Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises

Von WOLFGANG SCHWARZ (Freiburg)[1]

1. Einleitung. Sei $E=\{z\in C, |z|\leqq 1\}$ der abgeschlossene Einheitskreis der komplexen Zahlebene C, $E^\circ=\{z, |z|<1\}$ sein Inneres. Die komplexe Zahl $\zeta\in E^\circ$, $\zeta\neq 0$, sei vorgegeben. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_\zeta(w) = (w-\zeta)(1-\bar{\zeta}w)^{-1} \tag{1.1}$$

eine bijektive Abbildung von E auf sich mit der Umkehrabbildung[2])

$$\Phi_\zeta^{-1}(z) = (z+\zeta)(1+\bar{\zeta}z)^{-1} \tag{1.2}$$

TURÁN [8] zeigte mit Hilfe des Satzes von Toeplitz—Schur aus der Limitierungstheorie, daß es in E° holomorphe Funktionen f gibt, deren Potenzreihe $\Sigma\, a_n z^n$ in $z=1$ konvergiert, wogegen die Taylorreihe $\Sigma b_n(\zeta)w^n$ von $f_\zeta^*=f\circ\Phi_\zeta$ im Punkte

$$w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1) = (1+\zeta)(1+\bar{\zeta})^{-1}$$

divergiert. [3])

Dieser Satz ist überraschend, weil f und f^* — die durch eine konforme Abbildung des Einheitskreises auseinander hervorgehen — in passenden Umgebungen von 1 bzw. w_0 dieselben Werte annehmen; aber trotzdem haben ihre Potenzreihen in 1 bzw. w_0 verschiedenes Konvergenzverhalten. Der Begriff „Konvergenz" bleibt also bei konformen Abbildungen nicht notwendig invariant.

In mehreren Arbeiten ([1a], [1c], [2]) behandelte ALPÁR ähnliche Probleme, wobei Konvergenz durch (C, k) — Summierbarkeit oder durch absolute Konvergenz ersetzt wurde.

CLUNIE [4] verschärfte Turán's Ergebnis, indem er ein Beispiel einer in E° holomorphen, in ganz *E stetigen* Funktion f gab, deren Potenzreihe in $z=1$ konvergiert, für die aber die Maclaurinreihe von $f_\zeta^*=f\circ\Phi_\zeta$ im Punkte $w_0=\Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergiert.

In dieser Note soll unter Benutzung der Hilfssätze von Clunie das Ergebnis von Clunie mit Hilfe des Satzes von Banach—Steinhaus hergeleitet werden und

---

[1]) Für kritische Bemerkungen danke ich Herrn DR. J. SPILKER und Dr. F. FLOHR.

[2]) Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir den Index ζ weglassen.

[3]) HALÁSZ [5] zeigte die Existenz einer solchen Funktion f, für die $\Sigma b_n(\zeta)\cdot(\Phi^{-1}(1))^n$ für alle $\zeta\in E^\circ$, $\zeta\neq 0$, divergiert.

etwas verschärft werden. [4]) Mit derselben Methode kann auch Turán's Ergebnis gewonnen werden (vgl. § 6).

2. Banachräume. Sei cs der lineare Raum (über $\boldsymbol{C}$) aller in E° holomorphen Funktionen f, deren Potenzreihe $\Sigma a_n z^n$ im Punkte 1 konvergiert. Mit der Norm

$$\|f\|_{cs} = \sup_N \Big|\sum_{n \leqq N} a_n\Big| \tag{2. 1}$$

wird cs ein Banachraum ([7], S. 201, Problem 1). Weiter sei

$$CA = \{f\colon E \to \boldsymbol{C},\ \ f \text{ holomorph in } E^\circ, f \text{ stetig in } E\};$$

unter der Norm der gleichmäßigen Konvergenz

$$\|f\|_u = \sup_{|z| \leqq 1} |f(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)| \tag{2. 2}$$

wird CA ein Banachraum ([7], S. 103, e)).

Sei cCA der lineare Raum aller in E stetigen Abbildungen $f\colon E \to \boldsymbol{C}$, die in E° holomorph sind und deren Taylorreihe $\Sigma a_n z^n$ im Punkte $z=1$ konvergiert. Mit der Norm

$$\|f\| = \|f\|_u + \|f\|_{cs} \tag{2. 3}$$

wird cCA ein normierter Raum.

