Gefilterte Moduln und Anwendungen in der algebraischen Geometrie

Von H. KURKE (Berlin) und W. VOGEL (Halle/S)

Einleitung

Im Zusammenhang mit dem *Noetherschen Fundamentalsatz* wurde von D. G. NORTHCOTT der Begriff der ersten Nachbarschaft von Ringen ([4], [3]) eingeführt. Das Studium der ein-dimensionalen Stellenringe in [5] führte auf eine Verbindung der sogenannten Reduktionszahl [6] mit den ersten Nachbarschaften von diesen Ringen. — Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Methoden zu entwickeln, die unter anderem das Studium der ersten Nachbarschaft eines Moduls durch Strukturuntersuchungen vereinfacht. Ferner wird eine verallgemeinerte Quotientenringbildung definiert, die als Spezialfall die gewöhnliche Quotientenbildung bezüglich eines multiplikativ abgeschlossenen Systems enthält. Im §1 werden die allgemeinen Begriffe und Ergebnisse hergeleitet. Im §2 folgen einige Beispiele. So wird etwa der Zusammenhang mit den monoidalen Transformationen und Differentialen herausgearbeitet. Im §3 werden die Methoden auf die idealtheoretische Multiplizitätstheorie und Theorie der ersten Nachbarschaft von Moduln über ein-dimensionalen Halbstellenringen angewendet. Es wird insbesondere ein Ergebnis aus [8] mit diesen Methoden hergeleitet, um zu zeigen, mit welchem Erfolg sie auf derartige Fragestellungen angewandt werden können.

§ 1: Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement, E ein unitärer A-Modul, Γ eine geordnete kommutative Halbgruppe mit Nullelement und Γ_∞ die geordnete Halbgruppe Γ bzw. $\Gamma \cup \{\infty\}$ (mit $\gamma < \infty$ für alle $\gamma \in \Gamma$, $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty$ für $\gamma \in \Gamma_\infty$) je nachdem, ob Γ ein größtes Element $\gamma = \infty$ oder nicht besitzt. Unter einer Γ-Filtration von A bzw. E verstehen wir eine Abbildung

$$w\colon A \to \Gamma_\infty \quad \text{bzw.} \quad w_E\colon E \to \Gamma_\infty$$

(wir lassen den Index E bei w_E im folgenden fort, sofern Mißverständnisse ausgeschlossen sind) mit den Eigenschaften

(F_1) $w(1) = 0$, $w(x) \geqq 0$ für $x \in A$;
(F_2) $w(x \pm y) \geqq \min.(w(x), w(y))$ für $x, y \in A$ bzw. $x, y \in E$;
(F_3) $w(xy) \geqq w(x) + w(y)$ für $x \in A$, $y \in A$ bzw. $y \in E$.

Wir bezeichnen für $\gamma \in \Gamma$ mit

$F^\gamma E = \{x;\ x \in E,\ w(x) > \gamma$ bzw. $w(x) = \infty\}$,
$F_\gamma E = \{x;\ x \in E,\ w(x) \geqq \gamma\}$. Es gilt

$F_\gamma E \supseteq F^\gamma E \supseteq F_{\gamma'}(E)$ für $\gamma' > \gamma$,
$(F_\gamma A)(F_{\gamma'} E) \subseteq F_{\gamma+\gamma'} E$,
$(F^\gamma A)(F^{\gamma'} E) \subseteq F^{\gamma+\gamma'} E$,
$F_\gamma E = \bigcap_{\gamma'<\gamma} F^{\gamma'} E$ und $F_0 A = A$.

