feiner als der Umgebungsfilter bezüglich $\tau(U')$ von Ψ bzw. x. Mithin konvergiert Φ' bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$.

3.2: *Zu jedem Repräsentanten $\mathfrak{U}$ einer Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M, deren unterliegende Topologie dem T_0-Axiom genügt, existiert eine fundamental vollständige, topologisch strikte T_0-Erweiterung $E_{\mathfrak{U}}(\mathscr{U})$ von $\mathscr{U}$.*

Bemerkung: Ist $\mathfrak{V}$ der volle Repräsentant von $\mathscr{U}$, so besteht $F_{\mathfrak{V}}$ aus den sämtlichen bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offenen Fundamentalfiltern von $\mathscr{U}$, die von den Umgebungsfiltern der Punkte $x \in M$ verschieden sind. Es ist dann $M \cup F_{\mathfrak{U}} \subseteqq M \cup F_{\mathfrak{V}}$ und die $\tau(E_{\mathfrak{U}}(\mathscr{U}))$ unterliegende Topologie ist gleich der Spur von $\tau(E_{\mathfrak{V}}(\mathscr{U}))$ auf $M \cup F_{\mathfrak{U}}$. Wir bezeichnen $E_{\mathfrak{V}}(\mathscr{U})$ mit $V_m^0(\mathscr{U})$ und nennen $V_m^0(\mathscr{U})$ die maximale T_0-Vervollständigung von $\mathscr{U}$.

Un die Existenz einer uniform strikten Erweiterung zu zeigen, führen wir folgende Konstruktion durch: $\mathscr{U}$ sei eine Überdeckungsstruktur auf M und $\tau(\mathscr{U})$ eine T_0-Topologie. Statt $F_{\mathfrak{U}}$ legen wir die Menge $F_{\mathscr{U}}$ aller $\mathscr{U}$-Filter zugrunde, die von den Umgebungsfiltern aller Punkte $x \in M$ verschieden sind. Offenbar ist $F_{\mathscr{U}}$

