Zur Konstruktion gewisser geordneter Halbmoduln

Von HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

In Fortsetzung und Ergänzung der Resultate in [3] machen wir weitere Aussagen über solche (kommutative) geordnete Halbmoduln $\mathfrak{M}$, welche die Eigenschaft

$$\text{JIV:} \quad \textit{Zu } a < b \textit{ existiert } x \in \mathfrak{M} \textit{ mit } a+x = b$$

besitzen. Diese Aussagen liefern neben einer näheren strukturellen Beschreibung zugleich Hilfsmittel zur praktischen Bestimmung solcher Halbmoduln.

In [3] hatten wir gezeigt, daß man bis auf o-Isomorphie jeden Halbmodul mit JIV mit der Modulkomponente $\mathfrak{M}_1$ als „geordnete Schreiersche Erweiterung" $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1] = \{[\bar{a}, \alpha]: \bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}, \alpha \in \mathfrak{M}_1\}$ von $\mathfrak{M}_1$ mit einem natürlich geordneten Halbmodul $\overline{\mathfrak{M}}$ mit Nullelement $\bar{o}$ erhalten kann, die wie folgt definiert ist:

$$[\bar{a}, \alpha] = [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \text{ und } R(\bar{a}, \alpha, \beta);$$

$$[\bar{a}, \alpha] + [\bar{b}, \beta] = [\bar{a}+\bar{b}, s(\bar{a}, \bar{b}) + \alpha + \beta];$$

$$[\bar{a}, \alpha] < [\bar{b}, \beta] \Leftrightarrow \bar{a} < \bar{b} \text{ oder } \bar{a} = \bar{b}, \ \alpha < \beta \text{ und } \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta).$$

Dabei ist $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ eine Relation in $\overline{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$, die für sich bzw. zusammen mit dem „Summandensystem" $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$ (mit der Anfangsbedingung $s(\bar{o}, \bar{o}) = o$) gewisse Bedingungen (1)—(6) bzw. (I)—(III) erfüllt [1]). Wir vereinfachen zunächst (III):

Satz 1. (III) *ist gleichwertig mit der Bedingung:*

$$\textit{Aus } \bar{b}+\bar{c} = \bar{c} \textit{ mit } \bar{b} \neq \bar{o}, \textit{ folgt } R(\bar{c}, \xi, \eta) \textit{ für alle } \xi \textit{ und } \eta.$$

Beweis. Mit dieser Bedingung ist auch (III) erfüllt; denn aus $\bar{a} < \bar{b}$ und $\bar{a}+\bar{c} = \bar{b}+\bar{c} = \bar{d} \neq \bar{o}$ folgt wegen $\bar{a}+\bar{x} = \bar{b}$ die Gleichung $\bar{x}+\bar{d} = \bar{d}$, also stets $R(\bar{d}, \xi, \eta)$. Für die Umkehrung nehmen wir an, es gäbe ξ und η mit $\neg R(\bar{c}, \xi, \eta)$. Wir lösen dann in $\mathfrak{M}_1$ die Gleichungen

$$s(\bar{o}, \bar{c}) + \alpha = \xi \quad \text{und} \quad s(\bar{b}, \bar{c}) + \beta = \eta,$$

[1]) Den Inhalt der Aussagen (1)—(6) kann man dem Beweis des nachfolgenden Satzes 2 entnehmen. Übrigens schrieben wir in [3] $\bar{a}^{\bar{b}}$ statt $s(\bar{a}, \bar{b})$; der Vollständigkeit halber seien auch die Aussagen (I)—(III) hier nochmals formuliert:

(I) $R(\bar{a}+\bar{b}, s(\bar{a}, \bar{b}), s(\bar{b}, \bar{a}))$;

(II) $R(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, s(\bar{a}, \bar{b}+\bar{c})+s(\bar{b}, \bar{c}), s(\bar{a}+\bar{b}, \bar{c})+s(\bar{a}, \bar{b}))$;