Mit α_γ bezeichnen wir die kanonische Abbildung

$$F_\gamma E \to F_\gamma E / F^\gamma E.$$

Ferner setzen wir $G(A) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma A/F^\gamma A$, $G(E) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma E/F^\gamma E$. Durch die Definition $\alpha_\gamma(x)\cdot\alpha_{\gamma'}(y) = \alpha_{\gamma+\gamma'}(xy)$, $x\in F_\gamma A$, $y\in F_{\gamma'} A$ bzw. $y\in F_{\gamma'} E$ wird $G(A)$ ein Γ-graduierter Ring und $G(E)$ ein Γ-graduierter $G(A)$-Modul. (Daß die Definition des Produktes vom Repräsentanten unabhängig ist, folgt aus $(F^\gamma A)(F_{\gamma'} E) \subseteq F^{\gamma+\gamma'} E$ und $(F_\gamma A)\cdot\cdot(F^{\gamma'} E) \subseteq F^{\gamma+\gamma'} E$.) Damit ist G ein additiver Funktor der Kategorie Γ-gefilterten Moduln in die Kategorie der Γ-graduierten Moduln. Dabei verstehen wir unter Morphismen gefilterter Moduln ein Paar (f, η) eines Modulhomomorphismus f: $E_1 \to E_2$ und einer ordnungserhaltenden Inklusion $\eta: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ mit $w_{E_2}(f(x)) \geqq \geqq \eta w_{E_1}(x)$ für $x\in E_1$. Es gilt $G(\operatorname{Kern} f) = \operatorname{Kern} G(f)$ und $G(\operatorname{Kokern} f) = = \operatorname{Kokern} G(f)$. Für jedes multiplikativ abgeschlossene System S von Elementen aus A mit der Eigenschaft $w(f\cdot g) = w(f) + w(g)$ mit $f, g\in S$ definieren wir einen Ring $FS^{-1}A$ und einen Funktor FS^{-1} der Kategorie der Γ-gefilterten A-Moduln in die Kategorie der FS^{-1} A-Moduln.

Definition: *$FS^{-1}A$ ist der Unterring von $S^{-1}A$ aller x/f, $f\in S$ mit $w(x) \geqq w(f)$. $FS^{-1}E$ ist der Untermodul von $S^{-1}E$ aller x/f, $f\in S$, $x\in E$ mit $w(x)\geqq w(f)$.*

Es gibt kanonische Homomorphismen $A \to FS^{-1}A$, $E\to FS^{-1}E$. $FS^{-1}(A)$ ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert: *Jeder Ringhomomorphismus $\varphi: A\to B$ (in der Kategorie der kommutativen Ringe ohne Filtration), der die Elemente aus S in reguläre Ringelemente überführt und die Eigenschaft $\varphi(F_\gamma A)\cdot B = f\cdot B$ für $f\in S$, $w(f)=\gamma$ besitzt, läßt sich zu genau einem Ringhomomorphismus $FS^{-1}A \to B$ fortsetzen.* $FS^{-1}E$ ist durch die analoge Bedingung charakterisiert: *Jeder Modulhomomorphismus λ: $E\to M$ in einen bzgl. S torsionsfreien $FS^{-1}(A)$ Modul M (d.h. aus $f\cdot x = 0$, $f\in S$, $x\in M$ folgt $x=0$) mit der Eigenschaft $\lambda(F_\gamma E)\subseteq f\cdot M$ für $f\in S$, $w(f)=\gamma$ läßt sich zu genau einem Modulhomomorphismus $FS^{-1}E\to M$ fortsetzen.*

Mit $\alpha(S)$ bezeichnen wir das System der von Null verschiedenen Anfangsformen von Elementen aus S. Nach der Voraussetzung über S ist $\alpha(S)$ multiplikativ abgeschlossen in $G(A)$. Wir bezeichnen mit $GS^{-1}A$ den Unterring von $\alpha(S)^{-1}G(A)$ aller Elemente μ/ν mit Grad $\mu = $ Grad ν, $\nu\in\alpha(S)$ und $GS^{-1}E$ den Untermodul von $\alpha(S)^{-1}G(E)$ aller Elemente ξ/ν, $\xi\in G(E)$, $\nu\in\alpha(S)$ mit Grad $\xi = $ Grad $\nu\cdot GS^{-1}E$ ist ein $GS^{-1}A$-Modul. Dann gilt der folgende Isomorphiesatz