gleich dem Durchschnitt aller Mengen $F_{\mathfrak{U}}$, wobei $\mathfrak{U}$ alle Repräsentanten von $\mathscr{U}$ durchläuft. Aus dieser Bemerkung folgt sofort, daß bei jeder Wahl des Repräsentanten $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ für jedes $\alpha\in A$ die Spur von $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}_\alpha)$ auf $M''=M\cup F_{\mathscr{U}}$ eine Überdeckung von M'' ist. Den auf M'' eingeschränkten Operator $E_{\mathfrak{U}}$ bezeichnen wir mit $E_{\mathscr{U}}$, also $E_{\mathscr{U}}(X)=X\cup\{\Phi|\Phi\in F_{\mathscr{U}},\ X\in\Phi\}$ für $X\subseteqq M$. Für jeden Repräsentanten $\mathfrak{U}$ von $\mathscr{U}$ erhalten wir so die Erweiterung $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U})$, die Spur der Erweiterung $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})$ auf M''. Die Spur von $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U})$ auf M ist wieder $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{B}_\beta|\beta\in B\}$ sei ein weiterer Repräsentant von $\mathscr{U}$. Zu jedem $\beta\in B$ existiert ein $\alpha\in A$ mit $\mathfrak{U}_\alpha<\mathfrak{B}_\beta$. Dann folgt leicht aus der Monotonie von $E_{\mathscr{U}}$, daß auch $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U}_\alpha)<E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U}_\beta)$ gilt. Aus Symmetriegründen sind daher $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U})$ und $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B})$ äquivalent. Die unterliegenden Topologien $\tau(E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U}))$ und $\tau(E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B}))$ sind die Spuren von $\tau(E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}))$ und $\tau(E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B}))$ auf M''. Es sei G'' offen bezüglich $\tau(E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U}))$ und $x''\in G''$. Dann existieren $U_1,\dots,U_n\in\bigcup_{\alpha\in A}\mathfrak{U}_\alpha$ mit $x''\in E_{\mathscr{U}}(U_1)\cap\dots\cap E_{\mathscr{U}}(U_n)\subseteqq G''$. **Ist** $x''\in M$, so ist $x''\in U_1\cap\dots\cap U_n$. $E_{\mathfrak{B}}(U_1)\cap\dots\cap E_{\mathfrak{B}}(U_n)$ ist offen bezüglich $\tau(E_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}))$ und die Spur auf M'' ist mit $E_{\mathscr{U}}(U_1)\cap\dots\cap E_{\mathscr{U}}(U_n)$ identisch, also bezüglich $\tau(E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B}))$ offen. Sei nun $x''=\Phi\in F_{\mathfrak{U}}$. Dann ist $U=U_1\cap\dots\cap U_n\in\Phi$. Da Φ ein $\mathscr{U}$-Filter ist, existieren $V_1,\dots,V_r\in\bigcup_{\beta\in B}\mathfrak{B}_\beta$ mit $V_1\cap\dots\cap V_r\in\Phi$ $V_1\cap\dots\cap V_r\subseteqq U$. Es ist $\Phi\in E_{\mathscr{U}}(V_1\cap\dots\cap V_r)\subseteqq$ $\subseteqq E_{\mathscr{U}}(U)\subseteqq G''$ und $E_{\mathscr{U}}(V_1\cap\dots\cap V_r)=E_{\mathscr{U}}(V_1)\cap\dots\cap E_{\mathscr{U}}(V_r)$ die Spur von $E_{\mathfrak{B}}(V_1)\cap\dots$ $\dots\cap E_{\mathfrak{B}}(V_r)$ auf M'', also bezüglich $\tau(E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B}))$ offen. G'' ist daher auch bezüglich $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B})$ offen. Aus Symmetrie-gründen folgt, daß $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U})$ und $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{B})$ sogar T-äquivalent sind. $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{U})$ definiert daher unabhängig vom gewählten Repräsentanten auf M'' eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}''$ und $\mathscr{U}''$ ist eine uniforme strikte Erweiterung von $\mathscr{U}$. Die $\mathscr{U}''$ unterliegende Topologie T'' ist die Spur von $\tau(E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}))$ auf M''. $\mathscr{U}''$ ist daher eine T_0-Erweiterung von $\mathscr{U}$. Analog wie im Falle der Erweiterung $E_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})$ zeigt man, daß $\mathscr{U}''$ schwach fundamental vollständig ist. Man hat nur zu berücksichtigen, daß $\mathscr{U}''$ eine uniforme strikte Erweiterung von $\mathscr{U}$ ist und daß unter dieser Bedingung die Spur eines $\mathscr{U}''$-Filters ein $\mathscr{U}$-Filter ist. Wir bezeichnen diese Erweiterung $\mathscr{U}''$ mit $V^0(\mathscr{U})$, die T_0-Vervollständigung von $\mathscr{U}$.

3.3: *Zu jeder Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M, deren unterliegende Topologie dem T_0-Axiom genügt, existiert eine schwach fundamental vollständige, uniform strikte T_0-Erweiterung $V^\circ(\mathscr{U})$.*

3.4: *$\tilde{\mathscr{U}}$ sei eine topologische strikte T_0-Erweiterung von $\mathscr{U}$. Dann existiert eine bezüglich $\tilde{\mathscr{U}}$, $V^0_m(\mathscr{U})$ gleichmäßig stetige und bezüglich $\tau(\tilde{\mathscr{U}})$, $\tau(V^0_m(\mathscr{U}))$ topologische Abbildung von $|\tilde{\mathscr{U}}|$ in $|V^0_m(\mathscr{U})|$, welche die Punkte von $|\mathscr{U}|$ festläßt.*