Lemma 1. *Unter der Norm* (2. 3) *ist cCA ein Banachraum.*

Beweis. Sei $\{f_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ mit $f_j(z) = \Sigma a_{n,j} z^n$ eine $\|\cdot\|$-Cauchyfolge von Elementen aus cCA; dann ist $\{f_j\}$ erst recht eine Cauchyfolge bezüglich der Norm (2. 1). Wegen der Vollständigkeit des Raumes cs existiert eine in E° holomorphe Funktion g mit

$$g(z) = \sum a_n z^n, \quad \sum a_n \quad \text{konvergent}, \quad \|g - f_j\|_{cs} \to 0 \quad \text{für} \quad j \to \infty. \tag{2. 4}$$

Andererseits ist $\{f_j\}$ auch eine $\|\cdot\|_u$-Cauchyfolge; wegen der Vollständigkeit des Raumes CA existiert eine Funktion f mit

$$f \in CA, \quad \|f - f_j\|_u \to 0 \quad \text{für} \quad j \to \infty. \tag{2. 5}$$

Wir zeigen nun, daß für $0 < x \leqq \frac{1}{2}$

$$f(x) = g(x) \qquad (0 < x \leqq \tfrac{1}{2}), \tag{2. 6}$$

also $f \in cCA$ ist, und daß

$$\|f - f_j\| \to 0 \quad \text{für} \quad j \to \infty \tag{2. 7}$$

gilt.

Sei also $0 < x \leqq \frac{1}{2}$. Dann ist mit $d_{n,j} := a_n - a_{n,j}$

$$g(x) - f_j(x) = \sum_n d_{n,j} x^n;$$

[4]) Die Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus wird nahegelegt durch die ins Auge springende Analogie unserer Problemstellung zu Fourierreihen stetiger Funktionen (man vgl. etwa Rudin [6], S. 98—103).

wegen (2. 4) und der Normdefinition (2. 1) strebt $\sup_N |\sum_{n\leqq N} d_{n,j}|$ gegen Null für $j\to\infty$. Bei gegebenem $\varepsilon>0$ ist also $|\sum_{n\leqq N} d_{n,j}|\leqq\varepsilon$ für alle N, wenn nur $j\geqq j_0(\varepsilon)$ ist. Abelsche Summation gibt für $0<x\leqq\frac{1}{2}$ und $j\geqq j_0(\varepsilon)$:

$$|\sum_n d_{n,j}x^n| = \left|\int_0^\infty \Big(\sum_{n<u} d_{n,j}\Big)\log x\cdot x^u\,du\right| \leqq \varepsilon\int_0^\infty |\log x|\cdot x^u\,du \leqq \varepsilon.$$

Ist also $j\geqq j_0(\varepsilon)$, so gilt für alle x mit $0<x\leqq\frac{1}{2}$

$$|g(x)-f_j(x)|\leqq\varepsilon,$$

und

$$|f(x)-g(x)|\leqq|f(x)-f_j(x)|+|g(x)-f_j(x)|\leqq\|f-f_j\|_u+\varepsilon\leqq 2\varepsilon,$$

falls j genügend groß ist. Damit ist (2. 6) gezeigt; demnach hat nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen f die Taylorentwicklung $f(z)=\Sigma a_n z^n$, und es ist $f\in cCA$ (wegen (2. 4) und (2. 5)). Weiter ist für genügend großes j

$$\|f-f_j\| = \|f-f_j\|_u+\|f-f_j\|_{cs}\leqq\varepsilon+\|f-f_j\|_{cs}$$

(wegen (2. 5)); beachtet man, daß f und g dieselbe Reihenentwicklung haben, so ist $\|f-f_j\|_{cs}=\|g-f_j\|_{cs}$, also ist (nach (2. 4)) für genügend großes j

$$\|f-f_j\|\leqq 2\varepsilon,$$

und (2. 7) ist gezeigt und damit die Vollständigkeit von cCA.

3. Hilfssätze. Der wichtigste Hilfssatz für den Beweis von Satz 1 ist das von Clunie ([4], S. 166) gezeigte

Lemma 2. *Sei h eine im Kreise $|z|<R$ (mit $R>1$) holomorphe Funktion mit $h(1)=0$. Sei ζ mit $0<|\zeta|<1$ gegeben und*

$$\varphi=\varphi(\zeta)=\arg w_0=\arg\{(1+\zeta)(1+\bar\zeta)^{-1}\}. \tag{3. 1}$$

Ist m größer als eine nur von h und ζ abhängige Schranke, so sind die Partialsummen der Maclaurinreihe von

$$(\Phi^{-1}(z))^m\cdot h(e^{-i\varphi}\cdot\Phi^{-1}(z))$$

an der Stelle $z=1$ absolut durch eine nur von ζ abhängige Konstante $M(\zeta)$ beschränkt.