Satz 1. *Durch $x/f \Rightarrow \alpha_\gamma(x)/\alpha_\gamma(f)$, $x\in E$, $f\in S$, $w(f)=\gamma$ wird eine natürliche Transformation des Funktors FS^{-1} auf den Funktor GS^{-1} definiert. Der Kern von $FS^{-1}E\to GS^{-1}E$ besteht aus allen Elementen x/f mit $w(x) > w(f)$. Den Kernfunktor bezeichnen wir mit F^+S^{-1}.*

Beweis. Ist $x/f = x'/f'$, so gibt es ein $f''\in S$ und $(x\cdot f' - x'\cdot f)f'' = 0$. Sei $\gamma' = w(f')$, $\gamma'' = w(f'')$, dann ist, da $w(x)\geqq\gamma$, $w(x')\geqq\gamma'$, $0 = \alpha_{\gamma+\gamma'+\gamma''}\cdot$

$\cdot((x\cdot f'-x'\cdot f)f'')=(\alpha_\gamma(x)\cdot\alpha_{\gamma'}(f')-\alpha_{\gamma'}(x')\cdot\alpha_\gamma(f))\cdot\alpha_{\gamma''}(f'')$ und somit $\alpha_{\gamma'}(x')/\alpha_{\gamma'}(f')=$ $=\alpha_\gamma(x)/\alpha_\gamma(f)$, also ist die Definition vom Repräsentanten unabhängig. Daß es sich um eine natürliche Transformation mit den angegebenen Eigenschaften handelt, rechnet man sofort nach, q.e.d.

§ 2. Wir geben jetzt einige Beispiele.

1. Sei A ein Integritätsbereich und w eine Bewertung des Quotientenkörpers von A, die nicht negativ auf A sein soll. Sei $S=A-0$, dann ist $B=FS^{-1}A$ der Bewertungsring von w, $F^+S^{-1}A$ sein Maximalideal, also $GS^{-1}A$ der Restklassenkörper von B.

2. Seien A, B Integritätsbereiche, $A\subseteq B$, $f\in A$ und w die durch $F_nA=f^nB\cap A$, $n=0,1,2,\ldots$ definierte Filtration, $S=\{f^n, n=0,1,2,\ldots\}$. Dann ist $FS^{-1}A=$ $=B\cap A_f$, $GS^{-1}A=B\cap A_f/(f\cdot B\cap A_f)$.

3. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem beliebigen kommutativen Ring mit Einselement. Wir betrachten die $\mathfrak{a}$-adische Filtration von A, d.h. $F_nA=\mathfrak{a}^n$. Sei $f\in\mathfrak{a}$ derart, daß $f^n\notin\mathfrak{a}^{n+1}$ für alle $n=0,1,2,\ldots$ und $S=\{f^n, n=0,1,2,\ldots\}$. Wenn $\{x_\alpha, \alpha\in I\}$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, so ist $FS^{-1}A=A[(x_\alpha/f),\alpha\in I]$, $\mathfrak{a}\cdot FS^{-1}A=f\cdot FS^{-1}A$ und

$$A[(x_\alpha/f),\ \alpha\in I]/fA[(x_\alpha/f),\ \alpha\in I]\cong GS^{-1}A,$$

$GA=(A/\mathfrak{a})[\alpha_1(x_\alpha),\ \alpha\in I]$, wobei α_1 die Anfangsform vom Grad 1 ist. Sei $\alpha(S)=$ $=S'\subseteq G(A)$. Wenn man $GS^{-1}(A)=[S'^{-1}G(A)]_0$ kennt, so kennt man auch $S'^{-1}G(A)$, nämlich $GS^{-1}(A)[G']$ im Sinne des Gruppenringes über $GS^{-1}(A)$ der Gruppe G', die von S erzeugt wird. Ist speziell $S=\{f^n\}$ dann haben wir die folgende Isomorph

