Differenzierbarkeitseigenschaften von Lösungen hypoelliptischer Differentialgleichungen

Von ERICH MÜLLER-PFEIFFER (Jena)

Die zu untersuchenden Differentialgleichungen werden als Operatorgleichungen $Au=f$ interpretiert, so daß die Theorie der Differentialoperatoren angewendet werden kann. Der zugrunde liegende Hilbertraum ist $L_2(E_n)$, der Raum der im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n definierten und im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbaren Funktionen. A ist der vorgelegten Differentialgleichung entsprechend ein hypoelliptischer Differentialoperator ([5]). Die im folgenden benutzte Methode, um Kenntnisse über Differenzierbarkeitseigenschaften von Lösungen u der Gleichung $Au=f$ in Abhängigkeit von der rechten Seite zu gewinnen, ist, die Funktion $f(x)$, $x=(x_1, \dots, x_n) \in E_n$, als Element gewisser Teilräume von $L_2(E_n)$ aufzufassen. Als solche Teilräume werden Räume verwendet, die als Verallgemeinerungen der bekannten Sobolewschen Räume $W_2^l(E_n)$ ([6]) anzusehen sind. Die durch A bestimmte selbstadjungierte Erweiterung $\bar{A}$ von A bildet ihren Definitionsbereich $D(\bar{A})$ auf einen solchen Teilraum ab und gibt gemäß $\bar{A}u=f$ den Anlaß, sog. „verallgemeinerte Lösungen" $u \in D(\bar{A})$ zu definieren. $D(\bar{A})$ ist in bestimmten verallgemeinerten Sobolewschen Räumen eingebettet, woraus sich bestimmte Differenzierbarkeitseigenschaften einer Lösung $u(x)$ ableiten. $\bar{A}$ besitzt nur stetiges Spektrum, dessen Lokalisierung durch die Konstruktion von Weylschen Folgen bestimmt wird.

Der euklidische Raum E_n wird als direkte Summe von s paarweise orthogonalen Teilräumen E_{n_j} der Dimensionen n_j dargestellt,

$$E_n = \sum_{j=1}^{s} \oplus E_{n_j}, \quad n = \sum_{j=1}^{s} n_j .$$

Entsprechend faßt man die n Komponeneten von $x \in E_n$ zu s Teilmenge nzusammen

(1) $$x = (x_1, \dots, x_n) = ({}_1x_1, {}_1x_2, \dots, {}_1x_{n_1}, {}_2x_1, \dots, {}_2x_{n_2}, \dots, {}_sx_1, \dots, {}_sx_{n_s}).$$

Dann ist

(2) $${}_jx = ({}_jx_1, \dots, {}_jx_{n_j}) \in E_{n_j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{s} \oplus {}_jx = x.$$

Analog definiert man einen Vektor $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dessen Komponenten α_i nicht negative ganze Zahlen sind, und benutzt zur Abkürzung Multiindizes ([4, S. 4]):

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = ({}_1\alpha_1, {}_1\alpha_2, \ldots, {}_1\alpha_{n_1}, {}_2\alpha_1, \ldots, {}_2\alpha_{n_2}, {}_s\alpha_1, \ldots, {}_s\alpha_{n_s}),$$

(3)

$${}_j\alpha = ({}_j\alpha_1, \ldots, {}_j\alpha_{n_j}), \quad |{}_j\alpha| = \sum_{\nu=1}^{n_j} {}_j\alpha_\nu.$$

Damit definiert man

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

und die Differentialoperatoren

$$(4) \quad D_{x_k} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n; \qquad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D^{j\alpha} = D_{{}_jx_1}^{{}_j\alpha_1} \ldots D_{{}_jx_{n_j}}^{{}_j\alpha_{n_j}},$$

mit deren Hilfe auf der linearen Menge $C_0^\infty(E_n)$ der in E_n finiten Funktionen folgende Norm gebildet wird ([5]):

$$(5) \qquad u \in C_0^\infty(E_n), \quad \|u\|_{[n,l;s]}^2 = \sum_{j=1}^{s} \sum_{|{}_j\alpha| \leq l_j} \|D^{j\alpha} u\|^2.$$

Dabei sind die l_j nicht negative ganze Zahlen, und $\|\cdot\|$ ist die Norm des Raumes $L_2(E_n)$. Das Symbol $[n, l; s]$ ist eine formale Abkürzung für das Indexbild $\begin{matrix} l_1 & \ldots & l_s \\ n_1 & \ldots & n_s \end{matrix}$; n und l können also in diesem Zusammenhang auch als Vektoren $n = (n_1, \ldots, n_s)$ und $l = (l_1, \ldots, l_s)$ interpretiert werden.