(III) $\bar{a} < \bar{b}, \bar{a}+\bar{c} = \bar{b}+\bar{c}, \neg R(\bar{a}+\bar{c}, s(\bar{a}, \bar{c})+\alpha, s(\bar{b}, \bar{c})+\beta) \Rightarrow s(\bar{a}, \bar{c})+\alpha < s(\bar{b}, \bar{c})+\beta$.

woraus aus (III) $\xi < \eta$ folgt. Da aber mit $\neg R(\bar{c}, \xi, \eta)$ gemäß (2) auch $\neg R(\bar{c}, \eta, \xi)$ gilt, erhielte man ebenso $\eta < \xi$. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Wir zeigen nun, daß die Konstruktion aller möglichen geordneten Schreierschen Erweiterungen $[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ zu vorgegebenen $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{M}_1$ auf die Bestimmung der Kette Σ aller konvexen Untermoduln von $\mathfrak{M}_1$ und die Menge aller ähnlichen Abbildungen [2]) von $\overline{\mathfrak{M}}$ in Σ hinausläuft.

Satz 2. *Jede ähnliche Abbildung $\bar{a} \to \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ von $\overline{\mathfrak{M}}$ in Σ mit $\bar{o} \to (o)$ und*

(III′) $$\bar{c} \to \mathfrak{M}_1, \quad \textit{falls} \quad \bar{b} + \bar{c} = \bar{c} \quad \textit{mit} \quad \bar{b} \neq \bar{o}$$

liefert vermöge

$$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta \quad (\mathfrak{M}_{\bar{a}})$$

zusammen mit jedem System $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$, welches die Bedingungen

(I′) $$s(\bar{a}, \bar{b}) \equiv s(\bar{b}, \bar{a}) \quad \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$$

(II′) $$s(\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}) + s(\bar{b}, \bar{c}) \equiv s(\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}) + s(\bar{a}, \bar{b}) \qquad (\mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}})$$

erfüllt, eine geordnete Schreiersche Erweiterung $[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$, und umgekehrt entsteht jede solche Erweiterung auf diese Weise.

Beweis. In der Tat gilt für die so definierte Relation:

(1) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha)$.

(2) $R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Rightarrow R(\bar{a}, \beta, \alpha)$.

(3) $R(\bar{a}, \alpha, \beta),\ R(\bar{a}, \beta, \gamma) \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha, \gamma)$.

(4) $R(\bar{o}, \alpha, \beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ wegen $\bar{o} \to (o)$.

(5) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha'),\ R(\bar{b}, \beta, \beta') \Rightarrow R(\bar{a}+\bar{b}, \alpha+\beta, \alpha'+\beta')$; denn wegen $\bar{a} \leqq \bar{a}+\bar{b}$ und $\bar{b} \leqq \bar{a}+\bar{b}$ gilt $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \cup \mathfrak{M}_{\bar{b}} \subseteqq \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$, also auch $(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta') \in \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$

(6) $\alpha < \beta,\ \neg R(\bar{a}, \alpha, \beta),\ R(\bar{a}, \alpha, \alpha'),\ R(\bar{a}, \beta, \beta') \Rightarrow \alpha' < \beta'$; denn wegen $\alpha - \alpha' = \gamma \in \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ und $\beta - \beta' = \delta \in \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ folgt aus $\alpha - \beta \notin \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ auch $\alpha' - \beta' \notin \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ und wegen $\alpha' - \beta' < \delta - \gamma$ weiter $\alpha' - \beta' < o$, da $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ konvex ist.

Ist umgekehrt eine Relation $R(\bar{a}, \alpha, \beta)$ mit den Eigenschaften (1)—(6) vorgegeben, so ist

$$\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \{\gamma \colon \gamma \in \mathfrak{M}_1, R(\bar{a}, \gamma, o)\}$$

wegen (5) ein Untermodul von $\mathfrak{M}_1$ [3]). $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ ist konvex, denn aus $R(\bar{a}, \gamma_1, o)$ und $R(\bar{a}, \gamma_2, o)$ und $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ folgt $R(\bar{a}, \gamma, o)$; wäre nämlich $\neg R(\bar{a}, \gamma, o)$, so lieferte dies wegen $\gamma_1 < \gamma$, $\neg R(\bar{a}, \gamma_1, \gamma)$, $R(\bar{a}, \gamma_1, \gamma_2)$ und $R(\bar{a}, \gamma, \gamma)$ nach (6) den Wider-

[2]) Mit „ähnlich" bezeichnen wir (neben eindeutig) die Eigenschaft: Aus $\bar{a} \leqq \bar{b}$ folgt $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \subseteqq \mathfrak{M}_{\bar{b}}$.