$$S^{-1}G(A)=G(A)_{\alpha(f)}\cong(FS^{-1}A/F^+S^{-1}A)[X,X^{-1}].$$

4. Sei X eine affine Mannigfaltigkeit mit dem Koordinatenring A. Wir betrachten eine monoidale Transformation $X'\to X$ im Sinne von H. HIRONAKA [1] mit $\mathfrak{a}$ als Zentrum. Wenn $\mathfrak{a}$ durch Elemente $\{f_i\}$ erzeugt wird, so erhält man eine affine Überdeckung $\{X_i'\}$ von X' derart, daß $A_i'=FS_{f_i}^{-1}A$ der Koordinatenring von X_i' ist. Dabei ist $S_{f_i}=\{1,f_i,f_i^2,\ldots\}$ und F die $\mathfrak{a}$-adische Filtration.

5. Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale mit $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}^2$ in einem kommutativen Ring. $\Gamma_1=Z$ die geordnete Gruppe der ganzen Zahlen. $\Gamma_2=\{0,\infty\}$ als geordnete Halbgruppe, $\Gamma=\Gamma_1\oplus\Gamma_2$ lexikographisch geordnet, d.h. $(n,a)\geqq(m,b)$ genau dann, wenn $n>m$ oder $n=m$, $a\geqq b$. Durch $F_{(n,0)}A=\mathfrak{a}^n$, $F_{(n,\infty)}A=\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b}$ für $n\geqq 1$ und $F_{(0,\infty)}A=$ $=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ wird eine Γ-Filtration in A definiert. Dann ist $F^{(n,0)}A=\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b}$, $n\geqq 1$, $F^{(0,0)}A=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$, $F^{(n,\infty)}A=\mathfrak{a}^{n+1}$ und

$$G(A)=A/(\mathfrak{b}:\mathfrak{a})+(\mathfrak{b}:\mathfrak{a})/\mathfrak{a}+\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b})+\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^{n+1}).$$

Es gilt ferner

$$\left[\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b})\right]\cdot\left[\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^{n+1})\right]=0.$$

Sei $f\in\mathfrak{a}$, $\notin\mathfrak{b}$, so daß $f^n\notin\mathfrak{a}^{n-1}\mathfrak{b}$, dann ist $w(f^n)=nw(f)$, und wir können $FS^{-1}A$ konstruieren: Wenn $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, so ist $FS^{-1}A=A[(x_\alpha/f)_{\alpha\in I}]$ und $F^+S^{-1}A=(\mathfrak{b}/f)\,FS^{-1}A$. Die Inklusion $\eta: Z\to Z\oplus 0\subseteq\Gamma$ ist ein Ordnungshomomorphismus und (Id_A,η) ist ein Morphismus des Z-gefilterten Ringes A mit der

Filtration $F_n A = \mathfrak{a}^n$ auf den Γ-gefilterten Ring A. Dazu gehört ein Homomorphismus der zugehörigen graduierten Ringe

$$G_Z(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \to G_\Gamma(A)$$

und folgendes Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} F_Z S^{-1} A & = & F_\Gamma S^{-1} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_Z S^{-1} A & \to & G_\Gamma S^{-1} A \end{array}$$

Der Homomorphismus ordnet jedem Element aus $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ die Restklasse modulo $\mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b}$ (bzw. für $n=0$ modulo $(\mathfrak{b}:\mathfrak{a})$) zu, der Kern ist

$$(\mathfrak{b}:\mathfrak{a})/\mathfrak{a} + \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^{n-1}\cdot\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^{n+1} \subseteqq G_Z(A).$$

6. Sei X/K eine algebraische Mannigfaltigkeit. P ein rationaler Punkt über dem Grundkörper K. Sei Q_p der lokale Ring im Punkte P und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ stellt dann den Raum der Differentiale im Punkte P dar, siehe [7]. Für ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{m} \supseteqq \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{m}^2$ ist $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}^2$ ein Unterraum des Raumes der Differentiale. Diesem Unterraum kann man zuordnen $\mathfrak{a} = \mathrm{Kern}\,(G_Z(Q_P) \to G_\Gamma(Q_P)) \subseteqq G_Z(Q_P)$, dabei ist $G_Z(Q_P)$ der Koordinatenring des Tangentialkegels in P. Damit entspricht dem $\mathfrak{a}$ einen Unterraum des Tangentialkegels. Das liefert eine Zuordnung der Menge der Unterräume der lokalen Differentiale in die Menge der Unterräume des Tangentialkegels.