Die Normen $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$ und $\|\cdot\|$ sind koordiniert ([3]); das bedeutet, daß jede Fundamentalfolge von Funktionen aus $C_0^\infty(E_n)$ in der Metrik der Norm $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$, die Nullfolge in $L_2(E_n)$ ist, sich auch als Nullfolge in der Metrik $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$ erweist. Das zeigt folgende Überlegung.

$$\{u_m\}_{m=1,2,\ldots}, \quad u_m \in C_0^\infty(E_n),$$

sei eine Fundamentalfolge in der Metrik $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$, für welche $\lim_{m\to\infty} \|u_m\| = 0$ gilt. Dann ist $\{D^{j\alpha} u_m\}_{m=1,2\ldots}$ wegen

$$\|D^{j\alpha} u\| \leq \|u\|_{[n,l;s]}$$

eine Fundamentalfolge in $L_2(E_n)$, die gegen ein Element $w \in L_2(E_n)$ strebt. Für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(E_n)$ gilt vermöge partieller Integration

$$\int_{E_n} (D^{j\alpha} u_m)\varphi \, dx = (-1)^{|j\alpha|} \int_{E_n} u_m (D^{j\alpha} \varphi) \, dx,$$

woraus durch Grenzübergang $\int_{E_n} w\varphi \, dx = 0$ folgt; das bedeutet aber $w = 0$. Aus

$$\lim_{m\to\infty} \|D^{j\alpha} u_m\| = 0$$

folgt dann sofort

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{[n,l;s]} = 0.$$

Die Vervollständigung der Menge $C_0^\infty(E_n)$ in der Norm $\|\cdot\|_{[n,l;s]}$ kann somit in den Raum $L_2(E_n)$ eingebettet werden. Die Vervollständigung führt zu dem Hilbertraum $W_{[n,l;s]}(E_n)$,

$$W_{[n,l;s]}(E_n) \subset L_2(E_n),$$

der bei den folgenden Überlegungen als Grundraum gilt.

Gebraucht wird weiterhin die lineare Menge $S(E_n)$ der „schnell fallenden" Funktionen ([4, S. 18])

$$S(E_n) = \{\varphi | \varphi \in C^\infty(E_n), \sup_{x \in E_n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < \infty\}. \tag{6}$$

In (6) sind α und β beliebige Multiindizes. Es gilt folgender

Hilfssatz 1. *$S(E_n)$ liegt im Hilbertraum $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht.*

Beweis. Es genügt, die Inklusion

$$S(E_n) \subset W_{[n,l;s]}(E_n)$$

zu zeigen, denn es ist $C_0^\infty(E_n) \subset S(E_n)$ und $C_0^\infty(E_n)$ liegt in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht. Wenn $\psi(x) \in S(E_n)$ ist und $\chi(t)$ durch

$$\chi(t) \doteq \begin{cases} 1, & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0, & 2 \leqq t \\ \in C^\infty([0, \infty)) \end{cases} \tag{7}$$

definiert wird, so bilden die finiten Funktionen

$$\psi_\nu(x) = \chi\left(\frac{|x|}{\nu}\right)\psi(x), \qquad \nu = 1, 2, \dots,$$

eine Fundamentalfolge im Raum $W_{[n,l;s]}(E_n)$, was im folgenden gezeigt wird.

$$\|D^{j\alpha}\psi_\nu(x) - D^{j\alpha}\psi_\mu(x)\| = \left\| \sum_{j\varrho + j\sigma = j\alpha} c_{j\varrho} D^{j\varrho}\psi(x) . D^{j\sigma}\left[\chi\left(\frac{|x|}{\nu}\right) - \chi\left(\frac{|x|}{\mu}\right)\right]\right\|. \tag{8}$$

In (8) sind bei der Summation alle Möglichkeiten zu berücksichtigen, den Vektor ${}_j\alpha = ({}_j\alpha_1, \dots, {}_j\alpha_{n_j})$ als Summe der Vektoren

$${}_j\varrho = ({}_j\varrho_1, \dots, {}_j\varrho_{n_j}) \quad \text{und} \quad {}_j\sigma = ({}_j\sigma_1, \dots, {}_j\sigma_{n_j})$$
$$(0 \leqq {}_j\varrho_\lambda \leqq {}_j\alpha_\lambda, \; {}_j\varrho_\lambda + {}_j\sigma_\lambda = {}_j\alpha_\lambda; \quad \lambda = 1, \dots, n_j)$$

darzustellen. Auf der rechten Seite der Gleichung (8) verschwindet jeder Summand für $|x| \leqq \min(\nu, \mu)$, so daß für große Indizes ν, μ die rechte Seite beliebig klein wird, da $\Psi(x)$ zu $S(E_n)$ gehört. Somit folgt

$$\lim_{\nu,\mu \to \infty} \|\psi_\nu - \psi_\mu\|_{[n,l;s]} = 0.$$

In $W_{[n,l;s]}(E_n)$ strebt $\{\psi_\nu\}$ gegen ein bestimmtes Element ψ^*, welches wegen

$$\|\psi_\nu - \psi^*\| \leqq \|\psi_\nu - \psi^*\|_{[n,l;s]}$$

auch Grenzelement im Raum $L_2(E_n)$ ist. Aus $\lim_{\nu \to \infty} \|\psi_\nu - \psi\| = 0$ folgt dann $\Psi = \Psi^*$, was $\psi \in W_{[n,l;s]}(E_n)$ ergibt. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Hilfssatz 2. *Die Normen* $\|u\|_{[n,l;s]}$ *und*

$$\|u\|^*_{[n,l;s]} = \left(\|u\|^2 + \sum_{j=1}^{s} \sum_{r=1}^{n_j} \|D^{l_j}_{{}_jx_r} u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

sind äquivalent.