Lemma 3. (vgl. [4], S. 167). *Die Fejérpolynome*

$$h_k(z):=\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k-1}+\ldots+\frac{z^k}{1}-\frac{z^{k+2}}{1}-\ldots-\frac{z^{2k+1}}{k} \tag{3. 2}$$

haben folgende Eigenschaften:

a) *Es existiert eine absolute Konstante M mit $|h_k(z)|\leqq M$ für alle $z\in E$ und alle $k=1,2,\ldots$.*

b) $h_k(1)=0$.

c) *Die k-te Partialsumme von $h_k(z)$ bei $z=1$ ist größer als* $\log k$.

b) und c) sind klar; a) folgt aus der Beschränktheit der Partialsummen der Fourierreihe $\Sigma k^{-1}\sin kx$.

Satz von Banach—Steinhaus (vgl. [6]). *Sei F ein Banachraum, Y ein normierter linearer Raum, und Λ_α ($\alpha \in \mathrm{A}$) eine Familie beschränkter linearer Abbildungen von F in Y. Entweder existiert dann eine Konstante $K < \infty$ mit*

$$(3.3) \qquad \|\Lambda_\alpha\| \leqq K \quad \textit{für alle}^{5)}\ \alpha \in \mathrm{A},$$

oder es existiert eine dichte G_δ-Menge [6]) $G \subset F$ *mit*

$$(3.4) \qquad \sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \|\Lambda_\alpha f\|_Y = \infty \quad \textit{für alle} \quad f \in G.$$

Lemma 4. (vgl. [6]). *In einem metrischen Raum ohne isolierte Punkte ist eine dichte G_δ-Menge nicht-abzählbar.*

4. Der Satz von Clunie. Sei $f \in cCA$; mit (1. 1) setzen wir

$$(4.1) \qquad f^*(w) = f(\Phi(w)) = \sum b_n(\zeta) w^n;$$

diese Potenzreihe konvergiert in E°. Wir bilden mit

$$(4.2) \qquad w_0 = \Phi^{-1}(1) = e^{i\varphi}$$

(vgl. (3. 1)) die Partialsummen

$$(4.3) \qquad s_N(w_0, f^*) = \sum_{n \leqq N} b_n(\zeta) w_0^n$$

und definieren für $N = 1, 2, \ldots$ die Abbildungen $\Lambda_N \colon cCA \to \mathbf{C}$ durch

$$(4.4) \qquad \Lambda_N f = s_N(w_0, f^*).$$

Offenbar sind die Λ_N lineare Abbildungen des Banachraumes cCA in den normierten Raum $\mathbf{C}$. Die Λ_N sind *beschränkt*; denn es ist

$$|\Lambda_N f| = \Big|\sum_{n \leqq N} b_n w_0^n\Big| = \Big|\sum_{n \leqq N} (2\pi i)^{-1} \int_\gamma f^*(w) w_0^n w^{-n-1}\, dw\Big|,$$

wobei über den Kreis $\gamma \colon |w| = \frac{1}{2}$ (im positiven Sinn) integriert wird. Wegen $|f^*(w)| = |f(\Phi(w))| \leqq \|f\|_u$ und $|w_0| = 1$ ist

$$|\Lambda_N f| \leqq (2\pi)^{-1} \sum_{n \leqq N} \|f\|_u (\tfrac{1}{2})^{-n-1} \pi \leqq 2^{N+1} \|f\|_u \leqq 2^{N+1} \|f\|,$$

also ist

$$(4.5) \qquad \|\Lambda_N\| \leqq 2^{N+1}.$$

Der Satz von Banach—Steinhaus ist damit anwendbar. Es soll noch die Alternative (3. 3) ausgeschlossen werden. Wir betrachten die mit Hilfe der Fejérpolynome (3. 2) gebildete Funktion

$$H_k(z) := h_k(e^{-i\varphi} \cdot \Phi^{-1}(z)) \cdot (\Phi^{-1}(z))^{m(k)},$$

[5]) $\|\Lambda\| := \sup_{f \in F, f \neq 0} \{\|f\|_F^{-1} \cdot \|\Lambda f\|_Y\}$.