Beweis. $(\tilde{M},\tilde{T})$ bzw. (M,T) seien die $\tilde{\mathscr{U}}$ bzw. $\mathscr{U}$ unterliegenden topologischen Räume und $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U}_\alpha|\alpha\in A\}$ der volle Repräsentant von $\mathscr{U}$. Der unterligende topologische Raum der maximalen T_0-Vervollständigung $V^0_m(\mathscr{U})$ sei (M',T') also $M'=M\cup F_{\mathfrak{U}}$. $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ sei der Umgebungsfilter eines beliebigen Punktes $\tilde{x}\in\tilde{M}$ bzgl $\tilde{T}$. Für $\tilde{x}\in M$ ist die Spur von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ auf M der Umgebungsfilter $T_{\tilde{x}}$ von $\tilde{x}$ bezüglich T. Für $\tilde{x}\in\tilde{M}-M$ ist die Spur $\Phi_{\tilde{x}}$ von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ auf M ein bezüglich T offener Fundamentalfilter von $\mathscr{U}$, also $\Phi_{\tilde{x}}\in F_{\mathfrak{U}}$. $\tilde{x}\to\Phi_{\tilde{x}}$ für $\tilde{x}\in\tilde{M}-M$ und $\tilde{x}\to\tilde{x}$ für $\tilde{x}\in M$ definiert eine Abbildung S von $\tilde{M}$ in M' mit $S(\tilde{x})=\tilde{x}$ für $\tilde{x}\in M$ und $S(\tilde{M}-M)\in F_{\mathfrak{U}}$. — S ist eineindeutig. Es sei $\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{M}-M$ und $\tilde{x}\neq\tilde{y}$. Dann existiert nach dem T_0-Trennungsaxiom und wegen der topologischen Striktheit der Erweiterung $\tilde{\mathscr{U}}$ eine bezüglich

T offene Menge G, so daß etwa gilt $\tilde{x} \in O_{\tilde{M}}(G)$ und $\tilde{y} \notin O_{\tilde{M}}(G)$. G liegt in der Spur $\Phi_{\tilde{x}}$ von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$. Angenommen G liege auch in der Spur $\Phi_{\tilde{y}}$ von $\tilde{T}_{\tilde{y}}$. Dann existiert ein $\tilde{V} \in \tilde{T}_{\tilde{y}}$ mit $M \cap \tilde{V} \subseteq G$. Hieraus würde $\tilde{V} \subseteq O_{\tilde{M}}\,(M \cap \tilde{V}) \subseteq O_{\tilde{M}}(G)$ im Widerspruch zu $\tilde{y} \notin O_{\tilde{M}}(G)$ folgen. — Es sei $S(\tilde{x}) \in E_{\mathfrak{U}}(G)$ für ein $\tilde{x} \in \tilde{M}$ und ein $G \in T$. Ist $\tilde{x} \in M$, so ist $\tilde{x} \in G$, also $\tilde{x} \in O_{\tilde{M}}(G)$. Ist $\tilde{x} \in \tilde{M} - M$, so ist $S(\tilde{x}) = \Phi_{\tilde{x}} \in E_{\mathfrak{U}}(G)$, mithin $G \in \Phi_{\tilde{x}}$. Es gibt ein $\tilde{V} \in \tilde{T}_{\tilde{x}}$ mit $M \cap \tilde{V} \subseteq G$. Folglich gilt $\tilde{x} \in \tilde{V} \subseteq O_{\tilde{M}}\,(M \cap \tilde{V}) \subseteq O_{\tilde{M}}(G)$. Damit ist $S^{-1}(E_{\mathfrak{U}}(G)) = O_{\tilde{M}}(G)$ für jedes $G \in T$ gezeigt. Da $\{E_{\mathfrak{U}}(G) | G \in T\}$ und $\{O_{\tilde{M}}(G) | G \in T\}$ Basen für T' bzw. $\tilde{T}$ sind, folgt hieraus unmittelbar, daß S topologisch bezüglich $\tilde{T}$, T' ist. — $\tilde{\mathfrak{V}} = \{\tilde{\mathfrak{V}}_\beta | \beta \in B\}$ sei ein Repräsentant von $\tilde{\mathscr{U}}$ und $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta | \beta \in B\}$ die Spur von $\tilde{\mathfrak{V}}$ auf M. Dann ist $\mathfrak{V}$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}$ und $\tilde{\mathfrak{V}} \ll O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$. Nun gilt $S^{-1}(E_{\mathfrak{U}}(U) | U \in \mathfrak{U}_\alpha) = \{O_{\tilde{M}}(U) | U \in \mathfrak{U}_\alpha\} = O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_\alpha)$ für $\alpha \in A$. Zu α existiert ein $\beta \in B$ mit $\mathfrak{V}_\beta < \mathfrak{U}_\alpha$. Hieraus folgt $\mathfrak{V}_\beta < O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta) < O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_\alpha)$; d.h. S ist gleichmäßig stetig.