Beweis. Offensichtlich gilt

$$\|u\|^*_{[n,l;s]} \leqq \|u\|_{[n,l;s]}.$$

Für die Abschätzung in der anderen Richtung genügt es, für einen beliebigen Multiindex ${}_j\alpha$, $|{}_j\alpha| \leqq l_j$, und eine beliebige Funktion $u \in S(E_n)$ die Ungleichung

$$\|D^{{}_j\alpha} u\| \leqq c_1 \|u\| + c_2 \sum_{r=1}^{n_j} \|D^{l_j}_{{}_jx_r} u\| \tag{9}$$

zu beweisen, wobei es unwesentlich ist, die positiven Konstanten c_1 und c_2 möglichst scharf zu bestimmen. Die Abschätzung (9) kann mit Hilfe der Fouriertransformation

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-i(x,\xi)} \varphi(x)\, dx \tag{10}$$

leicht nachgewiesen werden. Dazu setzen wir

$$\begin{gathered} \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = ({}_1\xi_1, \ldots, {}_1\xi_{n_1}, {}_2\xi_1, \ldots, {}_2\xi_{n_2}, \ldots, {}_s\xi_1, \ldots, {}_s\xi_{n_s}) \\ {}_j\xi = ({}_j\xi_1, \ldots, {}_j\xi_{n_j}), \quad |{}_j\xi|^2 = \sum_{r=1}^{n_j} |{}_j\xi_r|^2, \quad {}_j\xi^{{}_j\alpha} = \prod_{r=1}^{n_j} {}_j\xi_r^{{}_j\alpha_r}. \end{gathered} \tag{11}$$

Für jeden (reellen) Vektor ξ und hinreichend große c_1 und c_2 gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |{}_j\xi^{{}_j\alpha}| &= |{}_j\xi_1|^{{}_j\alpha_1} \ldots |{}_j\xi_{n_j}|^{{}_j\alpha_{n_j}} \leqq |{}_j\xi|^{|{}_j\alpha|} \leqq c_1 + |{}_j\xi|^{l_j} \leqq \\ &\leqq c_1 + (|{}_j\xi_1| + \ldots + |{}_j\xi_{n_j}|)^{l_j} \leqq c_1 + c_2(|{}_j\xi_1|^{l_j} + \ldots + |{}_j\xi_{n_j}|^{l_j}). \end{aligned} \tag{12}$$

Da die Fouriertransformation (10) eine isometrische Abbildung vermittelt ([1, S. 78]), erhält man mit Hilfe von (12) die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \|D^{{}_j\alpha} u\| &= \|\widehat{D^{{}_j\alpha} u}(\xi)\| = \|{}_j\xi^{{}_j\alpha} \widehat{u}\| \leqq c_1 \|\widehat{u}\| + c_2 \sum_{r=1}^{n_j} \|{}_j\xi_r \widehat{u}\| = \\ &= c_1 \|u\| + c_2 \sum_{r=1}^{n_j} \|D^{l_j}_{{}_jx_r} u\|. \end{aligned}$$

Wir haben Anlaß, den Vektor $x \in E_n$ auf eine zweite Art zu zerlegen:

$$\begin{gathered} x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = ({}_{\bar{1}}x_1, \ldots, {}_{\bar{1}}x_{\bar{n}_1}, {}_{\bar{2}}x_1, \ldots, {}_{\bar{2}}x_{\bar{n}_2}, \ldots, {}_{\bar{t}}x_{\bar{n}_t}), \\ n = \bar{n}_1 + \ldots + \bar{n}_t, \quad {}_{\bar{k}}x = ({}_{\bar{k}}x_1, \ldots, {}_{\bar{k}}x_{\bar{n}_k}). \end{gathered} \tag{13}$$

Entsprechend wird

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad {}_{\bar k}\beta = ({}_{\bar k}\beta_1, \dots, {}_{\bar k}\beta_{\bar n_k}), \quad D^{\bar k\beta} = \prod_{r=1}^{\bar n_k} D^{\bar k\beta_r}_{\bar k x_r},$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = ({}_{\bar 1}\xi_1, \dots, {}_{\bar 1}\xi_{\bar n_1}, {}_{\bar 2}\xi_1, \dots, {}_{\bar 2}\xi_{\bar n_2}, \dots, {}_{\bar t}\xi_1, \dots, {}_{\bar t}\xi_{\bar n_t}),$$