[3]) Allgemein erhält man aus (5) die beiden gleichwertigen Aussagen

(5′) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha') \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha+\eta, \beta+\eta)$,

(5″) $R(\bar{a}, \alpha, \alpha'),\ R(\bar{a}, \beta, \beta') \Rightarrow R(\bar{a}, \alpha+\beta, \alpha'+\beta')$.

spruch $\gamma_2 < \gamma$. Die (eindeutige) Abbildung von $\overline{\mathfrak{M}}$ in Σ vermöge $\bar{a} \to \mathfrak{M}_{\bar{a}}$ ist ähnlich, denn zu $\bar{a} \leqq \bar{b}$ existiert $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ mit $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$, so daß aus $R(\bar{a}, \gamma, o)$ wegen $R(\bar{x}, o, o)$ gemäß (5) auch $R(\bar{a} + \bar{x}, \gamma, o)$ und damit $\mathfrak{M}_{\bar{a}} \subseteq \mathfrak{M}_{\bar{b}}$ folgt; insbesondere gilt $\bar{o} \to (o)$ wegen (4). Schließlich erhält man aus (5′)

$$R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow R(\bar{a}, \alpha - \beta, o) \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathfrak{M}_{\bar{a}}.$$

Die Äquivalenz von (I)—(III) mit (I′)—(III′) ist offensichtlich.

Folgerung.

a) *Für jedes idempotente Element* $\bar{a} \neq \bar{o}$ *von* $\overline{\mathfrak{M}}$ *gilt* $\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \mathfrak{M}_1$.

b) *Jedes* $s(\bar{a}, \bar{b})$ *mit* $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}}$ *kann durch* o *ersetzt werden; dies gilt insbesondere stets im Falle* $\bar{a} = \bar{o}$ *oder* $\bar{b} = \bar{o}$ *und (trivialerweise) im Falle* $\mathfrak{M}_{\bar{a}+\bar{b}} = \mathfrak{M}_1$, *speziell also für* $\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \mathfrak{M}_1$ *oder* $\mathfrak{M}_{\bar{b}} = \mathfrak{M}_1$.

Wir wollen den Spezialfall hervorheben, daß als Untermoduln $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$ von $\mathfrak{M}_1$ nur der Nullmodul (o) oder $\mathfrak{M}_1$ selbst verwendet werden, wie dies bei jedem o-einfachen (insbesondere also bei jedem archimedischen) Modul $\mathfrak{M}$ notwendigerweise der Fall ist; dann vereinfachen sich nämlich (I′) und (II′) zu den nachstehend genannten Bedingungen (ii) und (iii), so daß wir aus Satz 2 unmittelbar erhalten:

Satz 3. *Jede Zerlegung* $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{U} \cup \overline{V}$ *mit* $\overline{U} < \overline{V}$, *wobei* $\overline{V}$ *auch leer sein darf, aber jedenfalls jedes* $\bar{c} \neq \bar{o}$ *aus* $\overline{\mathfrak{M}}$ *enthält, zu dem ein* $\bar{b} \neq \bar{o}$ *aus* $\overline{\mathfrak{M}}$ *mit* $\bar{b} + \bar{c} = \bar{c}$ *existiert, liefert vermöge*

$$\mathfrak{M}_{\bar{u}} = (o) \quad \text{für} \quad \bar{u} \in \overline{U},$$

$$\mathfrak{M}_{\bar{v}} = \mathfrak{M}_1 \quad \text{für} \quad \bar{v} \in \overline{V}$$

zusammen mit jedem System $s(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathfrak{M}_1$ *mit den Eigenschaften*