§ 3. Im folgenden geben wir einige Anwendungen auf die idealtheoretische Multiplizitätstheorie und auf die Theorie der ersten Nachbarschaft von Moduln über eindimensionalen Halbstellenringen.

Sei R ein Noetherscher Ring der Dimension d, $\mathfrak{a}$ ein nulldimensionales Ideal von R und M ein Noetherscher R-Modul. Wir betrachten die durch $F_n R = \mathfrak{a}^n$ und $F_n M = \mathfrak{a}^n \cdot M$ definierte $\mathfrak{a}$-adische Filtration. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die zu $G(E)$ gehörigen Primidealei von $G(A)$ der Dimension d, $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ die zu den Primidealen gehörigen Primärkomponenten. Nach den üblichen Schlußweisen ([9], Chapter II und [2], Chapter III) ergibt sich für die idealtheoretische Multiplizitätstheorie von $\mathfrak{a}$ bezüglich M

$$\mu(\mathfrak{a}, M) = \sum_{i=1}^{r} \deg(\mathfrak{p}_i) \cdot L(M_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{g}_i \mathfrak{p}_i). \tag{1}$$

Ist S_i das System aller Elemente, deren Anfangsform nicht in $\mathfrak{p}_i$ liegt, so ist $M_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{g}_{i\mathfrak{p}_i} \cong \cong FS_i^{-1}M/F^+ S_i^{-1}M$ und $F^+ S_i^{-1} M = \mathfrak{a}\cdot FS_i^{-1}M = f_i \cdot FS_i^{-1}M$, wenn $f_i \in \mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2$ und $\alpha_1(f_i) \notin \mathfrak{p}_i$. Da f_i kein Nullteiler in $FS_i^{-1}M$ ist und $FS_i^{-1}R$ als Quotientenring von $F\{f_i^v\}^{-1}R = A[u_1/f_i, \ldots, u_m/f_i]$, wobei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, ein eindimensionaler lokaler Ring ist, ergibt sich

$$L(FS_i^{-1}M/\mathfrak{a}FS_i^{-1}M) = \mu(\mathfrak{a}\cdot FS_i^{-1}R, FS_i^{-1}M).$$

Das liefert nach (1)

$$\mu(\mathfrak{a}, M) = \sum_{i=1}^{r} \deg(\mathfrak{p}_i) \cdot \mu(\mathfrak{a} \cdot FS_i^{-1} A, FS_i^{-1} M)$$

Wir geben jetzt die Definition eines Oberflächenelementes.

Definition: *Sei A ein gefilterter Ring, E ein gefilterter A-Modul. Wir nennen f ein Oberflächenelement in E vom Grade $\gamma = w(f)$ bezüglich der Filtration w, wenn ein γ_0 existiert und*

$$w(x \cdot f) = w(x) + w(f) \quad \text{für} \quad w(x) \geqq \gamma_0,\ x \in E.$$

Diese Definition enthält die übliche Definition für Oberflächenelemente eines Ideals. Insbesondere ergibt sich für den Fall, daß Q ein eindimensionaler Halbstellenring (Noethersch), $\mathfrak{v}$ ein Definitionsideal von Q und M ein Noetherscher Q-Modul sind, nach den üblichen Schlußweisen (z.B. [8], Satz 2), da $\bigcap_{\varrho=0}^{\infty} \mathfrak{v}^{\varrho} \cdot M = (0)$ ist, der

Hilfsatz 1. *Das Element $f \in \mathfrak{v}^{w(f)}, f \notin \mathfrak{v}^{w(f)+1}$ ist genau dann ein Oberflächenelement der Ordnung $w(f)$ bezüglich M, wenn $\mathfrak{v}^{n+w(f)} \cdot M = f \cdot \mathfrak{v}^n \cdot M$ für genügend großes n.*