(14) $$ {}_{\bar k}\xi = (\dots, {}_{\bar k}\xi_r^{\bar k\beta_r}, \dots)_{r=1\dots\bar n_k}, \quad {}_{\bar k}\xi^{\bar k\beta} = \prod_{r=1}^{\bar n_k} {}_{\bar k}\xi_r^{\bar k\beta_r},$$

$$|{}_{\bar k}\xi|^2 = ({}_{\bar k}\xi_1^2 + \dots + {}_{\bar k}\xi_{\bar n_k}^2), \qquad k = 1, 2, \dots, t,$$

gesetzt und der Differentialoperator

(15) $$A_k = \sum_{|\bar k\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar k\beta} D^{\bar k\beta}, \quad D(A_k) = S(E_n),$$

definiert. $D(A_k)$ ist das Definitionsgebiet von A_k. Die Koeffizienten $a_{\bar k\beta}$ sind reelle Konstanten und so gewählt, daß für jeden reellen Vektor ${}_{\bar k}\xi$ die Bedingung

(16) $$\sum_{|\bar k\beta| = 2m_k} a_{\bar k\beta}\, {}_{\bar k}\xi^{\bar k\beta} \geqq c_k |{}_{\bar k}\xi|^{2m_k}, \qquad c_k > 0, \quad k = 1, \dots, t,$$

erfüllt ist. Nach F. E. Browder ([2, S. 28]) heißt ein solcher Operator gleichmäßig stark elliptisch.

Unser eigentliches Interesse gilt aber dem hypoelliptischen Differentialoperator ([5])

(17) $$A = \sum_{k=1}^{t} A_k, \qquad D(A) = S(E_n),$$

der für alle (reellen) Vektoren ξ die Bedingung

(18) $$A(\xi) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{|\bar k\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar k\beta}\, {}_{\bar k}\xi^{\bar k\beta} \geqq c_0 > 0$$

erfüllen möge. Dann gilt folgender

Satz 1. *A ist positiv definit in* $W_{[n,l;s]}(E_n)$.

Beweis. $(Au, u)_{[n,l;s]} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{|j\alpha| \leqq l_j} (AD^{j\alpha}u, D^{j\alpha}u) =$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{|j\alpha| \leqq l_j} \left(\sum_{k=1}^{t} \sum_{|\bar k\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar k\beta}\, \xi^{\bar k\beta}\, \widehat{D^{j\alpha}u}, \widehat{D^{j\alpha}u} \right) \geqq$$

$$\geqq c_0 \sum_{j=1}^{s} \sum_{|j\alpha| \leqq l_j} \|D^{j\alpha}u\|^2 = c_0 \|u\|^2_{[n,l;s]}.$$

Satz 2. *A ist auf* $S(E_n)$ *wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis. Dazu zeigen wir, daß der Wertebereich $R(A)$ von A in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht liegt. Nach Hilfssatz 1 liegt $S(E_n)$ in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ dicht, so daß Satz 2 bewiesen ist, wenn nachgewiesen werden kann, daß die Lösung u der Differentialgleichung $Au=f$ in $S(E_n)$ liegt, sofern f zu $S(E_n)$ gehört. Das läßt sich mit Hilfe der Fouriertransformation leicht verifizieren. Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f liegt in $S(E_n)$, da diese Menge bei der Fouriertransformation auf sich abgebildet wird. Die Inverse der Fouriertransformation, die durch

$$\breve{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{19}$$

definiert wird, hat dieselbe Eigenschaft, so daß mit f auch $\breve{f}$ und deshalb wegen (18) auch $\breve{u} = \frac{\breve{f}}{A(\xi)}$ in $S(E_n)$ liegt. Aus $A(\xi)\breve{u} = \breve{f}$ entsteht durch Fouriertransformation $A\hat{\breve{u}} = f$, womit gezeigt ist, daß die Lösung $u = \hat{\breve{u}}$ ebenfalls in $S(E_n)$ liegt.

Der aus A durch Abschließung entstehende Operator $\bar{A}$ ist also selbstadjungiert; sein Wertebereich $R(\bar{A})$ ist mit $W_{[n,l;s]}(E_n)$ identisch,

$$R(\bar{A}) = W_{[n,l;s]}(E_n).$$

Der Definitionsbereich $D(\bar{A})$ von $\bar{A}$ entsteht aus $D(A) = S(E_n)$ durch Abschließung in der Metrik der energetischen Norm

$$|u|^2 = \|u\|^2_{[n,l;s]} + \|Au\|^2_{[n,l;s]}. \tag{20}$$

$D(\bar{A})$ soll im folgenden näher bestimmt werden. Zu diesem Zweck beweisen wir den

Hilfssatz 3. *Aus den Bedingungen* (16) *und* (18) *folgt*

$$A_k(\xi) = \sum_{|_{\bar{k}}\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar{k}\beta}\, \xi^{\bar{k}\beta} \geqq c'_k\, |_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}, \qquad c'_k > 0; \quad k = 1, \ldots, t. \tag{21}$$

Beweis. Für hinreichend große $|_{\bar{k}}\xi|$ $(|_{\bar{k}}\xi| \geqq \varrho_k)$ gilt

$$\Bigl| \sum_{|_{\bar{k}}\beta| < 2m_k} a_{\bar{k}\beta}\, \xi^{\bar{k}\beta} \Bigr| \leqq \frac{c_k}{2}\, |_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}.$$

Für solche Vektoren $_{\bar{k}}\xi$ gilt dann auch

$$\sum_{|_{\bar{k}}\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar{k}\beta}\, \xi^{\bar{k}\beta} \geqq \frac{c_k}{2}\, |_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}.$$

In der Kugel $|_{\bar{k}}\xi| \leqq \varrho_k$ ist nach der Bedingung (18) $A_k(\xi) \geqq c_0$. (man setze in (18) alle Komponenten von ξ bis auf $_{\bar{k}}\xi_1, \ldots, _{\bar{k}}\xi_{\bar{n}_k}$ gleich Null). Wählt man also

$$c'_k = \min\left(\frac{c_k}{2},\ c_0\, \varrho_k^{-2m_k}\right),$$

so folgt die Behauptung.