(i) $s(\bar{a}, \bar{o}) = o$ *für alle* $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$; $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ *für* $\bar{a} + \bar{b} \in \overline{V}$,

(ii) $s(\bar{a}, \bar{b}) = s(\bar{b}, \bar{a})$ *für* $\bar{a} + \bar{b} \in \overline{U}$,

(iii) $s(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) + s(\bar{b}, \bar{c}) = s(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) + s(\bar{a}, \bar{b})$ für $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \in \overline{U}$

eine geordnete Schreiersche Erweiterung $[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$. *Ist* $\mathfrak{M}_1$ *o-einfach, so ist jede solche Erweiterung auf diese Weise zu erhalten.*

Eine wesentliche Vereinfachung des Problems, alle Halbmoduln mit JIV zu gewinnen, besteht in der Zurückführung auf den Fall $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ mit irreduziblem $\overline{\mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$, die wir unter Verwendung der Cliffordschen Zerlegung natürlich geordneter Halbmoduln erhalten (vgl. [1; Theorem 1]), wobei diese Überlegungen zu weiteren grundsätzlichen Einsichten in die Struktur der Halbmoduln mit JIV führen, die übrigens eine explizite Beschreibung der in [2; Satz 10] geschilderten Verhältnisse darstellen.

Satz 4. *Es sei* $M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ *eine geordnete Schreiersche Erweiterung und*

$$\overline{\mathfrak{N}} = \biguplus_{\tau \in T} \overline{\mathfrak{N}}_\tau$$

die Cliffordsche Zerlegung des natürlich geordneten Halbmoduls $\overline{\mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$ *als geordnete Summe natürlich geordneter irreduzibler Unterhalbmoduln* $\overline{\mathfrak{N}}_\tau$.

a) *Existiert in der Zerlegung von* $\mathfrak{N}$ *kein erster irreduzibler Bestandteil, so gilt (bis auf ähnliche Isomorphie)*

$$M = \mathfrak{M}_1 \precsim \mathfrak{N}.$$

b) *Ist dagegen* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \precsim \mathfrak{B}$ *mit einem irreduziblen natürlich geordneten Unterhalbmodul* $\mathfrak{N}_0$ *von* $\mathfrak{N}$, *so gilt mit* $\overline{\mathfrak{M}}_0 = \{\bar{o}\} \cup \mathfrak{N}_0$ *(bis auf ähnliche Isomorphie)*

$$M = [\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1] \precsim \mathfrak{B}.$$

Umgekehrt entsteht auf diese Weise sets ein Halbmodul $\mathfrak{M}$ *mit JIV mit der Modulkomponente* $\mathfrak{M}_1$ *und dem Faktorhalbmodul* $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$.

Korollar. *Der positiv geordnete Halbmodul* $M_2 = [\mathfrak{N}, \mathfrak{M}_1]$ *aus der geordneten Zerlegung von* $M = M_1 \cup M_2$ *(mit* $M_1 \xleftrightarrow[<]{\sim} \mathfrak{M}_1$*) besitzt die folgende Cliffordsche Zerlegung als geordnete Summe positiv geordneter irreduzibler Unterhalbmoduln* S_τ*:*

$$M_2 = \biguplus_{\tau \in T} S_\tau \quad \text{mit} \quad S_0 = [\mathfrak{N}_0, \mathfrak{M}_1], \quad S_\tau = \mathfrak{N} \quad \text{für} \quad \tau \neq o.$$

M_2 *ist genau dann sogar natürlich geordnet (und damit dann* $M = M_1 \precsim M_2$*), wenn dies für* S_0 *zutrifft, was wiederum gleichwertig mit* $S_0 \xleftrightarrow[<]{\sim} \mathfrak{N}_0$ *(und damit* $M_2 \xleftrightarrow[<]{\sim} \mathfrak{N}$*) ist.*