[6]) Eine G_δ-Menge ist Durchschnitt von höchstens abzählbar vielen offenen Mengen.

wobei $m(k)$ noch passend bestimmt wird. Wegen (3. 2) ist H_k eine rationale Funktion von z, die holomorph in E ist. Damit ist $H_k \in cCA$. Wegen Lemma 3, a) ist, unabhängig von $m(k)$,

$$\|H_k\|_u = \|h_k\|_u \leqq M; \tag{4.6}$$

wird $m(k)$ größer als eine nur von k und ζ abhängige Schranke gewählt, so ist nach Lemma 2 mit einer nur von ζ abhängigen Konstanten $M(\zeta)$

$$\|H_k\|_{cs} \leqq M(\zeta). \tag{4.7}$$

Nach (4. 6) und (4. 7) ist (mit den Konstanten aus Lemma 2 und 3)

$$\|H_k\| \leqq M + M(\zeta).$$

Beachtet man nun, daß

$$H_k^*(w) := H_k(\Phi(w)) = w^{m(k)} \cdot h_k(e^{-i\varphi} w)$$

st, so erhält man mit (4. 4), (4. 2) und Lemma 3, c) die Abschätzung

$$\frac{|\Lambda_{k+m(k)} H_k|}{\|H_k\|} \geqq \frac{|s_{k+m(k)}(e^{i\varphi}, H_k^*)|}{M+M(\zeta)} \geqq \frac{\log k}{M+M(\zeta)}.$$

Somit ist $\sup\limits_k \|\Lambda_k\| = \infty$, und im Satz von Banach—Steinhaus trifft die zweite Alternative (3. 4) zu. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Zu jedem ζ mit $0<|\zeta|<1$ existiert eine in cCA dichte G_δ-Menge $G(\zeta) \subset cCA$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $f \in G(\zeta)$ ist die Potenzreihe $\Sigma\, b_n(\zeta) w^n$ für $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ an der Stelle $w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergent* [7]*, wogegen die entsprechende Potenzreihe $\Sigma a_n z^n$ für f an der Stelle 1 konvergiert.*

Bemerkung. Für jedes $f \in G(\zeta)$ ist der Punkt 1 eine singuläre Stelle. Wäre nämlich f holomorph in 1, so auch f^* in $w_0 = \Phi^{-1}(1)$; da $\Sigma |b_n(\zeta)|^2 \leqq \|f^*\|_u^2 = \|f\|_u^2$ ist, also $b_n(\zeta) \to 0$ geht (für $n \to \infty$), müßte nach dem Satz von M. Riesz [vgl. etwa E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Göttingen 1929, § 18] die Reihe $\Sigma b_n(\zeta) \cdot w_0^n$ konvergieren.

Zusatz. Geht man vom Banachraum $c_0CA = \{f \in cCA \text{ mit } f(1) = 0\}$ (mit der Norm (2. 3)) aus, so gilt Satz 1 wörtlich, wenn man in der Formulierung von Satz 1 jeweils cCA durch c_0CA ersetzt.

5. Eine Verschärfung. Satz 1 kann leicht verschärft werden. Man gebe sich höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Punkte $\zeta_1', \zeta_2', \ldots \in E^\circ$ vor; weiter wähle man abzählbar viele von Null verschiedene Punkte $\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots \in E^\circ$, die in der durch den gewöhnlichen Absolutbetrag gegebenen Topologie dicht in E liegen [8]; die Vereinigung der beiden Folgen ist die abzählbare Folge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$. Zu jedem dieser ζ_n existiert nach Satz 1 eine dichte G_δ-Menge $G_n \subset cCA$ mit der Eigenschaft,

[7]) Genauer ist $\sup\limits_N |\sum\limits_{n \leqq N} b_n(\zeta) \cdot w_0^n| = \infty$.

[8]) Man nehme etwa die Punkte $z = x + iy \neq 0$ aus E° mit rationalen Koordinaten x, y.

daß die Potenzreihe für $f_{\zeta_n}^* = f \circ \Phi_{\zeta_n}$ für alle $f \in G_n$ an der Stelle $\Phi_{\zeta_n}^{-1}(1)$ divergiert. Wir bilden die Menge

$$G = \bigcap_1^\infty G_n. \tag{5. 1}$$

Bekanntlich ist G als Durchschnitt von abzählbar vielen dichten G_δ-Mengen wieder eine dichte G_δ-Menge (man vgl. etwa [6], S. 97). Für jedes $f \in G$ ist nach Satz 1, wobei φ durch (3. 1) definiert ist,

$$S(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*) := \sup_n |s_n(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*)| = \infty \tag{5. 2}$$

für alle $\zeta = \zeta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Sei nun $f \in G$ und

$$Q_f := \{\zeta \in E \text{ mit } S(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*) = \infty\}. \tag{5. 3}$$