Wenn $\min_k c'_k = C$ gesetzt wird, folgt aus (21) durch Summation über k

$$A(\xi) \geqq C \sum_{k=1}^{t} |_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}, \qquad C > 0. \tag{22}$$

(22) wird in der folgenden Abschätzung benutzt. Wir verabreden an dieser Stelle, daß positive Konstanten, deren numerische Bestimmung unwesentlich ist, generell mit C bezeichnet werden sollen. In diesem Sinne gilt die folgende Abschätzung, wobei $u \in S(E_n)$ sei:

$$\begin{aligned}
|u|^2 &= \|u\|^2_{[n,l;s]} + \|Au\|^2_{[n,l;s]} \geqq C\{\|u\|^{*2}_{[n,l;s]} + \|Au\|^{*2}_{[n,l;s]}\} \geqq \\
&\geqq C\left\{\|u\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j} \|D^{l_j}_{jx_r}(Au)\|^2\right\} = \\
&= C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j} \left\| {}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{|_{\bar{k}}\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar{k}\beta}\,\xi^{\bar{k}\beta}\,\hat{u}\right)\right\|^2\right\} \geqq \\
&\geqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j} \left\| {}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t} |_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}\right)\right\|^2\right\}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Es folgt die Abschätzung nach oben, wobei wieder Hilfssatz 2 verwendet wird

$$\begin{aligned}
|u|^2 &\leqq C\{\|u\|^{*2}_{[n,l;s]} + \|Au\|^{*2}_{[n,l;s]}\} = \\
&= C\left\{\|u\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\|D^{l_j}_{jx_r}u\|^2 + \|Au\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\|D^{l_j}_{jx_r}(Au)\|^2\right\} \leqq \\
&\leqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\|{}_j\xi_r^{l_j}\hat{u}\|^2 + \left\|\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{|_{\bar{k}}\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar{k}\beta}\,\xi^{\bar{k}\beta}\right)\hat{u}\right\|^2 + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\left\|{}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{|_{\bar{k}}\beta| \leqq 2m_k} a_{\bar{k}\beta}\,\xi^{\bar{k}\beta}\right)\hat{u}\right\|^2\right\} \leqq \\
&\leqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\|{}_j\xi_r^{l_j}\hat{u}\|^2 + \left\|\left(\sum_{k=1}^{t}|_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}\right)\hat{u}\right\|^2 + \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\left\|{}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t}|_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}\right)\hat{u}\right\|^2\right\} \leqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\left\|{}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t}|_{\bar{k}}\xi|^{2m_k}\right)\hat{u}\right\|^2\right\}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Die Fouriertransformation (10) und ihre Inverse (19) werden durch lineare Operatoren F bzw. F^{-1} ausgeführt. Beide Operatoren sind zunächst auf $S(E_n)$ erklärt. Schließt man sie ab, so fällt ihr Definitionsgebiet jeweils mit dem Hilbertraum $L_2(E_n)$ zusammen. In diesem Sinne kann also jedes Element $u \in L_2(E_n)$ der Fouriertransformation unterworfen werden. Vergleicht man die Abschätzungen (23) und (24), so kann folgender Satz ausgesprochen werden.

Satz 3. *u gehört genau dann zu* $D(\bar{A})$, *wenn*

$$ {}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t} |{}_k\xi|^{2m_k}\right)\hat{u}\in L_2(E_n) $$

für alle $j(1\leqq j\leqq s)$ *und* $r(1\leqq r\leqq n)$ *gilt.*

Die Darstellungen von $n = n_1+n_2+\ldots+n_s$ und $n = \bar{n}_1+\bar{n}_2+\ldots+\bar{n}_t$ von n definieren zwei Zerlegungen

$$ E_n = \sum_{j=1}^{s}\oplus E_{n_j} $$

und

$$ E_n = \sum_{k=1}^{t}\oplus E_{\bar{n}_k} $$

von E_n und entsprechend zwei Zerlegungen

$$ (1, n_1, n_1+n_2, \ldots, n_1+\ldots+n_s = n) $$

und

$$ (1, \bar{n}_1, \bar{n}_1+\bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_1+\ldots+\bar{n}_t = n) $$

des Intervalls $[1, n]$. Die Summe dieser Zerlegungen definiert eine neue Zerlegung

$$ (1, \tilde{n}_1, \tilde{n}_1+\tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_1+\ldots+\tilde{n}_p), \quad E_n = \sum_{l=1}^{p}\oplus E_{\tilde{n}_l}. $$