Beweis. a) Wegen (III′) gilt $\mathfrak{M}_{\bar{c}} = \mathfrak{M}_1$ für alle $\bar{c} \in \mathfrak{N}$ und damit $s(\bar{a}, \bar{b}) = o$ für alle $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathfrak{M}}$ gemäß Folgerung b). Daraus folgt die Behauptung gemäß [2, Satz 4].

b) In der Zerlegung

$$M = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1] = [\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1] \cup [\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1]$$

sind beide Bestandteile jedenfalls Unterhalbmoduln von M, und es gilt $[\overline{\mathfrak{M}}_0, \mathfrak{M}_1] < < [\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1]$. Aus $\bar{a} \in \mathfrak{N}_0$ und $\bar{b} \in \mathfrak{B}$ folgt $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b}$ und damit $\mathfrak{M}_{\bar{b}} = \mathfrak{M}_1$, also $[\bar{b}, \xi] = [\bar{b}, o]$ für alle $\xi \in \mathfrak{M}_1$; mithin gilt

$$[\bar{a}, \alpha] + [\bar{b}, \beta] = [\bar{b}, \beta]$$

für alle $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ und $\bar{b} \in \mathfrak{B}$. Schließlich gilt

$$\mathfrak{B} \xleftrightarrow[<]{\sim} [\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_1] \quad \text{vermöge} \quad \bar{b} \to [\bar{b}, o].$$

Die behauptete Umkehrung des Satzes ist offensichtlich. Für das Korollar begnügen wir uns mit dem Nachweis, daß S_0 ein (positiv geordneter) irreduzibler Unterhalbmodul von M_2 ist. Wäre dies nicht der Fall, so würde eine Zerlegung

$$S_0 = U \precsim V$$

in positiv geordnete Unterhalbmoduln U und V existieren. Wenn es dabei für ein festes $\bar{a} \in \mathfrak{N}_0$ ein $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ mit $[\bar{a}, \alpha] \in U$ gibt, so gilt sogar $[\bar{a}, \gamma] \in U$ für alle $\gamma \in \mathfrak{M}_1$. Wäre nämlich $[\bar{a}, \delta] \in V$ für ein $\delta \in \mathfrak{M}_1$, so folgte aus $[\bar{a}, \alpha] + [\bar{a}, \delta] = [\bar{a}, \delta]$ einerseits $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a}$, also $\mathfrak{M}_{\bar{a}} = \mathfrak{M}_1$, aber im Widerspruch dazu aus $[\bar{a}, \alpha] < [\bar{a}, \delta]$ andererseits $\alpha \not\equiv \delta$ $(\mathfrak{M}_{\bar{a}})$. Daher zerfällt $\mathfrak{N}_0$ in die beiden Teilmengen

$$\overline{\mathfrak{U}} = \{\bar{u}\colon\ [\bar{u}, \alpha] \in U\} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{v}} = \{\bar{v}\colon\ [\bar{v}, \beta] \in V\}.$$

Offenbar sind $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{B}$ sogar Unterhalbmoduln von $\mathfrak{N}_0$ und erfüllen $\overline{\mathfrak{U}} < \mathfrak{B}$. Ferner folgt aus $[\bar{u}, \alpha] + [\bar{v}, \beta] = [\bar{v}, \beta]$ auch $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v}$ für alle $\bar{v} \in \overline{\mathfrak{U}}$ und $\bar{u} \in \mathfrak{B}$ und hieraus schließlich noch, daß $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}}_0$ natürlich geordnet sind. Dies steht aber im Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{N}}_0$.

Abschließend behandeln wir die Frage, wann Schreiersche Erweiterungen $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ und $M'=[\overline{\mathfrak{M}}', \mathfrak{M}_1']$ o-isomorph sind. Nun ist zunächst festzustellen, daß bei jedem o-Isomorphismus ω von M auf M' die Komponenten in den geordneten Zerlegungen

$$M = M_1 \cup M_2 \quad \text{und} \quad M' = M_1' \cup M_2'$$

jeweils für sich o-isomorph aufeinander abgebildet werden; denn die Eigenschaft, ein Entgegengesetztes zu besitzen, gilt für Original- und Bildelement gleichzeitig, und M_1 bzw. M_1' ist jeweils gerade die Menge aller Elemente von M bzw. M' mit dieser Eigenschaft. Dann sind aber auch die Faktorhalbmoduln M/M_1 und M'/M_1' und damit $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}}'$ o-isomorph. Damit kann man die Frage dahingehend einschränken, wann Paare R, s und R', s' zu o-isomorphen Halbmoduln $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ und $M'=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ führen. Wir geben hierfür ein Kriterium, das routinemäßig zu beweisen ist:

Satz 5. *Es seien $M=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ und $M'=[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_1]$ Schreiersche Erweiterungen von $\mathfrak{M}_1$ mit $\overline{\mathfrak{M}}$, jeweils festgelegt durch das Paar R, s bzw. R', s', wobei $s(\bar{a}, \bar{b})=o$ und $s'(\bar{a}, \bar{b})=o$ im Falle $\bar{a}=\bar{o}$ oder $\bar{b}=\bar{o}$ gewählt sei. Besteht dann zwischen M und M' ein* o*-Isomorphismus*

$$M \overset{\sim}{\underset{<}{\longleftrightarrow}} M' \quad \text{vermöge} \quad [\bar{a}, \alpha] \to \omega[\bar{a}, \alpha]$$

und setzt man

$$\omega[\bar{o}, \alpha] = [\varphi(\bar{o}), \psi(\alpha)],$$

$$\omega[\bar{a}, o] = [\varphi(\bar{a}), \chi(\bar{a})],$$

so gilt [4]):

(1) $\alpha \to \psi(\alpha)$ *ist ein o-Automorphismus von* $\mathfrak{M}_1$;

(2) $\bar{a} \to \varphi(\bar{a})$ *ist ein o-Automorphismns von* $\overline{\mathfrak{M}}$;

(3) $\bar{a} \to \chi(\bar{a})$ *ist eine (eindeutige) Abbildung von* $\overline{\mathfrak{M}}$ *in* $\mathfrak{M}_1$ *mit* $\chi(\bar{o}) = o$;

(4) $R(\bar{a}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow R'\big(\varphi(\bar{a}), \psi(\alpha), \psi(\beta)\big)$;

(5) $R'\big(\varphi(\bar{a}+\bar{b}), \chi(\bar{a})+\chi(\bar{b})+s'(\varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{b})), \chi(\bar{a}+\bar{b})+\psi(s(\bar{a}, \bar{b}))\big)$;

(6) $\omega[\bar{a}, \alpha] = [\varphi(\bar{a}), \chi(\bar{a})+\psi(\alpha)]$.

Umgekehrt wird bei Vorgabe von drei Abbildungen (1), (2), (3), *welche den Bedingungen* (4) *und* (5) *genügen, durch die Vorschrift* (6) *stets ein* o*-Isomorphismus ω von M auf M' geliefert.*

Korollar. *Bei vorgegebenem* o*-Isomorphismus ω ist* (4) *gleichwertig mit* $\psi(\mathfrak{M}_{\bar{a}})=\mathfrak{M}'_{\varphi(\bar{a})}$.

Beispiele. Zur Veranschaulichung der vorangehenden Aussagen diskutieren wir als Beispiele einige Fälle, in denen der natürlich geordnete Halbmodul $\overline{\mathfrak{M}}$ aus

[4]) $\chi(\bar{a})$ bezeichne dabei einen festgewählten und damit durch $\bar{a}$ eindeutig bestimmten Repräsentanten aus der Klasse $[\xi]$ aller Elemente $\xi \in \mathfrak{M}_1$ mit $\omega[\bar{a}, o]=[\varphi(\bar{a}), \xi]$.

bis zu vier Elementen besteht; die Struktur solcher (endlichen) Halbmoduln $\overline{\mathfrak{M}}$ ist gemäß Clifford [1] einfach zu überschauen.

1. Besteht $\overline{\mathfrak{M}}$ nur aus einem Element, so gilt offenbar $\overline{\mathfrak{M}}=\{\bar{o}\}$ und $M=[\bar{o}, \mathfrak{M}_1] \xleftrightarrow[<]{\sim} \mathfrak{M}_1$.