Da $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ in Q_f liegen, ist Q_f dicht in E. Weiter ist

$$Q_f = \bigcap_{m=1}^\infty Q_{f,m} \text{ mit } Q_{f,m} := \{\zeta \in E \text{ mit } S(e^{i\varphi(\zeta)}, f_\zeta^*) > m\}$$

eine G_δ-Menge; denn jedes $Q_{f,m}$ ist offen, da S als Supremum stetiger Funktionen [9]) von unten halbstetig ist. Somit gilt der Satz 1 umfassende

Satz 2. *Es seien höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Punkte $\zeta_1', \zeta_2', \ldots \in E^\circ$ vorgegeben. Dann existiert eine dichte G_δ-Menge $G \subset cCA$ mit folgender Eigenschaft:*

Zu jeder Funktion $f \in G$ existiert eine in E dichte G_δ-Menge $Q_f \subset E$, die alle Punkte ζ_n' $(n = 1, 2, \ldots)$ enthält, so daß für alle $\zeta \in Q_f$ die Potenzreihe $\Sigma b_n(\zeta) w^n$ für $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ an der Stelle $w_0 = \Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergent ist ; hingegen konvergiert die Potenzreihe für f an der Stelle 1.

Zusatz. cCA und E sind metrische Räume ohne isolierte Punkte; demnach sind (nach Lemma 4) die Mengen G und Q_f überabzählbar.

6. Bemerkungen. Um den in der Einleitung zitierten Satz von Turán ([8]) zu beweisen, genügt es, den Banachraum cs mit der Norm (2. 1) zu nehmen.

Geht man vom Banachraum

$$l_1 = \{f: E \to \mathbf{C},\ f \text{ holomorph in } E^0,\ f(z) = \sum a_n z^n,\ \sum |a_n| < \infty\}$$

mit der Norm $\|f\|_1 = \Sigma |a_n|$ aus und benützt man

Lemma 5. (Bajšanski [3], Theorem 3, oder Alpár [2], S. 292). *Ist h holomorph in $|z| < R$ (mit $R > 1$), $|h(z)| = 1$ für $|z| = 1$, $h(z) \neq e^{i\theta} \cdot z^k$ und $(h(z))^j = \Sigma \alpha_{j,n} z^n$, so ist*

$$\lim_{j \to \infty} \sum_n |\alpha_{j,n}| = \infty,$$

so erhält man eine leichte Verschärfung eines Ergebnisses von Alpár ([2]):

[9]) Die Funktionen $s_n(\exp(i\varphi(\zeta)), f_\zeta^*)$ sind in ζ stetig, da die Koeffizienten der Taylorreihe $\Sigma b_n(\zeta) w^n$ von $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ stetig von ζ abhängen.

Satz 3. *Zu vorgegebenen abzählbar vielen von Null verschiedenen Punkten* $\zeta_1', \zeta_2', \ldots \in E^\circ$ *existiert eine in* l_1 *dichte* G_δ*-Menge* $G \subset l_1$ *mit folgender Eigenschaft: Zu jedem* $f \in G$ *existiert eine in* E *dichte* G_δ*-Menge* $Q_f \subset E$*, die alle Punkte* ζ_n' *enthält, so daß für alle* $\zeta \in Q_f$ *die Potenzreihe für* $f_\zeta^* = f \circ \Phi_\zeta$ *an der Stelle* $\Phi_\zeta^{-1}(1)$ *nicht absolut konvergent ist* [10]*; hingegen konvergiert die Potenzreihe für* f *an der Stelle* 1 *absolut.*

Literaturverzeichnis

[1a, b, c] L. Alpár, Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence. I, II, III. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **3** (1958), 1—12, **3** (1958), 141—158, **5** (1960), 97—152.

[2] L. Alpár, Sur certaines transformées des series de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1962), 287—316.

[3] B. M. Bajšanski, Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler-Borel. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **10** (1956), 131—152.

[4] J. Clunie, On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 165—169.

[5] G. Halász, On the behaviour of Taylor series under conformal mappings of the circle of convergence. *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 389—401.

[6] W. Rudin, Real and complex analysis. *New York, 1966.*

[7] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis. *New York, 1958.*

[8] P. Turán, A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence circle. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **12** (1958), 19—26.

[9] P. Turán, Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled „On equivalent power series". *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 171—173.

(Eingegangen am 5. Oktober 1967.)

[10]) Nach Alpár [2] ist die Potenzreihe für f_ζ^* auf dem ganzen Rande des Einheitskreises (bedingt) konvergent, ja sogar gleichmäßig konvergent.