3. 5: *$\tilde{\mathscr{U}}$ sei eine uniform strikte T_0-Erweiterung von $\mathscr{U}$. Dann existiert ein uniformer Isomorphismus bezüglich $\tilde{\mathscr{U}}$, $V^0(\mathscr{U})$ von $|\tilde{\mathscr{U}}|$ in $|V^0(\mathscr{U})|$.*

Beweis: Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie im Beweis des vorigen Satzes. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{M}$ ist $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ ein $\tilde{\mathscr{U}}$-Filter. Da $\tilde{\mathscr{U}}$ uniform strikt ist, ist die Spur von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ ein $\mathscr{U}$-Filter. Im Falle $\tilde{x} \in M$ ist dies klar. Ist $\tilde{x} \in \tilde{M} - M$, so ist die Spur von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ gleich $\Phi_{\tilde{x}} \in F_{\mathfrak{U}}$. $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta | \beta \in B\}$ sei ein beliebiger Repräsentant von $\mathscr{U}$. Dann ist $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}$. $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ ist durch Elemente von $\bigcup_{\beta \in B} O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta)$ erzeugbar. Hieraus folgt, daß $\Phi_{\tilde{x}}$ durch Elemente von $\bigcup_{\beta \in B} \mathfrak{V}_\beta$ erzeugbar ist. Es gilt daher $\Phi_{\tilde{x}} = S(\tilde{x}) \in F_{\mathscr{U}} \subseteq F_{\mathfrak{U}}$. Die Spur von $\tau(V^0_m(U))$ auf $M \cup F_{\mathscr{U}}$ ist gleich $\tau(V^0(U))$. Mithin ist S eine bezüglich $\tilde{T}$, $\tau(V^0(\mathscr{U}))$ topologische Abbildung von $\tilde{M}$ in $|V^0(\mathscr{U})|$. $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta | \beta \in B\}$ sei ein beliebiger Repräsentant von $\mathscr{U}$. Dann ist $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$ bzw. $E_{\mathscr{U}}(\mathfrak{V})$ ein Repräsentant von $\tilde{\mathscr{U}}$ bzw. $V^0(\mathscr{U})$, und es gilt: $\{S^{-1}(E_{\mathscr{U}}(V)) | V \in \mathfrak{V}_\beta\} = \{O_{\tilde{M}}(V) | V \in \mathfrak{U}_\beta\}$ für $\beta \in B$, woraus unmittelbar folgt, daß S ein uniformer Isomorphismus ist.

4. In diesem Abschnitt konstruieren wir eine T_1-Vervollständigung. Wir gehen von einer schwach regulären Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ auf M aus. Die unterliegende Topologie $\tau(\mathscr{U})$ sei eine T_1-Topologie. F_S bezeichne die Menge aller schwachen Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$, die bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ nicht konvergieren. Dann ist $F_S \subset F_{\mathscr{U}}$. Es sei $E_S(X) = X \cup \{\Phi | \Phi \in F_S,\ X \in \Phi\}$ die Einschränkung des Operators $E_{\mathscr{U}}$ und damit auch $E_{\mathfrak{U}}$ ($\mathfrak{U}$ Repäsentant von $\mathscr{U}$) auf $M \cup F_S$. Es ergibt sich, wie bei der Konstruktion von $V^0(\mathscr{U})$, daß $E_S(\mathfrak{U})$ unabhängig vom Repräsentanten $\mathfrak{U} \in \mathscr{U}$ eindeutig eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}' = E_S(\mathscr{U})$ auf $M \cup F_S$ definiert und daß $\mathscr{U}'$ eine uniforme strikte T_0-Erweiterung von $\mathscr{U}$ ist. — Wir behaupten, daß $\mathscr{U}'$ schwach regulär ist. Es sei $\Phi \in F_S$ und $\Phi \in G'$, wobei G' bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offen ist. Da $\mathscr{U}'$ uniform und damit auch topologisch strikt ist, existiert eine bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ offene Menge G mit $\Phi \in E_S(G) \subseteq G'$. $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ sei ein Repräsentant von $\mathscr{U}$. Da Φ ein schwacher Sternfilter ist und $G \in \Phi$ gilt, existiert ein $\alpha \in A$, so daß aus $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ und $U \in \Phi$ stets $U \subseteq G$ folgt. Also folgt aus $E_S(U) \in E_S(\mathfrak{U}_\alpha)$ und $\Phi \in E_S(U)$ stets $E_S(U) \subseteq E_S(G) \subseteq G'$. Im Falle $x \in M$ zeigt man ganz entsprechend, daß aus $E_S(U) \in E_S(\mathfrak{U}_\alpha)$ und $x \in E_S(U)$ stets $E_S(U) \in G'$ folgt. Für jeden Punkt $x' \in M \cup F_S$ und jede bezüglich $\tau(\mathscr{U}')$ offene Menge G' mit $x' \in G'$ existiert daher ein $\alpha \in A$, so daß der Stern von x' bezüglich $E_S(\mathfrak{U}_\alpha)$ in G' liegt, d.h. $\mathscr{U}'$ ist schwach regulär. Mithin ist $\tau(\mathscr{U}')$ eine schwach reguläre T_0-Topologie.