2. Im Falle zweier Elemente hat man $\overline{\mathfrak{M}}=\{\bar{o}, \bar{1}\}=\{\bar{o}\} \precsim \{\bar{1}\}$. Daher gilt hier neben $\mathfrak{M}_{\bar{o}}=(o)$ notwendig $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=\mathfrak{M}_1$, d.h. M_2 besteht nur aus einem Element. Bezeichnen wir dieses mit ∞, so erhalten wir also $M=M_1 \precsim \{\infty\}$.

3. Im Falle dreier Elemente gibt es die beiden Möglichkeiten

(A) $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \precsim \{\bar{1}\} \precsim \{\bar{2}\}$ und

(B) $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \precsim \{\bar{1}, \bar{2}\}$ (mit $\bar{1}+\bar{1} = \bar{2}$).

Im Falle (A) gilt notwendig $\mathfrak{M}_{\bar{0}}=(o)$, $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=\mathfrak{M}_{\bar{2}}=\mathfrak{M}_1$ und damit (in Übereinstimmung mit Satz 4b)

$$M = M_1 \precsim M_2 \qquad (\text{mit } M_2 \xleftrightarrow[<]{\sim} \mathfrak{N}).$$

Der Fall (B) ist wegen der Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{N}}=\overline{\mathfrak{M}} \setminus \{\bar{o}\}$ der eigentlich interessante Fall; hier steht zunächst nur $\mathfrak{M}_{\bar{0}}=(o)$ und $\mathfrak{M}_{\bar{2}}=\mathfrak{M}_1$ fest (also wieder $[\bar{2}, \alpha]=[\bar{2}, 0]=\infty$ für alle $\alpha \in \mathfrak{M}_1$).
Daraus ergibt sich jedenfalls gemäß Folgerung c), daß $s(\bar{a}, \bar{b})=o$ für alle $\bar{a}$ und $\bar{b}$ aus $\overline{\mathfrak{M}}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist. Dagegen gibt es für $\mathfrak{M}_{\bar{1}}$ prinzipiell drei Möglichkeiten:

(B_1) $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=(o)$. Dann gilt $M=M_1 \cup ([\bar{1}, \mathfrak{M}_1] \cup \{\infty\})$, wobei M gerade die in [3; §3] beschriebene Struktur besitzt.

(B_2) $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=\mathfrak{M}_1$. Dann gilt wegen $M_2 \xleftrightarrow[<]{\sim} \{\bar{1}, \bar{2}\}=\overline{\mathfrak{N}}$ gemäß Satz 3b (vgl. auch [2; Satz 4]) $M=M_1 \precsim M_2$.

(B_3) $\mathfrak{M}_{\bar{1}}$ ist ein nichttrivialer (d.h. von (o) und $\mathfrak{M}_1$ verschiedener) konvexer Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}_1$. In diesem Falle kann man natürlich nähere Aussagen nur bei konkreter Kenntnis von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{U}$ machen. Als Beispiel wählen wir $\mathfrak{M}_1$ als den Modul Z der komplexen Zahlen, wobei diese lexikographisch nach Real- bzw. Imaginärteil geordnet sind. Als (einziger) nichttrivialer konvexer Untermodul existiert hier der Modul $\mathfrak{U}$ aller reinimaginären Zahlen (einschließlich $0=0i$). Setzt man also $\alpha = a_1+a_2 i$, $\beta = b_1+b_2 i$ (a_k, b_k reell), so erhält man

$$R(\bar{1}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta(\mathfrak{U}) \Leftrightarrow a_1=b_1$$

bzw.

$$[\bar{1}, x] = [\bar{1}, \xi] \quad \text{für alle} \quad \xi = x+yi \quad (x, y \text{ reell}).$$

Daher ist hier $[\bar{1}, Z]$ ähnlich zur Menge Δ der reellen Zahlen, d.h.

$$M = Z \cup ([\bar{1}, \Delta] \cup \{\infty\}).$$

4. Legt man $\overline{\mathfrak{M}}$ mit vier Elementen zugrunde, so gibt es folgende Möglichkeiten:

(A) $\qquad \overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \precsim \{\bar{1}\} \precsim \{\bar{2}\} \precsim \{\bar{3}\}$ oder $\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{o}\} \precsim \{\bar{1}\} \precsim \{\bar{2}, \bar{3}\}$.