Das Indexbild

$$ \begin{matrix} l_1 \ldots l_s \\ n_1 \ldots n_s \end{matrix} = [n, l; s] $$

von $W_{[n,l;s]}(E_n)$ definiert eine Funktion über dem Intervall $[1, n]$, die in den diskreten Punkten $1, 2, \ldots, n$ erklärt ist und die s Werte $l_1, \ldots, l_s$ annimmt. Entsprechend definiert das Indexbild

$$ \begin{matrix} 2m_1 & 2m_2 & \ldots & 2m_t \\ \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \ldots & \bar{n}_t \end{matrix} = [\bar{n}, 2m; t] $$

eine solche Funktion. Die Summe dieser Funktionen wird durch das Indexbild

$$ \begin{matrix} 2m_1+l_1 & \ldots & 2m_t+l_s \\ \tilde{n}_1 & \ldots & \tilde{n}_p \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{l}_1 \ldots \tilde{l}_p \\ \tilde{n}_1 \ldots \tilde{n}_p \end{matrix} = [\tilde{n}, \tilde{l}; p] $$

dargestellt. Wir schreiben

$$ (25) \quad \begin{matrix} l_1 \ldots l_s \\ n_1 \ldots n_s \end{matrix} + \begin{matrix} 2m_1 \ldots 2m_t \\ \bar{n}_1 \ldots \bar{n}_t \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{l}_1 \ldots \tilde{l}_p \\ \tilde{n}_1 \ldots \tilde{n}_p \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad [n, l; s]+[\bar{n}, 2m; t] = [\tilde{n}, \tilde{l}; p]. $$

Die so definierte Summe führt zu dem Hilbertraum

$$ W_{[n,l;s]+[\bar{n},2m;t]}(E_n) = W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n), $$

der in $W_{[n,l;s]}(E_n)$ eingebettet ist. Setzt man in (23) die Abschätzungen nach unten weiter fort, so erhält man

$$|u|^2 \geqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{n_j}\left\|\,{}_j\xi_r^{l_j}\left(\sum_{k=1}^{t}|{}_k\xi|^{2m_k}\right)\right\|^2\right\} \geqq$$

$$(26) \qquad \geqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \left\|{}_{\tilde{1}}\xi_1^{2m_1+l_1}\hat{u}\right\|^2 + \ldots + \left\|{}_{\tilde{1}}\xi_{\tilde{n}_1}^{2m_1+l_1}\hat{u}\right\|^2 + \ldots + \left\|{}_{\tilde{p}}\xi_{\tilde{n}_p}^{2m_t+l_s}\hat{u}\right\|^2\right\} =$$

$$= C\left\{\|u\|^2 + \left\|D_{\tilde{1}x_1}^{2m_1+l_1}U\right\|^2 + \ldots + \left\|D_{\tilde{p}x_{\tilde{n}_p}}^{2m_t+l_s}u\right\|^2\right\} \geqq C\left\|u\right\|_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}^2 .$$

Das bedeutet aber, daß $D(\bar{A})$ in $W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n)$ enthalten ist.
Es gilt darüber hinaus folgender

Satz 4.

$$W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n)$$

ist der Durchschnitt aller W-Räume $W_{[\nu,\mu;r]}(E_n)$, die $D(\bar{A})$ enthalten, $[\nu,\mu;r] = \dfrac{\mu_1\ldots\mu_r}{\nu_1\ldots\nu_r}$.

Beweis. Jeder Raum $W_{[\nu,\mu;r]}(E_n)$ kann in der Form $W_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(E_n)$ geschrieben werden, wobei die λ mit den μ und ν wie folgt zusammenhängen:

$$(27) \qquad \begin{gathered}\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_1, \ldots, \quad \lambda_{\nu_1} = \mu_1, \quad \lambda_{\nu_1+1} = \mu_2, \ldots, \quad \lambda_{\nu_1+\nu_2} = \mu_2, \ldots, \\ \lambda_{n-\nu_r+1} = \mu_\nu, \ldots, \quad \lambda_n = \mu_r .\end{gathered}$$

Der Durchschnitt der Räume $W_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(E_n)$ und $W_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}(E_n)$ ist offenbar $W_{\sigma_1\ldots\sigma_n}(E_n)$, wobei $\sigma_i = \max(\varkappa_i, \lambda_i)$ ist $(i=1, \ldots, n)$. $W_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(E_n)$ enthalte $D(\bar{A})$, und

$$W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n)$$

sei in $W_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(E_n)$ nicht enthalten. Dann ist der Durchschnitt

$$W_{\lambda_1'\ldots\lambda_n'}(E_n) = W_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(E_n) \cap W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n),$$

der $D(\bar{A})$ ebenfalls enthält, echt in

$$W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n) = W_{\substack{\tilde{l}_1\ldots\tilde{l}_p \\ \tilde{n}_1\ldots\tilde{n}_p}}(E_n)$$