Jede solche Topologie ist bekanntlich eine T_1-Topologie. — $\mathscr{U}'$ ist stark vollständig. Es genügt zu zeigen, daß jeder schwache Sternfilter Ψ' bezüglich $\mathscr{U}'$ konvergiert. Ψ sei die Spur von Ψ' auf M und $X \in \Psi$. Dann existiert ein $X' \in \Psi'$ mit $M \cap X' \subseteqq X$ und ein $\alpha \in A$, so daß aus $E_S(U) \in E_S(\mathfrak{U}_\alpha)$ und $E_S(U) \in \Psi'$ stets $E_S(U) \subseteqq X'$ folgt. Ist nun $U \in \mathfrak{U}_\alpha$ und $U \in \Psi$, so folgt $E_S(U) \in E_S(\mathfrak{U}_\alpha)$ und $M \cap Y' \subseteqq U$ für ein offenes $Y' \in \Psi'$. Hieraus ergibt sich $Y' \subseteqq E_S(M \cap Y') \subseteqq E_S(U)$ also $E_S(U) \in \Psi'$ und somit $E_S(U) \subseteqq X'$. Dann aber gilt $U \subseteqq M \cap X' \subseteqq X$. Ψ ist folglich ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$. Wenn Ψ nicht bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ konvergiert, so ist $\Psi \in F_S$. Wenn aber Ψ bezüglich $\tau(\mathscr{U})$ konvergiert, so ist Ψ nach 2. 7 mit dem Umgebungsfilter eines Punktes $x \in M$ identisch. Wie im Falle der Erweiterung $E_{\mathfrak{U}}(\mathscr{U})$ schließt man, daß Ψ' gegen Ψ bzw. x konvergiert.

4. 1: *$\mathscr{U}$ sei eine schwach reguläre Überdeckungsstruktur auf M, deren unterliegende Topologie dem T_1-Trennungsaxiom genügt. Dann existiert eine stark vollständige, schwach reguläre, uniform strikte T_1-Erweiterung $V^1(\mathscr{U})$ von $\mathscr{U}$.*

4. 2: *$\tilde{\mathscr{U}}$ sei eine stark vollständige, schwach reguläre, uniform strikte T_1-Erweiterung von $\mathscr{U}$. Dann existiert eine bezüglich $\tilde{\mathscr{U}}$ und $V_m^0(\mathscr{U})$ gleichmäßig stetige und bezüglich $\tau(\tilde{\mathscr{U}})$, $\tau(V_m^0(\mathscr{U}))$ topologische Abbildung S von $|\tilde{\mathscr{U}}|$ in $|V_m^0(\mathscr{U})|$ mit $S(x) = x$ für $x \in M$ und $|V^1(\mathscr{U})| \subseteqq S(\tilde{M})$. Überdies ist S ein uniformer Isomorphismus von $|\tilde{\mathscr{U}}|$ auf $|V^1(\mathscr{U})|$.*

Bemerkung: Aus 4. 2 folgt durch Vergleich mit Theorem 1 und 2 aus Morita [1, II], S. 167, daß die durch einen transfiniten Prozeß erzeugte Vervollständigung von Morita uniform isomorph in $|V^1(\mathscr{U})|$ unter Festhaltung der Punkte von $|\mathscr{U}|$ abgebildet werden kann.