Es sei S ein multiplikativ abgeschlossenes System in A mit $w(f \cdot g) = w(f) + w(g)$, f und g aus S. Wir definieren dann $F_\gamma S^{-1}E$ als die Menge aller Elemente $x/f \in FS^{-1}E$ mit $w(x) \geqq \gamma + w(f)$. Insbesondere ist $(F_\gamma A) \cdot (FS^{-1}E) \subseteqq F_\gamma S^{-1}E$. Mit $F_{\gamma_0}E \cap E_\gamma S^{-1}E$ bezeichnen wir das Urbild von $F_\gamma S^{-1}E$ bei der kanonischen Abbildung $F_{\gamma_0}E \to E \to FS^{-1}E$. Dann gilt der folgende

Satz 2. *Wenn f ein Oberflächelenement, $w(x \cdot f) = w(x) + w(f)$ für $w(x) \geqq \gamma_0$ und $S = \{f^v\}$ $v = 1, 2, \ldots$, so ist $F_{\gamma_0}E \cap F_\gamma S^{-1}E = F_\gamma E$ für $\gamma \geqq \gamma_0$.*

Beweis. Es ist $F_\gamma E \subseteqq F_{\gamma_0}E \cap F_\gamma S^{-1}E$. Aus $x \in F_{\gamma_0}E \cap F_\gamma S^{-1}E$ folgt $w(f^n x) \geqq \gamma + n \cdot w(f)$ für ein hinreichend großes n (nach Definition von $F_\gamma S^{-1}E$) und hieraus folgt $w(x) \geqq \gamma$, da f Oberflächenelement und $\gamma \geqq \gamma_0$, mithin $x \in F_\gamma E$, q.e.d.

Korollar: *Unter der Voraussetzung von Satz 2 gilt: Wenn ein $\gamma \in \Gamma$ existiert mit $F_\gamma E \subseteqq f \cdot F_{\gamma_0}E$, so ist $f^n FS^{-1}E \subseteqq j(F_{\gamma_0}E)$, wobei j die kanonische Abbildung $E \to FS^{-1}E$ bedeutet und falls $n \cdot w(f) \geqq \gamma$.*

Beweis. $F_{\gamma_0}E \cap f^n FS^{-1}E \subseteqq F_\gamma E \subseteqq f \cdot F_{\gamma_0}E$ (falls $n \cdot w(f) \geqq \gamma$, also $f^n FS^{-1}E \subseteqq F_\gamma S^{-1}E$). Durch Induktion folgt für alle $k \geqq 0$ $F_{\gamma_0}E \cap f^{n+k} FS^{-1}E \subseteqq f^{k+1} F_{\gamma_0}E$ nach folgender Überlegung: $F_{\gamma_0}E \cap f^{n+k} FS^{-1}E = F_{\gamma_0}E \cap f^{n+k-1} FS^{-1}E \cap f^{n+k} FS^{-1}E \subseteqq f^k F_{\gamma_0}E \cap f^{n+k} FS^{-1}E = f^k(F_{\gamma_0}E \cap (f^{n+k} FS^{-1}E : f^k)) = f^k(F_{\gamma_0}E \cap f^n FS^{-1}E) \subseteqq f^{k+1} F_{\gamma_0}E$. Daraus folgt: Wenn $x = x' \cdot f^n \in f^n FS^{-1}E$ mit $x' \in FS^{-1}E$, so gibt es ein k und $f^k x' \in j(E)$ derart, daß $f^k x = f^n f^k x' \in j(f^n E) \subseteqq j(F_{\gamma_0}E)$, also $f^k x \in j(f^{n+k} FS^{-1}E \cap F_{\gamma_0}E) \subseteqq j(f^{k+1} F_{\gamma_0}E)$. Da f in FS^{-1} regulär ist, folgt daraus $x \in j(F_{\gamma_0}E)$, also $f^n FS^{-1}E \subseteqq j(F_{\gamma_0}E)$, q.e.d.