enthalten. Es existiert also ein λ_j' $(1 \leqq j \leqq n)$, das größer als die entsprechende Zahl $2m_{\alpha(j)} + l_{\beta(j)}$ ist, woraus folgt, daß $W_{\lambda_1'\ldots\lambda_n'}(E_n)$ die Menge $D(\bar{A})$ nicht enthalten kann, wie folgendes Beispiel zeigt. Wir definieren das Gebiet

$$\Omega_j = \{\xi : |\xi_k| \leqq 1 \quad \text{für} \quad k \neq j \quad \text{und} \quad 1 \leqq \xi_j < \infty\}$$

und die Funktion

$$\hat{U}(\xi) = \begin{cases}\xi_j^{-2m_{\alpha(j)} - l_{\beta(j)} - 1}, & \text{wenn} \quad \xi \in \Omega_j \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Wie man leicht sieht, gehört die Fourierinverse $F^{-1}[\widehat{U}(\xi)] = U(x)$ zu $D(\bar{A})$ (vergl. (26)), dagegen nicht zu $W_{\lambda_1'\ldots\lambda_n'}(E_n)$.

Im Falle $l_1 = \ldots = l_s = l$ und $2m_1 = 2m_2 = \ldots = 2m_t = 2m$ ist der Sobolewsche Raum $W_{\underset{n}{l}}(E_n)$, der üblicherweise mit $W_2^l(E_n)$ bezeichnet wird, der Grundraum, und der Differentialoperator A hat die Gestalt

$$A = \sum_{|\beta| \leqq 2m} a_\beta D^\beta. \tag{28}$$

Die Gleichung (25) heißt dann $\frac{l}{n} + \frac{2m}{n} = \frac{2m+l}{n}$, so daß $D(\bar{A}) \subset W_{\underset{n}{2m+l}}(E_n)$ gilt. Andererseits folgt mit Hilfe von (24) die Abschätzung

$$|u|^2 \leqq C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{r=1}^{n} \|\xi_r^l |\xi|^{2m} \hat{u}\|^2\right\} \leqq$$

$$C\left\{\|\hat{u}\|^2 + \sum_{r=1}^{n} \|\xi_r^{2m+l} \hat{u}\|^2\right\} \leqq C\|u\|^2_{\underset{n}{2m+l}},$$

so daß folgender Satz bewiesen ist.

Satz 5. *Im Falle $l_1 = \ldots = l_s = l$ und $2m_1 = \ldots = 2m_t = 2m$ ist*

$$D(\bar{A}) = W_{\underset{n}{2m+l}}(E_n).$$

$\bar{A}$ ist selbstadjungiert und nach Satz 1 positiv definit, so daß der Umkehroperator $\bar{A}^{-1}$ existiert. Ist $f \in W_{[n,l;s]}(E_n)$, so folgt aus der Gleichung $\bar{A}u = f$ nach Satz 4 für die Lösung u sofort

$$u \in W_{[n,l;s]+[\bar{n},2m;t]}(E_n).$$

Satz 6. *Es sei $f \in W_{[n,l;s]}(E_n)$. Die Gleichung $\bar{A}u = f$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung u, die im Raum*

$$W_{[n,l;s]+[\bar{n},2m;t]}(E_n) = W_{[\tilde{n},\tilde{l};p]}(E_n)$$

liegt.

Bemerkung. Nach den Einbettungssätzen von Sobolew ([6]) ist die Lösung u von $\bar{A}u = f$, wobei A der gleichmäßig stark elliptische und positiv definite Operator (28) ist und f zu $W_{\underset{n}{l}}(E_n)$ gehört, r mal stetig differenzierbar, sofern r durch $0 \leqq r < 2m + l - \frac{n}{2}$ eingeschränkt ist.

Zum Abschluß untersuchen wir das Spektrum $S_{\bar{A}}$ von $\bar{A}$. Die Konstante c_0 in (18) sei das Infimum von $A(\xi)$. Dann gilt

Satz 7. *$\bar{A}$ besitzt keine Eigenwerte, und das stetige Spektrum $C_{\bar{A}}$ von $\bar{A}$ stimmt mit dem Wertebereich von $A(\xi)$ überein, $C_{\bar{A}} = [c_0, \infty)$.*

Beweis. u sei Eigenfunktion von $\bar{A}$ und λ der zugehörige Eigenwert. Aus $\bar{A}u = \lambda u$ folgt durch Fouriertransformation $\widehat{\bar{A}u} = \lambda \hat{u}$, d.h.

$$A(\xi)\hat{u} = \lambda \hat{u}.$$

Daraus folgt aber $\hat{u} = 0$ und daher $u = 0$.