Dann ist notwendig $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=\mathfrak{M}_1$ und damit gemäß Satz 4b

$$M = M_1 \precsim M_2 \quad (\text{mit } M_2 \xleftrightarrow[<]{\sim} \mathfrak{N}).$$

(B) $\overline{\mathfrak{M}}=\{\bar{o}\}\precsim\{\bar{1},\bar{2}\}\precsim\{\bar{3}\}$. Über diesen Fall weiß man auf Grund von Satz 4b Bescheid, wenn man den Fall (3. B) beherrscht, nämlich gemäß $M=M_1\cup(\ldots\precsim[3,o])$.

(C) $\overline{\mathfrak{M}}=\{\bar{o}\}\precsim\{\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ (mit $\bar{1}+\bar{1}=\bar{2}$, sonst $\bar{a}+\bar{b}=\bar{3}$ für $\bar{a},\bar{b}\in\overline{\mathfrak{N}}$). Dies ist wieder der eigentlich interessante Fall, wobei es auf die Auswahl von $\mathfrak{M}_{\bar{1}}$ und $\mathfrak{M}_{\bar{2}}$ als konvexe Untermoduln von $\mathfrak{M}_1$ ankommt. Setzt man z.B. $\mathfrak{M}_{\bar{1}}=\mathfrak{M}_{\bar{2}}=(o)$, so gilt

$$M=M_1\cup([\bar{1},\mathfrak{M}_1]\cup[\bar{2},\mathfrak{M}_1]\cup[\bar{3},o]),$$

wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $s(\bar{a},\bar{b})=o$ für $\bar{a}\neq\bar{1}$, $\bar{b}\neq\bar{1}$ angenommen werden kann, während (gemäß Satz 3) für jede Wahl von $s(\bar{1},\bar{1})$ jedesmal ein anderes M entsteht. Alle diese Halbmoduln M sind aber untereinander o-isomorph; wählt man nämlich für zwei solche Halbmoduln M und M' (mit $R=R'$, $s(\bar{1},\bar{1})=o$, $s'(\bar{1},\bar{1})\neq o$)

(1) $\psi(\alpha)=\alpha$ für alle $\alpha\in\mathfrak{M}_1$,

(2) $\varphi(\bar{a})=\bar{a}$ für alle $\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$,

(3) $\chi(\bar{o})=o,\quad \chi(\bar{1})=o,\quad \chi(\bar{2})=s'(\bar{1},\bar{1}),\quad \chi(\bar{3})=o$.

so sind die Bedingungen (4) und (5) aus Satz 5 erfüllt, so daß

$$[\bar{a},\alpha]\to[\bar{a},\chi(\bar{a})+\alpha]$$

einen o-Isomorphismus ω von M auf M' liefert. Wählt man dagegen eine andere Relation R', etwa mit $\mathfrak{M}'_{\bar{2}}\neq(o)$, so entstehen weitere Halbmoduln M', die nicht o-isomorph zu den eben betrachteten sind, denn sonst müßte es ja (wegen $\varphi(\bar{a})=\bar{a}$ für alle $\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$ auf Grund der Endlichkeit von $\overline{\mathfrak{M}}$) einen o-Automorphismus ψ von $\mathfrak{M}_1$ mit $\psi(\mathfrak{M}_{\bar{2}})=\mathfrak{M}'_{\bar{2}}$ geben im Widerspruch zu $\mathfrak{M}_{\bar{2}}=(o)$.

Literatur

[1] A. H. Clifford, Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 631—646.
[2] H. Lugowski, Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 23—31.
[3] H. Lugowski, Die Charakterisierung gewisser geordneter Halbmoduln mit Hilfe der Erweiterungstheorie, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 237—248.

(Eingegangen am 11. December 1966.)