Beweis. $\tilde{\mathscr{U}}$ sei nunmehr eine beliebige, stark vollständige, schwach reguläre, uniform strikte T_1-Erweiterung von $\mathscr{U}$. $(\tilde{M}, \tilde{T})$ bzw. (M, T) seien die unterliegenden topologischen Räume. Wir betrachten wieder die im Beweis von Satz 3. 3 definierte Abbildung $S(\tilde{x}) = \Phi_{\tilde{x}}$ für $\tilde{x} \in \tilde{M} - M$ und $S(\tilde{x}) = \tilde{x}$ für $\tilde{x} \in M$. $\Phi_{\tilde{x}}$ war dabei die Spur von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$. Dann ist $\Phi_{\tilde{x}} \in F_{\mathfrak{B}}$, wobei $\mathfrak{B}$ der volle Repräsentant von $\mathscr{U}$ ist, und S ist eine bezüglich $\tau(\tilde{\mathscr{U}})$, $\tau(V_m^0(\mathscr{U}))$ topologische und bezüglich $\tilde{\mathscr{U}}$, $V_m^0(\mathscr{U})$ gleichmäßig stetige Abbildung von $\tilde{M}$ in $V_m^0(\mathscr{U})$. Es sei $\Psi \in F_S$, also Ψ ein schwacher Sternfilter. $\{O_{\tilde{M}}(G) | G \in \Psi, G \in T\}$ erzeugt einen Filter $\tilde{\Psi}$ auf $\tilde{M}$. Zu jedem $\tilde{X} \in \tilde{\Psi}$ existiert ein $G \in \Psi$, $G \in T$ mit $O_{\tilde{M}}(G) \subseteqq \tilde{X}$. Sei nun $\tilde{\mathfrak{U}} = \{\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha | \alpha \in A\}$ ein Repräsentant von $\tilde{\mathscr{U}}$ und $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ die Spur von $\tilde{\mathfrak{U}}$ auf M. Dann existiert ein $\alpha \in A$, so daß gilt: Aus $U \in \mathfrak{U}_\alpha$, $U \in \Psi$ folgt $U \subseteqq G$. Ist nun $\tilde{U} \in \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$ und $\tilde{U} \in \tilde{\Psi}$, so folgt zunächst $\tilde{U} \cap M \in \mathfrak{U}_\alpha$. Ferner existiert ein $V \in \Psi$, $V \in T$ mit $O_{\tilde{M}}(V) \subseteqq \tilde{U}$, also $V \subseteqq M \cap \tilde{U}$ und mithin $\tilde{U} \cap M \in \Psi$. Es ist daher $\tilde{U} \cap M \subseteqq G$ und $\tilde{U} \subseteqq O_{\tilde{M}}(\tilde{U} \cap M) \subseteqq O_{\tilde{M}}(G) \subseteqq \tilde{X}$. Folglich ist $\tilde{\Psi}$ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\tilde{\mathscr{U}}$. Wegen der starken Vollständigkeit von $\tilde{\mathscr{U}}$ konvergiert $\tilde{\Psi}$ gegen ein $\tilde{x} \in \tilde{M}$ und wegen der Minimaleigenschaft von $\tilde{\Psi}$ ist $\tilde{\Psi} = \tilde{T}_{\tilde{x}}$. Die Spur von $\tilde{\Psi}$ ist daher gleich $\Phi_{\tilde{x}}$. Zu jedem $X \in \Phi_{\tilde{x}}$ gibt es $G \in \Psi$, $G \in T$ mit $M \cap O_{\tilde{M}}(G) = G \subseteqq X$. Also ist $\Phi_{\tilde{x}} \subseteqq \Psi$. $\Phi_{\tilde{x}}$ ist ein Fundamentalfilter und Ψ ein schwacher Sternfilter. Mithin gilt sogar $\Phi_{\tilde{x}} = \Psi$.