Wir kommen jetzt zur Theorie der ersten Nachbarschaftsmoduln. Im folgenden sei Q stets ein eindimensionaler Noetherscher Halbstellenring, $\mathfrak{v}$ ein Definitionsideal von Q und M ein Noetherscher Q-Modul. $S = S(M)$ bezeichne die Menge aller Elemente $s \in Q$ derart, daß $0 \cdot M : s = 0 \cdot M$ ist. Sei $F = S^{-1}(M) = M_{S(M)}$.

Definition: *Der erste Nachbarschaftsmodul* $M^{\mathfrak{v}}$ *von* M *in bezug auf* $\mathfrak{v}$ *ist die Menge aller Elemente* $u \in F$, *so daß* $\mathfrak{v}^n \cdot u \subseteqq \mathfrak{v}^n \cdot M$ *für irgendeine ganze Zahl* $n \geqq 0$, *d.h.* $M^{\mathfrak{v}} = \bigcup_{n \geqq 0} \mathfrak{v}^n \cdot M / \mathfrak{v}^n$.

Bezeichne $\mathfrak{m}$ das Jacobsonradikal. Im folgenden werden wir immer voraussetzen, daß $0 :_M \mathfrak{m} = 0$.

Satz 3. *Sei* f *ein Oberflächenelement aus* $S(M)$ *vom Grade* $w(f)$. *Dann ist* $M^{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}^{n \cdot w(f)} \cdot M / f^n$ *für genügend großes* n.

Beweis. Es ist klar, daß $M^{\mathfrak{v}} \subseteqq \bigcup_{n \geqq 0} \mathfrak{v}^{n \cdot w(f)} \cdot M / f^n = F_{\mathfrak{v}} S_f^{-1} M$, wobei $S_f = \{1, f, f^2, \dots\}$ ist ($F_{\mathfrak{v}}$ bedeutet die $\mathfrak{v}$-adische Filtration). Nach dem Korollar von Satz 2 existiert ein m und n_0 derart, daß $f^m \cdot F_{\mathfrak{v}} S_f^{-1} M \subseteqq \mathfrak{v}^{\mathfrak{v}_0} \cdot M$. Ferner ist $\mathfrak{v}^{m \cdot w(f)} (\mathfrak{v}^k \cdot M / f^k) = f^m \cdot (\mathfrak{v}^{m \cdot w(f)} \mathfrak{v}^{k \cdot w(f)} \cdot M / f^m \cdot f^k) \subseteqq \mathfrak{v}^{\mathfrak{v}_0} \cdot M \subseteqq M$, also $(\mathfrak{v}^{m \cdot w(f) + k} \cdot M / f^k) \cap M = \mathfrak{v}^{m \cdot w(f) + k} \cdot M : f^k = \mathfrak{v}^m \cdot M$, mithin $\mathfrak{v}^k \cdot M / f^k \cdot M \subseteqq M^{\mathfrak{v}}$ für alle k. Damit ist $F_{\mathfrak{v}} S_f^{-1} M \subseteqq M^{\mathfrak{v}}$, q.e.d.

Korollar: $M^{\mathfrak{v}}$ *ist ein endlich erzeugter* Q*-Modul.*

Es sei $L(M / \mathfrak{v}^n \cdot M) = e_0 \cdot n - e_1$ das Hilbert—Samuelsche Polynom. $e_0 = e_0(\mathfrak{v}, M)$ ist die Multiplizität und $e_1 = e_1(\mathfrak{v}, M)$ die Reduktionszahl von $\mathfrak{v}$ bezüglich M.