μ gehöre nicht zum Wertebereich von $A(\xi)$. Da dieser mit $[c_0, \infty)$ zusammenfällt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $A(\xi) - \mu \geqq \varepsilon > 0$ für alle ξ gilt und wie folgt abgeschätzt werden kann.

$$\|(\bar{A} - \mu E) u\|^2_{[n,l;s]} \geqq$$

$$\geqq C \left\{ \sum_{j=1}^{s} \sum_{r=1}^{n_j} \left\| \left(\sum_{k=1}^{t} \sum_{|_k\beta| \leqq 2m_k} a_{_k\beta}\, \xi^{_k\beta} - \mu \right) {}_j\xi_r^{l_j} \hat{u} \right\|^2 + \left\| \left(\sum_{k=1}^{t} \sum_{|_k\beta| \leqq 2m_k} a_{_k\beta}\, \xi^{_k\beta} - \mu \right) \hat{u} \right\|^2 \right\} \geqq$$

$$\geqq C\varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^{s} \sum_{r=1}^{n_j} \| {}_j\xi_r^{l_j} \hat{u} \|^2 + \|\hat{u}\|^2 \right\} \geqq C \|u\|^2_{[n,l;s]}.$$

μ ist also ein regulärer Punkt von $\bar{A}$.

Liegt andererseits μ im Wertebereich von $A(\xi)$, so gehört es zum stetigen Spektrum $C_{\bar{A}}$ von $\bar{A}$. Es sei $\mu = A(\zeta)$. Um eine Weylsche Folge für μ zu konstruieren, betrachten wir eine Folge von Kugeln K_ν im ξ-Raum E_n, die sich nicht schneiden und bei $\xi = \zeta$ häufen. ζ_ν sei der Mittelpunkt und ε_ν der Radius von K_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Die Funktionen

$$\chi_\nu(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - \zeta_\nu| \leqq \dfrac{\varepsilon_\nu}{2} \\[2ex] 0, & |\xi - \zeta_\nu| > \dfrac{\varepsilon_\nu}{2} \end{cases}$$

werden mit Hilfe des Sobolewschen Kerns ([6]) gemittelt, wobei der Mittelungsradius jeweils $\frac{\varepsilon_\nu}{2}$ betrage. $\hat{u}_\nu(\xi)$ sei die gemittelte Funktion von $\chi_\nu(\xi)$; sie verschwindet außerhalb K_ν. Für die Fourierinversen $v_\nu(x)$ der normierten Funktionen

$$\hat{v}_\nu(\xi) = \hat{u}_\nu(\xi) \left\{ \sum_{j=1}^{s} \sum_{|_j\alpha| \leqq l_j} \| {}_j\xi^{_j\alpha} \hat{u}_\nu(\xi) \|^2 \right\}^{-1}$$

gilt dann wegen der Isometrie der Fouriertransformation

$$(v_\nu(x), v_\mu(x))_{[n,l;s]} = \delta_{\nu\mu} \qquad \text{(Kroneckersymbol).}$$

Die Menge der $v_\nu(x)$ ist demnach nicht relativ kompakt, und es bleibt zu zeigen, daß

$$\|\bar{A} v_\nu - \mu v_\nu\|_{[n,l;s]}$$

für $\nu \to \infty$ gegen Null strebt. Nach Konstruktion verschwindet die Funktion $\hat{v}_\nu(\xi)$ außerhalb der Kugel K_ν. Setzt man

$$\max_{\xi \in K_\nu} |A(\xi) - \mu| = \delta_\nu,$$

so kann wie folgt abgeschätzt werden

$$\|\bar{A}v_\nu - \mu v_\nu\|^2_{[n,l;s]} \leqq$$

$$\leqq C \sum_{j=1}^{s} \sum_{|_j\alpha| \leqq l_j} \left\| \left(\sum_{k=1}^{t} \sum_{|_k\beta| \leqq 2m_k} a_{_k\beta\, k}\xi^{_k\beta} - \mu \right) {}_j\xi^{_j\alpha} \hat{v}_\nu \right\|^2 \leqq$$

$$\leqq C\delta_\nu^2 \sum_{j=1}^{s} \sum_{|_j\alpha| \leqq l_j} \|\xi^{_j\alpha} \hat{v}_\nu\|^2 \leqq C\delta_\nu^2 \|v_\nu\|^2_{[n,l;s]} = C\delta_\nu^2.$$

Da wegen der Stetigkeit von $A(\xi)$ mit $\varepsilon_\nu \to 0$ auch $\delta_\nu \to 0$ strebt, erweist sich $\{v_\nu\}$ als Weylsche Folge für μ, so daß der Satz 7 bewiesen ist.

Literatur

[1] N. J. Achieser—J. M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum, *Berlin*, 1965.

[2] F. E. Browder, On the spectral theory of elliptic differential operators I., *Math. Ann.* **142** (1961), 22—130.

[3] J. M. Gelfand—G. E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) II. *Berlin*, 1964.

[4] L. Hörmander, Linear partial differential operators, *Berlin*, 1963.

[5] V. P. Il'in, Eigenschaften gewisser Klassen differenzierbarer Funktionen mehrerer Veränderlicher, die in einem n-dimensionalen Gebiet vorgegeben sind. (russisch) *Moskva*, 1962.

[6] S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, *Berlin*, 1964.

[7] H. Triebel, Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren. *Math. Z.* **90** (1965), 325—338.

[8] K. Yosida, Funktional Analysis, *Berlin*, 1965.

(Eingegangen am 13. Juli 1967.)