Es gilt daher $M \cup F_S \subseteqq S(\tilde{M})$. Überdies ist für $\tilde{x} \in \tilde{M} - M$ die Spur $\Phi_{\tilde{x}}$ von $\tilde{T}_{\tilde{x}}$ ein schwacher Sternfilter bezüglich $\mathscr{U}$. Denn ist $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_\beta | \beta \in B\}$ ein Repräsentant von $\mathscr{U}$, so ist $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$ ein Repräsentant von $\tilde{\mathscr{U}}$. Ist ferner $X \in \Phi_{\tilde{x}}$, so existiert ein $\tilde{X} \in \tilde{T}_{\tilde{x}}$ mit $M \cap \tilde{X} \subseteqq X$. Da $\tilde{\mathscr{U}}$ schwach regulär ist, gibt es ein $\beta \in B$, so daß der Stern von $\tilde{x}$ bezüglich der Überdeckung $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta)$ in $\tilde{X}$ liegt. Aus $V \in \mathfrak{V}_\beta$, $V \in \Phi_{\tilde{x}}$ folgt $O_{\tilde{M}}(V) \in \tilde{T}_{\tilde{x}}$ und daher $\tilde{x} \in O_{\tilde{M}}(V) \subseteqq \tilde{X}$ sowie $V \subseteqq M \cap \tilde{X} \subseteqq X$. Es ist somit in diesem Falle sogar $S(\tilde{M}) = M \cup F_s$, und es folgt aus früheren Überlegungen (siehe 3. 5), daß S ein uniformer Isomorphismus ist.

4. 3: *$(\tilde{M}, \tilde{T})$ sei ein T_0-Raum und eine strikte T_0-Erweiterung des T_0-Raumes (M, T). Dann existiert auf M eine mit T verträgliche Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ und eine topologische Abbildung S von $\tilde{M}$ in $|V_m^0(\mathscr{U})|$, die die Punkte von M festläßt. Ist $(\tilde{M}, \tilde{T})$ ein T_1-Raum und eine strikte T_1-Erweiterung von (M, T), so existiert eine mit T verträgliche schwach reguläre Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ und eine topologische Abbildung S von $\tilde{M}$ auf $|V^1(\mathscr{U})|$, die die Punkte von M festläßt. $V^1(\mathscr{U})$ ist dabei sogar fundamental vollständig.*

Beweis. $\tilde{\mathfrak{U}} = \{\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha | \alpha \in A\}$ sei das System aller offenen Überdeckungen von $(\tilde{M}, \tilde{T})$. $\tilde{\mathfrak{U}}$ ist nach 1. 7 und 2. 11 der volle Repräsentant einer fundamental vollständigen mit $\tilde{T}$ verträglichen Überdeckungsstruktur $\tilde{\mathscr{U}}$. Die Spur von $\tilde{\mathfrak{U}}$ bzw. $\tilde{\mathscr{U}}$ sei $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ bzw. $\mathscr{U}$. $\tilde{\mathscr{U}}$ ist eine fundamental vollständige, topologisch strikte T_0-Erweiterung von $\mathscr{U}$. Aus 3. 4 folgt der erste Teil der Behauptung. — Wir zeigen nun, daß es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ gibt, so daß $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_\alpha) < \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$ gilt. Es sei $\alpha \in A$ vorgegeben. Dann gibt es zu jedem $x \in M$ ein $G_{\tilde{x}} \in T$, so daß $O_{\tilde{M}}(G_{\tilde{x}})$ in einem Element von $\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$ liegt; denn die Erweiterung $(\tilde{M}, \tilde{T})$ von (M, T) ist strikt. $\{O_{\tilde{M}}(G_{\tilde{x}}) | \tilde{x} \in \tilde{M}\}$ ist eine offene Überdeckung von $(\tilde{M}, \tilde{T})$, also gleich einem Element $\tilde{\mathfrak{U}}_{\alpha'}$ von $\tilde{\mathfrak{U}}$. Die Spur von $\tilde{\mathfrak{U}}_{\alpha'}$ ist $\mathfrak{U}_{\alpha'} = \{G_{\tilde{x}} | \tilde{x} \in \tilde{M}\}$ und es gilt $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_{\alpha'}) = \tilde{\mathfrak{U}}_{\alpha'} < \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$. $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{V}_\beta | \beta \in B\}$ sei ein beliebiger Repräsentant von $\mathscr{U}$. Dann gilt nach einer Bemerkung in Abschnitt 3 $\tilde{\mathfrak{U}} \ll O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$ und jedes $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta)$ ist eine offene Überdeckung von $(\tilde{M}, \tilde{T})$. Andererseits gibt es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\alpha' \in A$ und zu $\alpha' \in A$ ein $\beta \in B$ mit $\mathfrak{V}_\beta < \mathfrak{U}_{\alpha'}$ und $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_{\alpha'}) < \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$. Folglich ist $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta) < \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$, d.h. $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}) < \tilde{\mathfrak{U}}$, also $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}) \sim \tilde{\mathfrak{U}}$. Wir behaupten, daß $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$ schwach regulär ist, falls $(\tilde{M}, \tilde{T})$ ein T_1-Raum ist. Es sei $\tilde{x} \in \tilde{M}$, $\tilde{x} \in O_{\tilde{M}}(V_1) \cap \ldots \cap O_{\tilde{M}}(V_n)$ mit $V_1, \ldots, V_n \in \bigcup_{\beta \in B} \mathfrak{V}_\beta$. Da $O_{\tilde{M}}(V_1) \cap \ldots \cap O_{\tilde{M}}(V_n)$ bezüglich $\tilde{T}$ offen und $\tilde{\mathscr{U}}$ nach 1. 7 schwach regulär ist, existiert ein $\alpha \in A$, so daß der Stern von $\tilde{x}$ bezüglich $\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$ in $O_{\tilde{M}}(V_1) \cap \ldots \cap O_{\tilde{M}}(V_n)$ liegt. Zu α existiert ein $\alpha' \in A$ und zu α' ein $\beta \in B$ mit $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_{\alpha'}) < \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$ und $\mathfrak{V}_\beta < \mathfrak{U}_{\alpha'}$. Der Stern von $\tilde{x}$ bezüglich $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta)$ liegt wegen $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V}_\beta) < O_{\tilde{M}}(\mathfrak{U}_{\alpha'}) < \tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$ im Stern von $\tilde{x}$ bezüglich $\tilde{\mathfrak{U}}_\alpha$, also in $O_{\tilde{M}}(V_1) \cap \ldots \cap O_{\tilde{M}}(V_n)$. Nach 1. 4 folgt aus der schwachen Regularität und der Äquivalenz von $O_{\tilde{M}}(\mathfrak{V})$ und $\tilde{\mathfrak{U}}$ die T-Äquivalenz. Hieraus folgt, daß $\tilde{\mathscr{U}}$ eine uniforme strikte Erweiterung von $\mathscr{U}$ ist. Der zweite Teil der Behauptung des Satzes 4. 3 ergibt sich somit aus 4. 2.