Hilfssatz 2. *Wenn* f *ein Oberflächenelement der Ordnung* $w(f)$ *von* M *ist, dann gilt* $L(M / f \cdot M) = e_0(\mathfrak{v}, M) \cdot w(f)$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt für das Oberflächenelement f $\mathfrak{v}^{m \cdot w(f)} \cdot M = f \cdot \mathfrak{v}^m \cdot M$, also $f^n \cdot \mathfrak{v}^m = \mathfrak{v}^{m + n \cdot w(f)}$. Damit ergibt sich $\mathfrak{v}^{n \cdot w(f)} \supseteqq (f^n) \supseteqq \mathfrak{v}^{m + n \cdot w(f)}$. Für das Hilbert—Samuelsche Polynom folgt hieraus

$$(2) \quad L(M / \mathfrak{v}^{m + n \cdot w(f)} \cdot M) / n \cdot w(f) \geqq L(M / f^n \cdot M) / n \cdot w(f) \geqq L(M / \mathfrak{v}^{n \cdot w(f)} \cdot M) / n \cdot w(f)$$

Da $L(M / f^n M) = L(M / f \cdot M) + L(f \cdot M / f^n M) = L(M / f M) + L(M / f^{n-1} M) = \dots$ $\dots = n \cdot L(M / f M)$, ist $L(M / f^n \cdot M) / n \cdot w(f) = L(M / f \cdot M) / w(f)$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in (2) ergibt sich, da beide Seiten gegen $e_0(\mathfrak{v}, M)$ streben (weil $\dim Q = 1$ ist), $e_0(\mathfrak{v}, M) = L(M / f \cdot M) / w(f)$, q.e.d.

Satz 4. $e_1(\mathfrak{v}, M) = L(M^{\mathfrak{v}} / M)$.

Sei f ein Oberflächenelement vom Grade $w(f)$. Dann ist nach Satz 2 für das Oberflächenelement $v = f^n$ vom Grade $N = n \cdot w(f)$ $v \cdot M^{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}^N \cdot M$. Da v kein Nullteiler bezüglich $M^{\mathfrak{v}} \subseteqq F$ sein kann (man beachte, daß $0 :_M \mathfrak{m} = 0$ stets vorausgesetzt ist) sind die Q-Moduln $M^{\mathfrak{v}} / M$ und $v \cdot M^{\mathfrak{v}} / v \cdot M$ isomorph. Das ergibt

$$(3) \qquad L(M^{\mathfrak{v}} / M) = L(v \cdot M^{\mathfrak{v}} / v \cdot M) = L(\mathfrak{v}^N \cdot M / v \cdot M).$$

Für genügend großes n ist dann

$$L(M^{\mathfrak{v}} / M) = L(\mathfrak{v}^N \cdot M / v \cdot M) = L(M / v \cdot M) - L(M / \mathfrak{v}^N \cdot M) = e_0 \cdot N - (e_0 \cdot N - e_1) =$$
$$= e_1(\mathfrak{v}, M), \text{ (nach Hilfssatz 2) q.e.d.}$$

Das ergibt das

Korollar: *Sei* M *ein von Null verschiedener endlich erzeugter* Q*-Modul mit* $0 :_M \mathfrak{m} = 0$, *dann gilt* $M = M^{\mathfrak{v}}$ *genau dann, wenn* $e_1(\mathfrak{v}, M) = 0$.

Literatur

[1] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of charakteristic zero: I. *Ann. of Math.* **79** (1964), 109—203.
[2] M Nagata, Local rings. Interscience Tracts in Math., No. 13, *New York* 1962.
[3] D. G. Northcott, The neighbourhoods of a local rings. *J. London Math. Soc.* **30** (1955), 360—375.
[4] ———, On the notion of a first neighbourhoods ring with an app application to the $A \cdot F + B\Phi$ Theorem, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **53** (1957), 43—56.
[5] ———, Some contributions to the theory of one-dimensional local rings, *Proc. London Math. Soc.* (3) **8** (1958), 388—415.
[6] ———, The reduction number of one-dimensional local ring, Mathematika **6** (1959), 87—90.
[7] P. Samuel, Méthodes d'algébre abstraite en géométrie algébrique, *Berlin*, 1955.
[8] W. Vogel, Über die Reduktionszahl und erste Nachbarschaft von Moduln. *Monatsh. Math.* **72** (1968), 245—253.
[9] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, Vol. 2. *Princeton,* 1960.

(Eingegangen am 17. Mai 1967.)