Bemerkungen: 1. Eine Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ heißt finit, wenn sie einen Repräsentanten $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha | \alpha \in A\}$ besitzt, so daß $\mathfrak{U}_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$ nur aus endlich vielen Elementen besteht. Einen derartigen Repräsentanten nennen wir finit. Es läßt sich dann folgender Zusatz zu 4. 3 formulieren: *Ist $(\tilde{M}, \tilde{T})$ kompakt, so kann die Überdeckungsstruktur $\mathscr{U}$ finit gewählt werden.*

2. *Ist* $\mathscr{U}$ *eine beliebige finite Überdeckungsstruktur, so ist* $\tau(V_m^0(\mathscr{U}))$ *kompakt.* Ist nämlich $\mathfrak{V}$ der volle Repräsentant von $\mathscr{U}$ und $\mathfrak{U}$ ein finiter Repräsentant, so gilt $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{V}$, woraus wegen der Monotonie des Operators $E_{\mathfrak{V}}$ folgt, daß $E_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{U})$ ein Überdeckungssystem von $|V_m^0(U)|$ und $E_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{U}) < E_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{V})$ ist. Φ sei ein Ultrafilter auf $|V_m^0(\mathscr{U})|$ Dann ist Φ wegen der Finitheit von $E_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{U})$ ein Fundamentalfilter bezüglich $E_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{U})$ und nach 2.1 auch bezüglich $E_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{V})$. Da $V_m^0(\mathscr{U})$ fundamental vollständig ist, konvergiert Φ bezüglich $\tau(V_m^0(\mathscr{U}))$.

Literatur

[1] K. Morita, On the simple extension of a space with respect to a uniformity I, II, III, IV. *Proc. Japan. Acad.* **27** (1951), 65—72, 130—137, 166—171, 632—636.

[2] N. A. Shanin, Über Trennung in topologischen Räumen. (Russ.) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **38** (1943), 110—113.

[3] J. Suzuki, On the metrisation and the completion of a space with respect to a uniformity. *Proc. Japan. Acad.* **27** (1951), 217—223.

[4] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology. 1940.

(Eingegangen am 21. Februar 1967.)